Het oplossen van goniometrische vergelijkingen

een alternatieve handleiding voor HAVO wiskunde B

Inleiding

Voor het oplossen van goniometrische vergelijkingen heb je een aantal dingen nodig:

1. Kennis over hoe je ‘normale vergelijkingen’ oplost. Je kunt daarbij denken aan de weegschaalmethode of bordjesmethode maar ook aan ontbinden in factoren.
2. Voor een bekende hoeken moet je exact de sinus, cosinus en tangens kunnen bepalen. Dat lijkt ingewikkeld maar met de tekendriehoeken kan dat wel. Maar je kunt dat ook met je GR doen.
3. Je moet bij een aantal bekende waarden van de sinus, cosinus en tangens de bijbehorende hoeken kunnen berekenen. Je moet weten dat bij elke waarde van de sinus of cosinus er een oneindig aantal hoeken is die voldoen. Er zijn meestal zelfs twee oneindige verzamelingen van goede oplossingen.
4. Je kunt bij het zoeken naar de juiste hoeken bij een waarde van de sinus of cosinus gebruik maken van je GR. Maar je GR geeft maar één mogelijke waarde, maar er zijn er oneindig veel.
5. Bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen werk je meestal eerst toe naar een vorm als: sin(a) = c of cos(b) = c
   Daarna bepaal je **alle** hoeken en reken verder om de waarde van x te berekenen.
6. Vaak is het domein gegeven en moet je achteraf bepalen welke waarden voor x in het domein voldoen aan de vergelijking.

Voorbeeld 1

Los op: $2\cdot\sin(3\alpha)+4=5$. Neem als domein $[0,2\pi]$.

Uitwerking

Ik wil eerst toewerken naar de vorm $\sin(3\alpha)=...$
Dat gaat zo:

$$2\cdot\sin(3\alpha)+4=5$$
$$2\cdot\sin(3\alpha)=1$$
$$\sin(3\alpha)=\frac{1}{2}$$

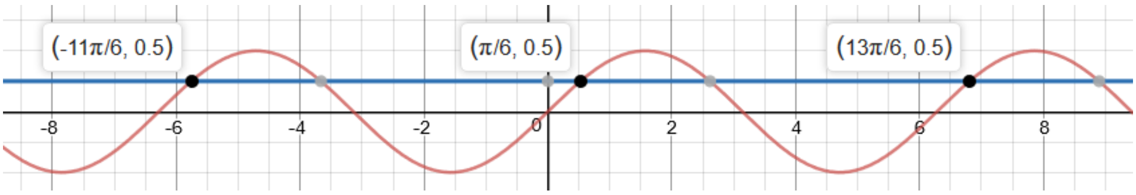
Je kunt ter vergelijking $\sin(3\alpha)$ opvatten als x. Je krijgt dan:

$$2x+4=5$$
$$2x=1$$
$$x=\frac{1}{2}$$

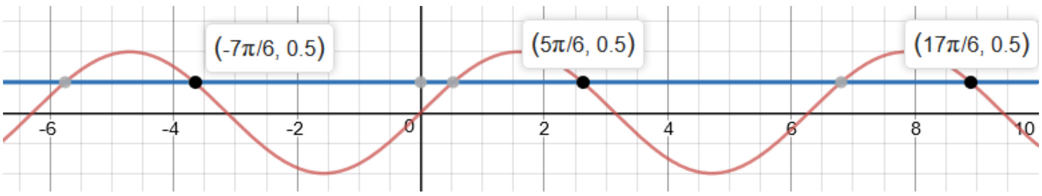
De volgende stap is om te bepalen wat de waarde van 3α moet zijn zodat $\sin(3\alpha)=\frac{1}{2}$.

Met je GR kan je bepalen dat als 3α gelijk is aan $\frac{1}{6}\pi$ dan is $\sin(3\alpha)=\frac{1}{2}$. Gebruik daarvoor **sin⁻¹()** op je rekenmachine. Maar als $\frac{1}{6}\pi$ goed is dan is $\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ voor elk willekeurig geheel getal k ook goed.

Dus $2\frac{1}{6}\pi$ of $4\frac{1}{6}\pi$ maar ook $-1\frac{5}{6}\pi$ of $-3\frac{5}{6}\pi$ … en nog heel veel meer…



In de tekening kan je zien hoe dat zit. Je ziet ook dat er nog meer punten zijn waar bij de sinus gelijk is aan een half:



Je kunt met de grafiek (of met de eenheidscirkel) bedenken wat ‘die andere hoek’ moet zijn. Bij de sinus is dat altijd π min de andere hoek. In dit geval: $\pi-\frac{1}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi$.

