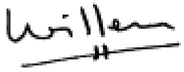
Telproblemen voor 4 HAVO wiskunde A

In het schoolexamen 2 van 4 HAVO wiskunde A zijn de opgaven over de telproblemen (hoofdstuk 4) erg slecht gemaakt. Dat moet beter kunnen, zou ik denken…



Ik bespreek hier een aantal telproblemen. Ik zal steeds proberen zoveel mogelijk aandacht te besteden aan de vraag hoe je de opgave aan moet pakken, welk soort telprobleem het is en hoe je kan zien wat je moet doen[1].

Schema

		Met herhaling?	
		Nee	**Ja**
Is de volgorde van belang?	**Ja**	**Permutaties** $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ faculteitsboom	**Rangschikkingen met herhaling** $aantal = n^k$ machtsboom
	Nee	**Combinaties** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ ja-nee rooster	

Bovenstaand schema kan je helpen bij het bepalen van het soort telprobleem en de berekening van het aantal mogelijkheden[2].

Voorbeelden

Opgave 1

Je gooit 3 keer met een euro (kop of munt). Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er?

Uitwerking

Bij de 1e keer gooien zijn er 2 mogelijkheden, bij de 2e keer zijn er 2 mogelijkheden en bij de 3de keer gooien zijn er twee mogelijkheden. Dus er zijn in totaal $2^3 = 8$ mogelijke uitkomsten. Je kunt hierbij aan een machtsboom denken. Het is een telprobleem waarbij de volgorde van belang is en met herhaling, het is een rangschikking met herhaling. Dus een macht…

---

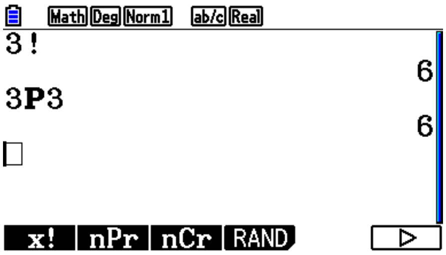
[1] Gebaseerd op de telproblemen uit:
- Overzicht telproblemen 4 HAVO wiskunde D hoofdstuk 1
- Voorbeelden telproblemen 4 VWO wiskunde D

[2] ZIe wiskundeleraar.nl

Opgave 2
Bij een vereniging worden 3 mensen (A, B en C) in het bestuur gekozen die de functie van voorzitter, penningmeester en secretaris moeten vervullen. Op hoeveel manieren kan men deze 3 functies over deze 3 mensen verdelen?

Uitwerking
Je hebt 3 mensen en 3 functies. Bij de 1^e mens kan je kiezen uit 3, bij de 2^e uit 2 en bij de 3^e uit 1. Je kunt de functies op $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ manieren verdelen over deze 3 mensen. Je kunt ook zeggen dat het een telprobleem is zonder herhaling waarbij de volgorde belangrijk is. Het is een permutatie van 3 uit 3. Dat is $3! = 6$ of zelfs (als je wilt): $(3)_3 = \frac{3!}{0!} = 6$

GR



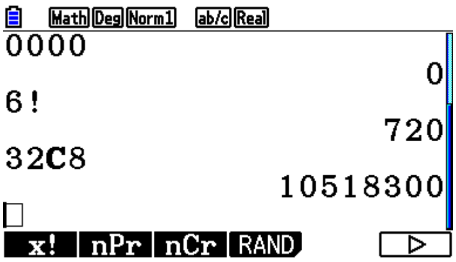
Opgave 3
Op hoeveel manieren kan je 6 verschillende 'dingen' op een volgorde zetten?

Uitwerking
De volgorde is van belang en het is zonder herhaling. Het is een permutatie. Dus het aantal manieren is gelijk aan $6! = 720$.

Opgave 4
Op hoeveel manieren kan je 8 kaarten kiezen uit een spel van 32 kaarten als je niet op de volgorde let?

Uitwerking
De volgorde is niet belangrijk. Het is zonder herhaling. Dus combinaties. Het aantal mogelijk manieren is gelijk aan $\binom{32}{8} = 10.518.300$.

GR



Opgave 5
Als je 4 dingen kiest uit 10 verschillende dingen, hoeveel volgorden kan je dan maken?

Uitwerking
't Is zonder herhaling en de volgorde is van belang. Dit is een permutatie van 4 uit 10. Het aantal volgorden is gelijk aan $(10)_4 = 5.040$.

Opgave 6
Op hoeveel manieren kan je 10 nummers kiezen uit een lijst van 100 als daarbij de volgorde niet belangrijk is?

Uitwerking
De volgorde is niet van belang en 't is zonder herhaling. Dat is een combinatie van 10 uit 100. Het aantal manieren is $\binom{100}{10} = 17.310.309.456.440$.

Opgave 7
In een klas zitten 12 jongens en 17 meisjes. Er wordt een comité gevormd van 5 leerlingen met 3 jongens en 2 meisjes. Op hoeveel manieren kan dat?

