In elke aflevering van de rubriek *Wat bedoelen ze toch met*... staat een spraakmakend begrip uit de wiskundedidactiek of de onderwijskunde centraal, waarover veel is geschreven, maar waarvan toepassing in de wiskundeles niet altijd meteen duidelijk is. Wat wordt met het wetenschappelijk jargon bedoeld en hoe vertaalt zich dit naar de onderwijspraktijk?
In deze derde aflevering schrijft **Paul Drijvers** over het begrip *symbol sense*.

Wat bedoelen ze toch met... *symbol sense*?

Rubriek

Inleiding

In december 2011 werden twee studies naar het het Nederlandse algebraonderwijs afgerond met promoties. Irene van Stiphout onderzocht hoe de algebraïsche vaardigheid van leerlingen zich ontwikkelt van klas 2 tot klas 5 en Christian Bokhove richtte zich op de rol van ICT bij het verwerven, oefenen en toetsen van algebraïsche vaardigheden[1]. In beide proefschriften speelt het begrip *symbol sense* een belangrijke rol. Bij deze promoties was Abraham Arcavi aanwezig, een van de 'geestelijke vaders' van symbol sense. Ook gaf hij tijdens zijn verblijf hier een lezing over zijn kijk op algebraonderwijs[2]. Aanleiding genoeg dus om stil te staan bij symbol sense. Wat wordt daarmee eigenlijk bedoeld? Waarom moet dit in het Engels? Wat kun je aan dit begrip hebben in het dagelijkse wiskundeonderwijs?

Voorbeelden

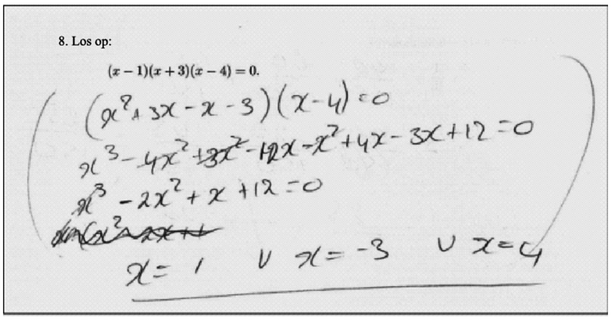


fig. 1 Leerling worstelt met opgave (Van Stiphout, 2011).

Laten we eerst twee voorbeelden bekijken. Het eerste is afkomstig uit het onderzoek van Van Stiphout en gaat over het oplossen van de vergelijking $(x-1)(x+3)(x-4)=0$. Figuur 1 laat de herkenbare reactie (of reflex?) van een leerling uit klas 6 VWO zien: Haakjes? Uitwerken maar! Eerst wordt dus $(x-1)(x+3)$ netjes uitgewerkt, dan wordt het resultaat vermenigvuldigd met de derde factor en wordt de derdegraads veelterm vereenvoudigd. Dit gaat allemaal goed, maar wat nu gedaan? Even is er de verleiding om door x te delen, maar dat wordt doorgestreept. Dan ziet de leerling een handige aanpak: 'product = 0 als een van de factoren = 0'. Zo wordt meteen de oplossing opgeschreven.

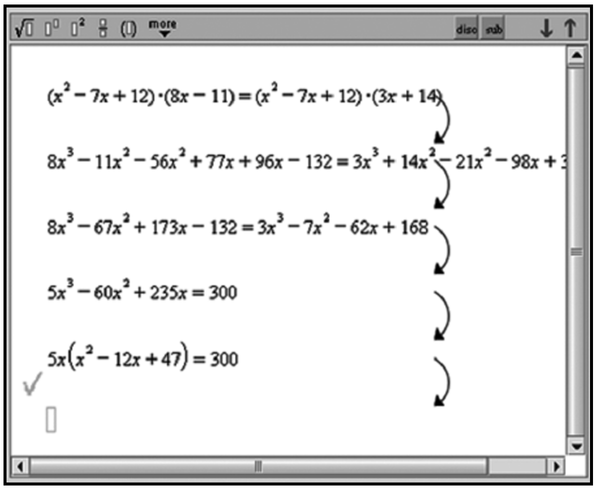


fig. 2 Nog een worsteling, nu met ICT erbij (Bokhove, 2011).