Maar ook hier kan je weer rondjes maken van 2π. Dus de andere hoeken zijn $\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$. Je krijgt dan als volgende stap in je oplossing:

$$\sin(3\alpha)=\frac{1}{2}$$

$$3\alpha=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3\alpha=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$$

Dan ben je er bijna. Ik wil graag weten wat α is dus ik ga delen door 3. Je moet dan wel alle termen delen door 3, dus ook de $k\cdot 2\pi$.

$$3\alpha=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3\alpha=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$$

$$\alpha=\frac{1}{18}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi \vee \alpha=\frac{5}{18}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$$

Als er geen domein gegeven is dan ben je klaar. Je hebt nu alle oplossingen gevonden.

Is er wel een domein gegeven (zoals in dit voorbeeld) dan is het handig de oplossingen uit te schrijven voor zover de oplossingen in het domein $\left[0,2\pi\right]$ vallen:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\frac{1}{18}\pi,\ \frac{13}{18}\pi\ \ of\ \ \frac{25}{18}\pi\\ \alpha=\frac{5}{18}\pi,\ \frac{17}{18}\pi\ \ of\ \ \frac{29}{18}\pi\end{array}\right\}geeft:$$

$$\alpha=\frac{1}{18}\pi\vee\alpha=\frac{5}{18}\pi\vee\alpha=\frac{13}{18}\pi\vee\alpha=\frac{17}{18}\pi\vee\alpha=\frac{25}{18}\pi\vee\alpha=\frac{29}{18}\pi$$

OPGELOST!

Nu dan de hele oplossing onder elkaar:

$$2\cdot\sin(3\alpha)+4=5$$

$$2\cdot\sin(3\alpha)=1$$

$$\sin(3\alpha)=\frac{1}{2}$$

$$3\alpha=\frac{1}{6}\pi+k\cdot2\pi\vee3\alpha=\frac{5}{6}\pi+k\cdot2\pi$$

$$\alpha=\frac{1}{18}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi\vee\alpha=\frac{5}{18}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\frac{1}{18}\pi,\ \frac{13}{18}\pi\ \ of\ \ \frac{25}{18}\pi\\ \alpha=\frac{5}{18}\pi,\ \frac{17}{18}\pi\ \ of\ \ \frac{29}{18}\pi\end{array}\right\}geeft:$$

$$\alpha=\frac{1}{18}\pi\vee\alpha=\frac{5}{18}\pi\vee\alpha=\frac{13}{18}\pi\vee\alpha=\frac{17}{18}\pi\vee\alpha=\frac{25}{18}\pi\vee\alpha=\frac{29}{18}\pi$$

Probeer nu zelf:

Los op:

I. $\sin(2\alpha)=\frac{1}{2}$

II. $\sin\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\pi\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

III. $\sin(2t+\frac{1}{3}\pi)=0$

IV. $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

Uitwerkingen

I.

$$\sin 2\alpha = \tfrac{1}{2}$$
$$2\alpha = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2\alpha = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$\alpha = \tfrac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \text{ of } \alpha = \tfrac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$$

II.

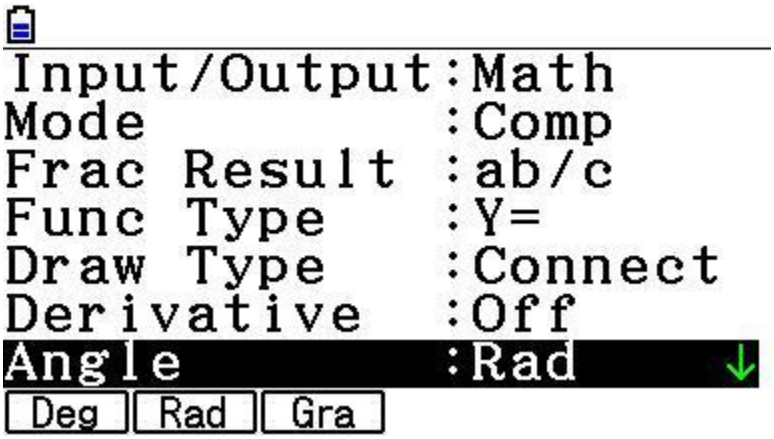
$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\pi = 1\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\pi = 1\tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha = 1\tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \tfrac{1}{2}\alpha = 2\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$\alpha = 3\tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi \text{ of } \alpha = 4\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$$

III.

$$\sin\left(2t + \frac{1}{3}\pi\right) = 0$$
$$2t + \frac{1}{3}\pi = 0 + k \cdot \pi$$
$$2t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$$
$$t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

IV.

$$2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \ \vee x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$
$$x = k \cdot 2\pi \ \vee x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$
$$x = k \cdot 2\pi \ \vee x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$



Het oplossen van goniometrische vergelijkingen deel II.

