

3.6 (PROEF)TOETS 1

Opgave 1

Toon aan dat $\lim_{\vec{x} \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ niet bestaat door een geschikte route naar $(0, 0)$ te kiezen.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$ op het domein

$$D_f = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2\pi \wedge 0 \leq y \leq 2\pi\}$$

- Bepaal de stationaire punten van f .
- Onderzoek of f extremen heeft.

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

- Toon aan dat de functie op elke lijn $y = mx$ een minimum heeft in $(0, 0)$.
- Toon aan dat er evenwel geen tweedimensionale omgeving bestaat van $(0, 0)$, waarin de functie een relatief minimum heeft in $(0, 0)$.

Opgave 4

Bereken bij benadering hoeveel cm^3 ijzer nodig is voor het vervaardigen van een 1 meter lange dunwandige ijzeren pijp met een binnen diameter van 10 cm en een wanddikte van 2 mm. (Aanwijzing: deze vraag lijkt op opgave 4 van §2.3)

Opgave 5

Gegeven is de kromme K met vergelijking $x^3 + xy^2 + 3y^2 + 2x = 3x^2$.

- Beschrijf K als niveaulijn van een functie van twee variabelen. Gebruik deze functie om $\frac{dy}{dx}$ te bepalen.
- In welke punten van K is de raaklijn evenwijdig aan de Y-as?

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + xy^2 - 2xy$.

- Onderzoek of de functie f extremen heeft.
- Voor f geldt de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$. Onderzoek of f randextremen heeft door x^2 uit de voorwaarde voor de rand ($x^2 + y^2 - 2y = 0$) vrij te maken en daarmee x te elimineren uit het functievoorschrift. Hierdoor gaat f over in $f^*(y)$. Geef het functievoorschrift voor f^* . Geef ook het domein van f^* .
- Bepaal de randminima van f^* . Bepaal nu ook de randminima van f .

3.7 (PROEF)TOETS 2

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$

- Los op $f(x, y) = 0$.
- Geef in een XY-assenstelsel aan in welke punten geldt: $f(x, y) > 0$.
- Bepaal de stationaire punten. Welke zijn minima of maxima? Geef verklaringen.
- Bepaal de extreme waarde(n) van f .
- Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt met $(x, y) = (1, 2)$.

Opgave 2

Maak gebruik van een ε, δ -bewijs om $\lim_{\vec{x} \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ aan te tonen.

Opgave 3

Zoek de extremen van onderstaande functies:

- $f(x, y) = xy^2$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 = 1$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ onder de nevenvoorwaarde $3x + 2y - 7z = 5$
- $f(x, y) = x + y$ onder de nevenvoorwaarde $y^2 = x^2 + x^3$

Opgave 4

Gegeven is de kromme K met vergelijking $x \sin y + y \cos x = \pi$.

Op de kromme ligt het punt $A(0, \pi)$.

- Beschrijf K als niveaulijn van een functie van twee variabelen. Gebruik deze functie om $\frac{dy}{dx}$ te bepalen.
- Toon aan dat de raaklijn in A evenwijdig aan de X-as loopt. Geef de vergelijking van de raaklijn.

Opgave 5 Een maximale driehoek

Gevraagd de driehoek, waarvoor het produkt van de sinussen zo groot mogelijk is.

Aanpak: Noem de hoeken x, y, u .

- Omdat x, y en u de hoeken van een driehoek zijn, kun je ze niet alledrie willekeurig kiezen. Als we x en y willekeurig kiezen, ligt u vast. Geef een formule voor u uitgedrukt in x en y . Welke domeinbependingen zijn er voor x en y ?
- Stel een geschikt functievoorschrift op (bij de gestelde vraag).
- Bepaal het maximum van de functie die je bij vraag b hebt gegeven.