Uitwerking
Je moet 3 jongens kiezen uit 12 en 2 meisjes uit 17. Zonder herhaling en de volgorde is niet van belang. Het gaat hier om combinaties.
Het aantal manieren is $\binom{12}{3} \cdot \binom{17}{2} = 29.920$.

Opgave 8
In een klas zitten 12 jongens en 17 meisjes. Er wordt een comité gevormd van 5 leerlingen met minstens 4 jongens. Op hoeveel manieren kan dat?

Uitwerking
Zonder herhaling en de volgorde is niet van belang. Dus combinaties. Er zijn twee mogelijkheden: 4 jongens en 1 meisje of 5 jongens.
Het aantal manieren is $\binom{12}{4} \cdot \binom{17}{1} + \binom{12}{5} = 9.207$.

Opgave 9
Een winkel heeft twee uitstalramen. Er moeten zes kledingstukken geëtaleerd worden. Op hoeveel manieren kan men deze kledingstukken etaleren als er in elk uitstalraam ten minste twee kledingstukken moeten hangen?

Uitwerking
Er zijn 3 mogelijke verdelingen te bedenken: 2 links en 4 rechts of 3 links en 3 rechts of 4 links en 2 rechts. 't Is steeds zonder herhaling en de volgorde doet er niet toe. Het zijn dus steeds combinaties.

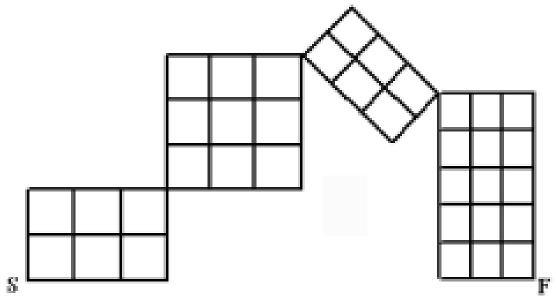
Het aantal manieren is $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} = 50$

Opgave 10
Hoeveel rangschikkingen kan je maken met de letters van het woord 'KANSBEREKENEN'?

Uitwerking
Er zijn 13 letters. Daarmee kan je 13! permutaties maken, maar dezelfde letters zijn uitwisselbaar. De 'E' komt 4 keer voor, de 'K' komt 2 keer voor en de 'N' komt 3 keer voor. De rest van de letters komt 1 keer voor.

Het aantal rangschikkingen is gelijk aan $\frac{13!}{4!\cdot 2!\cdot 3!} = 21.621.600$.

Opgave 11
Bereken het aantal kortste routes van S naar F.



Uitwerkingen
Bij het eerste rechthoekje. Je neemt 5 stappen en je moet 3 keer naar rechts en 2 keer omhoog. Er zijn dan $\binom{5}{3} = 10$ kortste routes. Idem voor de rest.

In totaal zijn er $\binom{5}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{8}{5} = 112.000$ kortste routes.

Opgave 12
Op hoeveel manieren kan je 5 wiskundeboeken en 3 scheikundeboeken rangschikken als de wiskundeboeken naast elkaar moeten staan?

Uitwerking
Beschouw de 5 wiskundeboeken als 1 boek. Je hebt dan 1 wiskundeboek en 3 scheikundeboeken. Er zijn 4 mogelijke rangschikkingen. De wiskundeboeken kan je onderling verwisselen (dat kan op 5! manieren) en de scheikundeboeken kan je onderling ook nog verwisselen.
Er zijn $4 \cdot 5! \cdot 3! = 2.880$ rangschikkingen.

Opgave 13
Op hoeveel manieren kan je 5 wiskundeboeken en 3 scheikundeboeken rangschikken als de wiskundeboeken en de scheikundeboeken naast elkaar moeten staan?

Uitwerking
Beschouw de 5 wiskundeboeken als 1 boek en de 3 scheikundeboeken ook als 1 boek. Er zijn dan 2 mogelijke rangschikkingen. Je kunt de wiskundeboeken en scheikunde boeken nog wel onderling verwisselen.

Het aantal rangschikkingen is $2 \cdot 5! \cdot 3! = 1.440$.

Opgave 14
Hoeveel rijtjes kan je maken met 4 A's, 3 B's en 6 C's?

Uitwerking
Er zijn 13 letters, dus 13 permutaties. Je kunt echter dezelfde letters onderling nog verwisselen. Het aantal rijtjes is $\frac{13!}{4! \cdot 3! \cdot 6!} = 60.060$.

Opgave 15
Op hoeveel manieren kan je met drie dobbelstenen totaal zeven ogen gooien?

Uitwerking
Een kwestie van handig uitschrijven:

- 1-1-5 kan op 3 manieren
- 1-2-4 kan op 6 manieren
- 1-3-3 kan op 3 manieren
- 2-2-3 kan op 3 manieren

In totaal op 15 manieren

EINDE