Een vergelijkbaar voorbeeld vinden we in het proefschrift van Bokhove. De vergelijking (zie figuur 2) is hier complexer en heeft een gemeenschappelijke kwadratische factor links en rechts van het =-teken. De leerling werkt in de Digitale WiskundeOmgeving DWO[3] maar de strategie is aanvankelijk vergelijkbaar met die van het pen-en-papierwerk in figuur 1: haakjes wegwerken en vereenvoudigen. Vervolgens worden alle termen die x bevatten naar de linkerkant gebracht en alle constanten naar rechts. Dat is misschien een variant op een vergelijkbare strategie bij het oplossen van lineaire vergelijkingen? Dan brengt de leerling links nog een x buiten haakjes. Met het √-tje op het scherm geeft de DWO aan dat de vergelijking nog steeds equivalent is aan de oorspronkelijke. Maar hier loopt de leerling vast en is het einde verhaal. En dat terwijl het hier om een leerling uit VWO-6 gaat, die kort voor het eindexamen zit...

Theorie

Wat leren we nu van deze twee voorbeelden? In het werk van beide leerlingen valt op dat ze geen fouten maken in het haakjes wegwerken, vereenvoudigen en termen naar de andere kant brengen. Kennelijk zijn deze procedurele basisvaardigheden wel in orde. Daar zit dus niet het probleem.

Waar het wel aan ontbreekt, is een strategie. Deze twee leerlingen missen kennelijk het vermogen om de vergelijking eerst maar eens rustig te inspecteren, daarin een belangrijk kenmerk te ontdekken en vervolgens de oplossingsstrategie daarop af te stemmen. In het eerste voorbeeld is dit kenmerk de gefactoriseerde vorm van het linkerlid; in het tweede voorbeeld is het de gemeenschappelijke factor aan beide zijden van het =-teken. En dit is het moment waarop symbol sense in beeld komt.

Het begrip symbol sense verwijst naar die onderdelen van algebraïsche vaardigheid die de procedurele basisvaardigheden overstijgen en die te maken hebben met inzicht in de betekenis van algebra. Of, zoals Arcavi het zegt: "*Symbol sense is the algebraic component of a broader theme: sense-making in mathematics*" (Arcavi, 1994, p. 32). Dit idee, eigenlijk het algebraïsch analogon van number sense voor getallen, is voor het eerst geformuleerd door Fey (1990). Later hebben anderen (Arcavi 1994, 2005) het verder uitgewerkt in concrete voorbeelden van opgaven en gedrag waaruit symbol sense zou blijken.

Symbol sense is dus de algebraïsche expertise die, vaak op de achtergrond zonder dat we ons daarvan bewust zijn, de uitvoering van de basisroutines stuurt en het inzicht in onderliggende concepten omvat. Het speelt een rol bij het plannen, coördineren en interpreteren van algebraïsche basisprocedures. In termen van Van Streun (2012; in druk) vormen deze basisprocedures het *Weten dat* van de schoolalgebra, terwijl symbol sense het *Weten hoe* en *Weten waarom* omvat.

Waarom een Engelse term? Het aardige daaraan, aldus Arcavi, is de dubbele betekenis: 'sense' betekent zowel zintuig als betekenis, en verwijst daarmee naar waarneming én naar inzicht. En dat is natuurlijk wat je nodig hebt in de twee voorbeelden hierboven: het vermogen om met je zintuigen (de ogen) de structuur van de vergelijking te doorzien en het inzicht om op basis daarvan een goede strategie te kiezen. Bijkomende voordelen van het Engels is dat het prettig allitereert met die twee s-en en dat vreemde Nederlandse vertalingen zoals 'symboolgevoel' of 'algebraïsche geletterdheid' vermeden kunnen worden.