Dit is het tweede deel met uitleg over het oplossen van goniometrische vergelijkingen. In deze les gaan we nog iets verder in op het vinden van **alle** hoeken bij een gegeven waarde van de sinus of cosinus. We bespreken ook nog een paar bijzondere gevallen en we gaan uitgebreid een voorbeeld bespreken.

Van verhouding naar hoek

We zagen al hoe je van een waarde van de sinus overstapt op de hoeken:

$$\sin(3\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$3\alpha = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3\alpha = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

Die $\frac{1}{6}\pi$ kan je vinden met je GR en die $\frac{5}{6}\pi$ vindt je met $\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$ want bij de sinus vind je de tweede hoek altijd met π min de eerste hoek.

Bij de **cosinus** gaat dat op dezelfde manier maar dan anders…☺

Cosinus

Ga na dat bij $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ de GR als hoek $\frac{1}{3}\pi$ geeft. We weten in ieder geval:

$$\alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \ldots$$

De andere hoek kan je vinden door 2π min de eerste hoek te nemen. Dat wordt dan: $\alpha = 1\frac{2}{3}\pi$.

De oplossing is dan:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \alpha = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

Voorbeeld 1

Los op: $\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0$. Neem als domein $[0,2\pi]$.

Stap 1

Werk eerst naar $\cos(...)=...$

$$\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0$$
$$\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Stap 2

Welke hoeken horen hierbij? De GR geeft als 1^{e} hoek $\frac{3}{4}\pi$, de tweede hoek is dan $1\frac{1}{4}\pi$.

De volgende stap in de oplossing:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi+k\cdot 2\pi \vee x-\frac{\pi}{3}=1\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi$$

Stap 3

Nu kan je dan de waarde voor x gaan berekenen:

$$x-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi+k\cdot 2\pi \vee x-\frac{\pi}{3}=1\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi$$
$$x=1\frac{1}{12}\pi+k\cdot 2\pi \vee x=1\frac{7}{12}\pi+k\cdot 2\pi$$

Stap 4

Voor het gegeven domein $[0,2\pi]$ krijg je als oplossingen:

$$x=1\frac{1}{12}\pi \vee x=1\frac{7}{12}\pi$$

…en daar mee heb je vergelijking helemaal opgelost.

Complete uitwerking

$$\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0$$

$$\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi+k\cdot 2\pi \vee x-\frac{\pi}{3}=1\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi$$

$$x=1\frac{1}{12}\pi+k\cdot 2\pi \vee x=1\frac{7}{12}\pi+k\cdot 2\pi$$

$$Op\ \left[0,2\pi\right]\ geeft\ dat:$$

$$x=1\frac{1}{12}\pi \vee x=1\frac{7}{12}\pi$$

Bijzondere gevallen

Er zijn bij de omrekening van sinus of cosinus naar de hoeken een paar bijzondere gevallen:

- $\sin(\alpha)=0$ geeft $\alpha=k\cdot\pi$
- $\sin(\alpha)=1$ geeft $\alpha=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$
- $\sin(\alpha)=-1$ geeft $\alpha=1\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

Zo ook voor de cosinus:

- $\cos(\alpha)=0$ geeft $\alpha=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$
- $\cos(\alpha)=1$ geeft $\alpha=k\cdot 2\pi$
- $\cos(\alpha)=-1$ geeft $\alpha=\pi+k\cdot 2\pi$

Soms krijg je dus één verzameling van oplossingen met een periode van π en soms krijg je één verzameling van oplossingen met een periode van 2π. In het eerste geval zijn het feitelijk de nulpunten en in het tweede geval zijn de maxima of de minima.

Denk daar maar 's over na…☺

Voorbeeld 2

Los op: $\sin(3x-2\pi)=1$

Uitwerking:

$$\sin(3x-2\pi)=1$$

$$3x-2\pi=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$$

$$3x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$$

Voorbeeld 3

Los op: $\cos(2x+1)\cdot\sin(x-1)=0$

Uitwerking:

$$\cos(2x+1)\cdot\sin(x-1)=0$$
$$\cos(2x+1)=0\vee\sin(x-1)=0$$

$$2x+1=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi\vee x-1=k\cdot\pi$$

$$2x=\frac{1}{2}\pi-1+k\cdot 2\pi\vee x=1+k\cdot\pi$$

$$x=\frac{1}{4}\pi-1+k\cdot\pi\vee x=1+k\cdot\pi$$

Oefeningen I

I. $2\cdot\sin\left(\pi-\frac{1}{2}\alpha\right)=\sqrt{2}$

II. $\cos\left(\frac{1}{2}(\pi-\alpha)\right)+\frac{1}{2}\sqrt{2}=0$

III. $2\cdot\sin^2(\alpha)=1$

IV. $\cos^2(\alpha)+\frac{1}{2}\cos(\alpha)-\frac{1}{2}=0$

Nog meer bijzondere gevallen

Soms kom je ook wel ’s opgaven tegen als:

Los op:

$$\sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\pi\right)=\sin(\alpha+\pi)\ met\ \ \alpha\in[0,2\pi]$$

Dit soort opgaven kan je oplossen als je bedenkt dat:

$$\sin(\alpha)=\sin(\beta)\Rightarrow\alpha=\beta+k\cdot2\pi\vee\alpha=\pi-\beta+k\cdot2\pi$$

In dit geval krijg je:

$$\sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\pi\right)=\sin(\alpha+\pi)$$

$$\alpha+\frac{1}{2}\pi=\alpha+\pi+k\cdot2\pi\vee\alpha+\frac{1}{2}\pi=\pi-(\alpha+\pi)+k\cdot2\pi$$

Dus ook twee verzamelingen van oneindig veel oplossingen. Verder uitwerken geeft:

$$\sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\pi\right)=\sin(\alpha+\pi)$$

$$\alpha+\frac{1}{2}\pi=\alpha+\pi+k\cdot2\pi\vee\alpha+\frac{1}{2}\pi=\pi-(\alpha+\pi)+k\cdot2\pi$$

$$\frac{1}{2}\pi=\pi(v.n.)\vee\alpha+\frac{1}{2}\pi=\pi-\alpha-\pi+k\cdot2\pi$$

$$\alpha+\frac{1}{2}\pi=-\alpha+k\cdot2\pi$$

$$2\alpha=-\frac{1}{2}\pi+k\cdot2\pi$$

$$2\alpha=1\frac{1}{2}\pi+k\cdot2\pi$$

$$\alpha=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi$$

$$Voor\ [0,2\pi]\ geeft\ dit:$$

$$\alpha=\frac{3}{4}\pi\vee\alpha=1\frac{3}{4}\pi$$

Oefening II.

Los op: $\cos(2\alpha)=\cos(\pi-\alpha)$. Neem $[0,2\pi]$ als domein.

Uitwerkingen oefening I.

I. $2 \cdot \sin\left(\pi - \frac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{2}$

$\sin\left(\pi - \frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\pi - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \pi - \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$-\frac{1}{2}\alpha = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee -\frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$\alpha = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \vee \alpha = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi$

$\alpha = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \vee \alpha = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi$

II. $\cos\left(\frac{1}{2}(\pi - \alpha)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$

$\cos\left(\frac{1}{2}(\pi - \alpha)\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}(\pi - \alpha) = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$\pi - \alpha = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \vee \pi - \alpha = 2\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi$

$-\alpha = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \vee -\alpha = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi$

$\alpha = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \vee \alpha = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi$

$\alpha = 2\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \vee \alpha = 3\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi$

III. $2 \cdot \sin^2(\alpha) = 1$

$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}$

$\sin(\alpha) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee \sin(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\alpha = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \alpha = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \alpha = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \alpha = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$\alpha = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

IV. $\cos^2(\alpha)+\frac{1}{2}\cos(\alpha)-\frac{1}{2}=0$

Neem $x=\cos(\alpha)$

$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$

$2x^2+x-1=0$

$D=1^2-4\cdot 2\cdot -1=1+8=9$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm 3}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\vee x=-1$

$\cos(\alpha)=\frac{1}{2}\vee\cos(\alpha)=-1$

$\alpha=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi\vee\alpha=1\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi\vee\alpha=\pi+k\cdot\pi$

Uitwerking oefening II.

Los op: $\cos(2\alpha)=\cos(\pi-\alpha)$. Neem $[0,2\pi]$ als domein.

$\cos(2\alpha)=\cos(\pi-\alpha)$

$2\alpha=\pi-\alpha+k\cdot 2\pi\vee 2\alpha=2\pi-(\pi-\alpha)+k\cdot 2\pi$

$3\alpha=\pi+k\cdot 2\pi\vee 2\alpha=2\pi-\pi+\alpha+k\cdot 2\pi$

$\alpha=\frac{1}{3}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi\vee\alpha=\pi+k\cdot 2\pi$

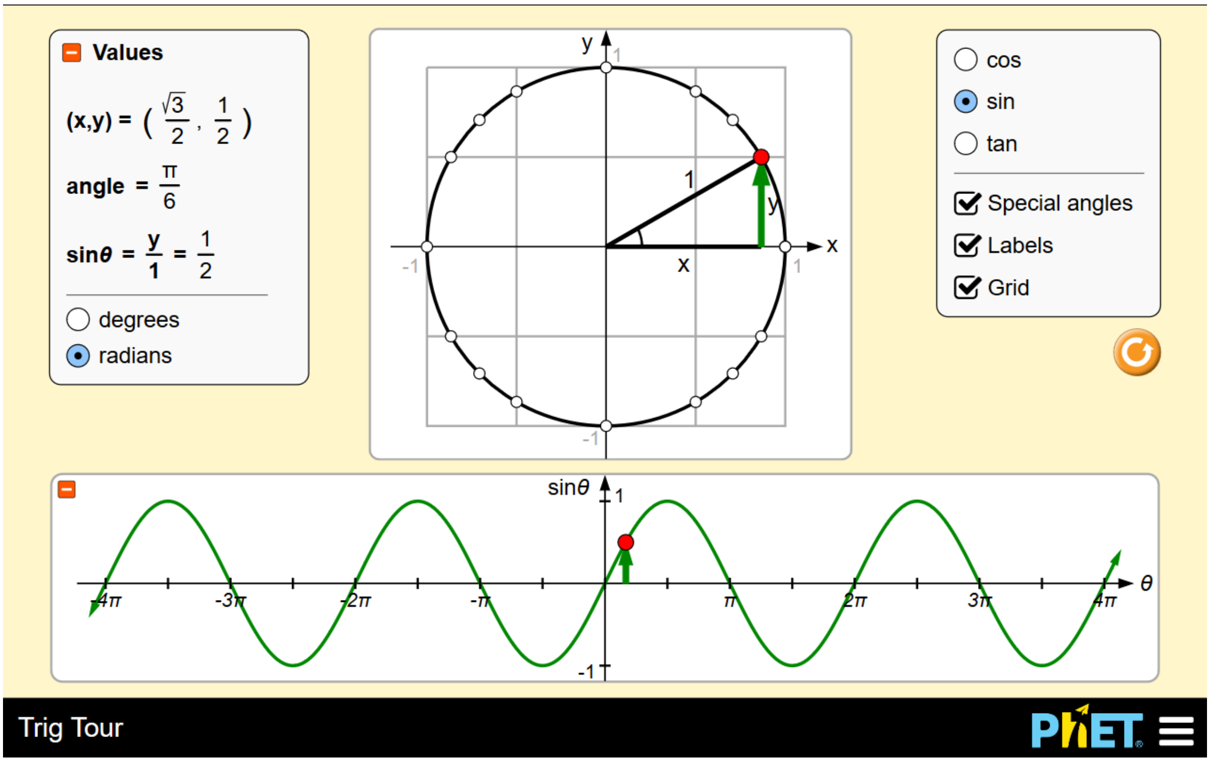
$\alpha=\frac{1}{3}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

Voor het domein $[0,2\pi]$ geeft dit:

$\alpha=\frac{1}{3}\pi\vee\alpha=\pi\vee\alpha=1\frac{2}{3}\pi$

Het oplossen van goniometrische vergelijkingen III

Je weet dat voor $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ geldt dat $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$. Je kunt dat mooi zien in onderstaand plaatje:



Maar voor welk hoeken geldt dat ook?

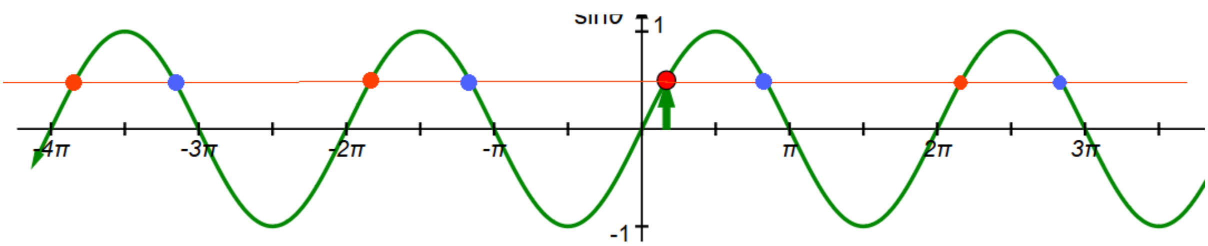
Allereerst natuurlijk voor alle hoeken die een geheel aantal keren 2π groter of kleiner zijn, dus:

$$\alpha = \frac{1}{6}\pi,\ \alpha = 2\frac{1}{6}\pi,\ \alpha = 4\frac{1}{6}\pi, \ldots$$

Maar ook:

$$\alpha = -1\frac{5}{6}\pi,\ \alpha = -3\frac{5}{6}\pi,\ \alpha = -5\frac{5}{6}\pi, \ldots$$

Maar als je naar de grafiek kijkt kun je zien dat er nog meer hoeken zijn waarvoor de sinus gelijk is aan een $\frac{1}{2}$.