Wat ik belangrijk vind aan symbol sense is dat het zichtbaar maakt dat algebraïsche vaardigheid meer is dan alleen procedurele beheersing van basisalgoritmen. Het bezwaar dat wel tegen het idee van symbol sense gemaakt wordt, is dat het een vaag begrip is met trekjes van een vergaarbak. In een poging om hieraan tegemoet te komen, zie ik symbol sense als drie met elkaar samenhangende vaardigheden (Drijvers 2006):

- *Strategische vaardigheden* om een geschikte probleemaanpak te kiezen, om tijdens de uitvoering daarop overzicht te houden, om daarbinnen handige keuzes te maken en om, als een strategie vastloopt, een andere invalshoek te zoeken.
- Het vermogen om *globaal te kijken* naar expressies en formules, om de structuur van (deel-)expressies te doorzien, om de betekenis van symbolen in de context te herkennen en om expressies op een andere manier weer te geven.
- Het vermogen tot *algebraïsch redeneren*. Denk bijvoorbeeld aan het herkennen van 'winnende' factoren in een formule, aan symmetrieoverwegingen of aan redeneringen met randgevallen.

Figuur 3 geeft deze drie elementen van symbol sense weer, samen met hun 'tegenpolen' bij het uitsluitend procedurele werken.

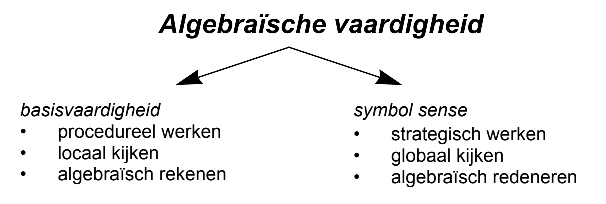


fig. 3 Verschillende aspecten van algebraïsche vaardigheid.

Natuurlijk zijn basisvaardigheden en symbol sense beide onmisbare kanten van algebraïsche vaardigheid en is een scherpe grens tussen de twee niet goed te trekken. Bij algebraïsch redeneren zal op de achtergrond ook rekenvaardigheid een rol spelen, omdat redeneren pas goed mogelijk is als je de bewerkingen enigszins in de vingers hebt. Andersom zal bij het algebraïsch rekenen ook enig redeneren nodig zijn, zeker als de automatische piloot hapert of als de situatie afwijkt van de gebruikelijke.

Terug naar de voorbeelden

Laten we vanuit het idee van symbol sense nog eens terugkijken op de twee gegeven voorbeelden. Het is duidelijk dat de routineuze beheersing van een basisvaardigheid, namelijk het uitwerken van haakjes, een meer symbol-sensebenadering van 'eerst eens goed kijken naar de vergelijking' in de weg staat. De prijs die hiervoor wordt betaald, is in beide gevallen extra algebraïsch rekenwerk. In het eerste voorbeeld dreigt de leerling vast te lopen maar komt het door een symbol sense-achtige ingeving toch nog goed; in het tweede, ingewikkeldere voorbeeld gebeurt dit niet en leidt het ontbreken van symbol sense tot een onopgelost probleem.