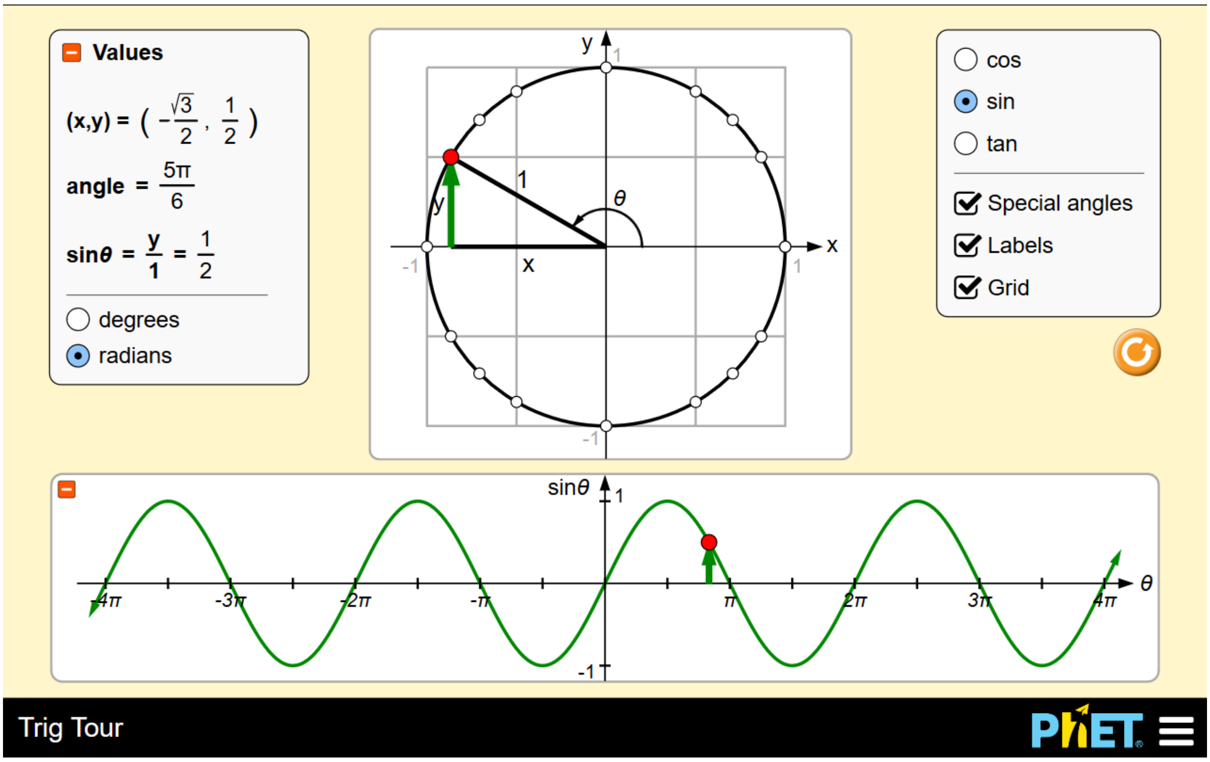


Die hoeken bij de rode punten hadden we, maar wat doen we nu met de hoeken bij die blauwe punten. Het blauwe punt dat het dichts bij de y-as ligt is gelijk aan:

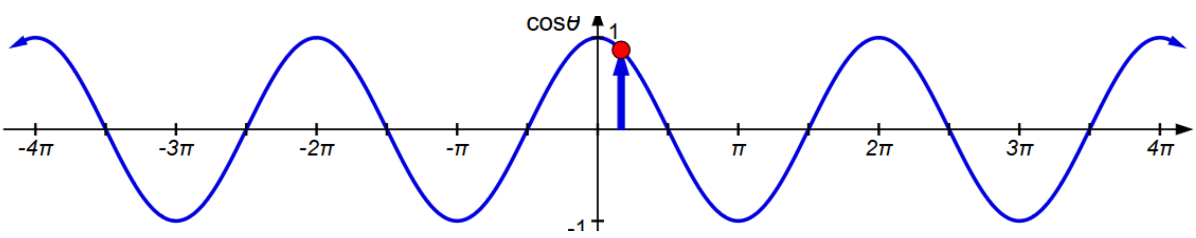
$$\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

Ga maar na. Je moet rekenen vanaf het punt $(\pi, 0)$ en dan naar links.

Conclusie
Je kunt bij de sinus met je GR altijd één hoek vinden. De ‘andere hoek’ kan je dan vinden door die hoek van π af te trekken.