In sommige schoolboeken worden de oplossingsstrategieën waarop deze voorbeelden beroep doen expliciet behandeld in de vorm van regels zoals

$$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0 \text{ en}$$
$$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow A = 0 \vee B = C,$$

waarin A, B en C voor algebraïsche expressies staan. Dergelijke aandacht voor het onderscheiden van typen vergelijkingen en bijbehorende oplossingsstrategieën kan zeker nuttig zijn voor het vergroten van het repertoire van de leerlingen en zal ook bijdragen aan het minder snel vastlopen in dergelijke opgaven (Drijvers & Kop, in druk). Een risico hierbij is wel dat de toepassing van deze regels uitgebreid wordt geoefend en daarmee een nieuw trucje wordt, dat zonder goed te kijken wordt toegepast. Dan werkt de aanpak wel in de zin dat deze opgaven beter zullen gaan, maar niet in de zin dat de leerling beter leert globaal te kijken en de strategie daarop af te stemmen. Dat is de paradox van de dualiteit basisvaardigheid – symbol sense: enerzijds moeten ook symbol-sensevaardigheden geëxpliciteerd en geoefend worden om een zekere routine en vaardigheid te verwerven. Anderzijds gaat het hierbij ook om een vorm van 'wiskundige wendbaarheid' die zich moeilijk laat vangen in regeltjes en die juist aangesproken wordt als de standaardprocedures te kort schieten.

Wat te doen in de klas?

Op welke manieren kun je nu in de dagelijkse praktijk met het onderscheid basisvaardigheid – symbol sense omgaan? Op de eerste plaats is *variatie van opgaven* van belang. Voor oefening van basisvaardigheden is het nuttig om leerlingen aan een aantal gelijksoortige opgaven te laten werken. Voor de ontwikkeling van symbol sense is het daarentegen zinvol om variatie in opgaven aan te brengen, zodat zich af en toe verrassingen voordoen, of zelf crises die uitnodigen tot een frisse kijk op het probleem en mogelijk tot een nieuwe aanpak. In Bokhove (2011) wordt een dergelijke crisis opgeroepen door het voorbeeld van figuur 2 nog complexer te maken met een gemeenschappelijke factor van hogere graad. De leerling ziet dan al snel aankomen dat de gebruikelijke aanpak van haakjes uitwerken niet werkt en moet dus op zoek naar een alternatief. In Van Stiphout (2011) wordt de routine van het oplossen van lineaire vergelijkingen op een gegeven moment doorbroken doordat de vergelijking niet één, maar geen of oneindig veel oplossingen heeft.

Een tweede manier om aandacht aan de ontwikkeling van symbol sense te besteden betreft de *werkvormen* in de klas. Leerlingen zelfstandig laten werken leidt lang niet altijd tot symbol sense. Een goed klassengesprek, waarin een leerling uitlegt hoe hij tot een bepaalde aanpak is gekomen, kan wel helpen. Of u kunt zelf als 'algebra-expert' hardop denkend voordoen hoe u naar een vergelijking of ander algebraïsch probleem kijkt, wat u daarin ziet en hoe dit uw afweging stuurt van de verschillende manieren waarop het kan worden aangepakt. Ook aandacht voor strategieën kan symbol sense bevorderen. Geef leerlingen bijvoorbeeld een groot aantal vergelijkingen om op te lossen, of expressies om te vereenvoudigen, en vraag hen om aan te geven wat een geschikte eerste stap zou zijn en waarom. In het verlengde daarvan ligt het stellen en samen met leerlingen beantwoorden van vragen als:

– Waar wil je op uitkomen, waar moeten we heen?
– Kun je het probleem in verband brengen met iets waar we wel raad mee weten?
– Welk idee maakte dat je hiermee verder kon?

Conclusie

Het idee van symbol sense is eigenlijk betrekkelijk eenvoudig: algebra is meer dan het uitvoeren van basisprocedures. Symbol sense is een begrip dat kan helpen om de vinger achter dat 'meer' te krijgen. Daarmee kan het een bijdrage leveren aan het begrijpen van de moeilijkheden die leerlingen hebben met algebra. Tevens biedt het handvatten voor het aanpakken van dergelijke problemen, zeker voor de docent. Met leerlingen zou ik het niet zo snel over symbol sense hebben; de gedachte erachter, namelijk om expliciet aandacht te besteden aan onderliggende overwegingen bij de uitvoering van basisbewerkingen, zou ik echter zeker proberen in praktijk te brengen.

Paul Drijvers
Freudenthal Instituut, Utrecht

Noten

[1] Zie ook de bespreking van Hans Cuypers elders in dit nummer.
[2] Zie http://www.fi.uu.nl/fisme/nl/projecten/minisymposiumalgebraict/ voor de presentatie.
[3] De online module is beschikbaar op http://www.algebrametinzicht.nl.

Literatuur

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35. http://flm.educ.ualberta.ca/index.php?do=extras&lang=en.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics,* *25*(2), 42-47.

Bokhove, C. (2011). *Use of ICT for acquiring, practicing and assessing algebraic expertise.* Dissertation. Utrecht: FIsme Scientific Library.

Drijvers, P. (2006). Algebraïsche basisvaardigheden en symbol sense in de tweede fase van HAVO en VWO. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 25*(3), 4-10.

Drijvers, P., & Kop, P. (in druk). Variabelen en vergelijkingen. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld, *Handboek Wiskundedidactiek.* Utrecht: Epsilon.

Fey, J. (1990). Quantity. In L.A. Steen (Red.), On *the shoulders of giants: new approaches to numeracy* (pp. 61-94). Washington D.C.: National Academy Press.

Stiphout, I. van (2011). *The development of algebraic proficiency.* Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.

Streun, A. van (2001). *Het denken bevorderen.* Oratie. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

Streun, A. van (in druk). Leren en onderwijzen van wiskunde. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld, *Handboek Wiskundedidactiek.* Utrecht: Epsilon.

MEDEDELING

Primas – Onderzoekend leren

Wilt u uw leerlingen uitdagen, kritisch leren nadenken en hun talenten zichtbaar maken? Volg dan de cursus *Onderzoekend leren*.

Principes van onderzoekend leren zijn erop gericht om leerlingen actief in het onderwijs te betrekken. Dat klinkt alsof ze de hele les zelfstandig onderzoek doen. Onderzoekend leren betekent vooral leerlingen het belang zien van de leerstof en een onderzoekende houding ontwikkelen. Maar hoe organiseer je dat en hoe gebruik je daarbij je methode? Deze cursus is bedoeld om docenten te ondersteunen in het opfrissen en uitbreiden van hun doceerrepertoire in de dagelijkse lespraktijk ten behoeve van onderzoekend leren.

Het nascholingstraject bestaat uit vijf tot zeven bijeenkomsten. U wordt zich bewust van de mogelijkheden om onderzoekend leren in de lessen te verwerken, bekijkt en analyseert videolessen, krijgt handreikingen en oefent met werkvormen voor onderzoekend leren.

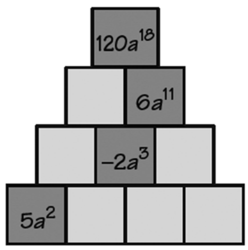
Bij voorkeur worden de bijeenkomsten op uw school georganiseerd voor docenten wiskunde, scheikunde, natuurkunde en biologie (minimaal twaalf docenten). Bij voldoende belangstelling kan de cursus regionaal of aan een conglomeraat van scholen aangeboden worden. Er zijn geen kosten verbonden aan de cursus.

Informatie over de cursus:
http://www.betasteunpunt-utrecht.nl/index.php?pid=260

Informatie over Primas:
http://www.primas-project.eu/

Meer informatie? Neem dan contact op met Michiel Doorman (m.doorman@uu.nl).

Van: *vul de lege plaatsen in.*



Naar: *ontwerp zelf een makkelijke en een moeilijke piramide*

En zo ontstond bij leerlingen de vraag: "Hoeveel vakjes moeten eigenlijk ingevuld zijn om 'm op te kunnen lossen?"

Reactie van een docent: "Deze aanpak geeft leerlingen vertrouwen in hun kunnen en maakt ze eigenaar van de stof".