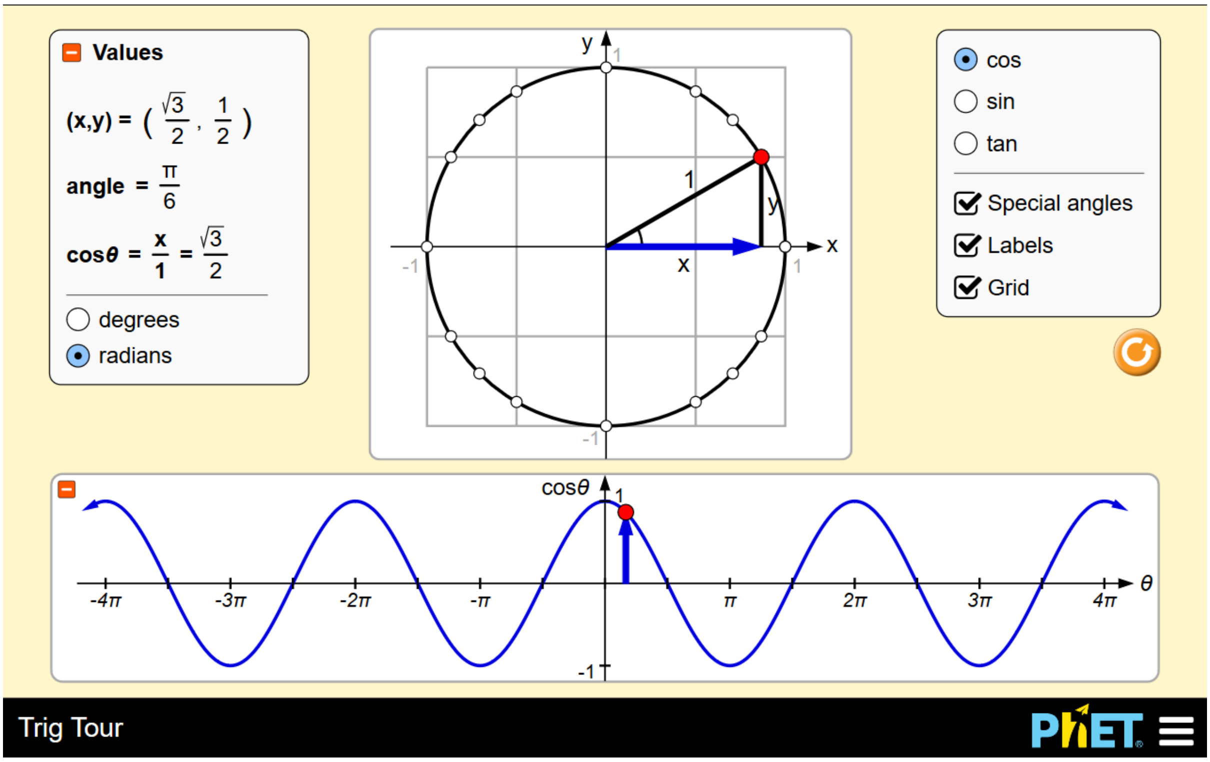
Bij de cosinus werkt het dan net zo maar dan anders. De grafiek van de cosinus ziet er anders uit:



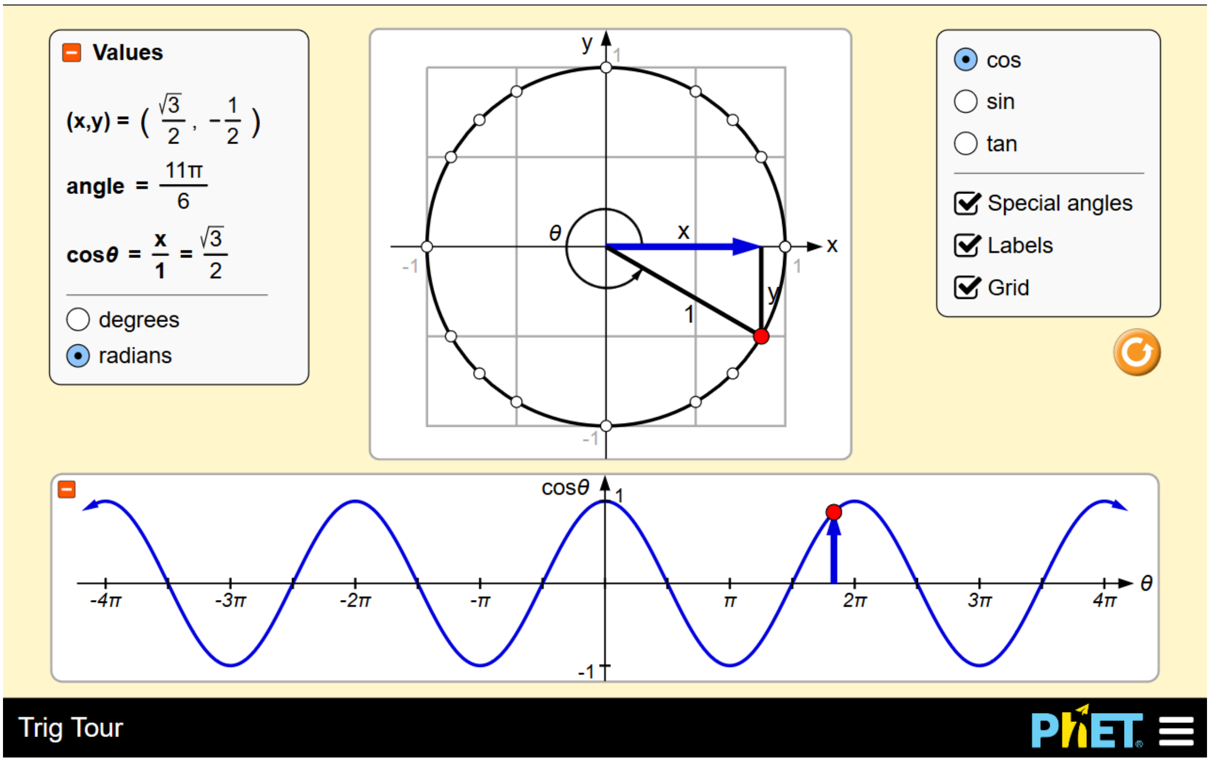
Je moet dan niet tellen vanaf π maar vanaf 2π. Je krijgt dan:

$$2\pi - \frac{1}{6}\pi = 1\frac{5}{6}\pi$$

Kijk maar ’s naar het volgende plaatjes:



Je kunt nu de ‘tweede hoek’ vinden door van 2π de eerste hoek af te trekken. Je krijgt dan $2\pi - \frac{1}{6}\pi = 1\frac{5}{6}\pi$. Ga maar na!



Voorbeeld

$$\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

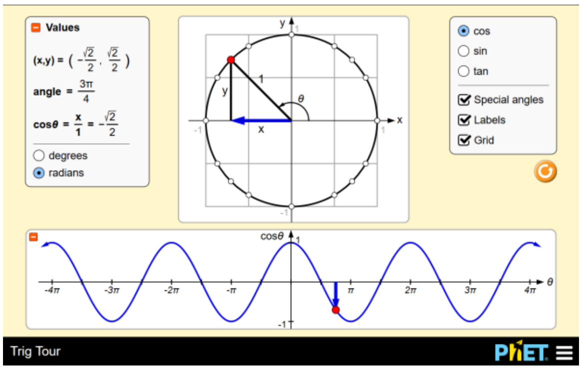
Met de GR bereken je $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, dus in ieder geval $\alpha = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

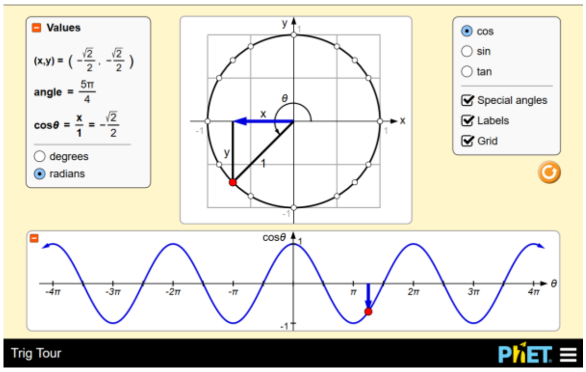
Maar ook $2\pi - \frac{3}{4}\pi = 1\frac{1}{4}\pi$, zodat je $\alpha = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ krijgt.

Dus krijg je als oplossing:

$$\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \alpha = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$





Willem

Willem van Ravenstein
http://www.wiswijzer.nl
maart 2017

Zie ook het nagekomen bericht op de volgende pagina.

Nagekomen bericht

Bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen komt het voor dat je GR voor de hoek een negatieve waarde geeft terwijl in de uitwerkingen dat niet zo is. Hoe is dat mogelijk?

Voorbeeld

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Je GR geeft:

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \to -\frac{1}{3}\pi$$

Je zou dan iets moeten schrijven als:

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \ldots$$

Als je gewoon doorrekent dan krijg je met de andere hoek er bij:

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

Tot zover geen probleem?! De uitwerking ziet er dan zo uit:

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$$
$$x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$$
$$x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$$

Maar dat is niet wat er (mogelijkerwijs) in de uitwerkingen stond. Op de volgende pagina zul je zien dat er velen wegen zijn naar Rome maar dat het uiteindelijk op hetzelfde neer komt. Als je maar in Rome aankomt…☺

Uitwerkingen volgens Willem

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$2x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$$
$$x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$$
$$x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$$

…en wat denk je? Het maakt niet uit…

Samengevat

Omdat het om periodieke functies gaat met steeds stapjes van 2π kan je hoeken naar behoefte 2π groter of kleiner nemen.

Hopelijk helpt dat…

Willem