EXPERIMENT TAAKGERICHTE INSTRUCTIE

Les 1 voorkennis, raaklijnen en toppen

HML – maart 2016

INHOUD

- Voorkenis
- Voorkennis
  - Het differentiequotiënt
  - Snelheid en richtingscoëfficiënt
  - Hellingsgrafiek en afgeleide functie
  - Regels voor de afgeleide
  - Machtsfuncties
- Raaklijnen en toppen
  - Formule van raaklijn met behulp van de afgeleide
  - Raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt
  - Extreme waarden berekenen met behulp van de afgeleide
  - Aantonen van extreme waarden

HET DIFFERENTIEQUOTIËNT

Het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$ is:

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (ook wel helling) van de lijn AB
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op het interval $[a, b]$ is gelijk aan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

SNELHEID EN RICHTINGSCOËFFICIËNT

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$$ is:

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A
- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$

HELLINGSGRAFIEK EN AFGELEIDE FUNCTIE

- Bij een **dalend** deel van de grafiek van f horen **negatieve** hellingen, de hellingsgrafiek ligt daar onder de x-as
- In een **top** van de grafiek van f is de helling **nul**. De hellingsgrafiek snijdt de x-as.
- Bij een **stijgend** deel van de grafiek van f horen **positieve** hellingen, dus de hellingsgrafiek ligt daar boven de x-as,.

REGELS VOOR DE AFGELEIDE

- De afgeleide van $f(x) = a$ is gelijk aan $f'(x) = 0$
- De afgeleide van $f(x) = ax$ is gelijk aan $f'(x) = a$
- De afgeleide van $f(x) = ax^2$ is gelijk aan $f'(x) = 2ax$
- ...

$$f(x) = x^n \xrightarrow{\text{afgeleide}} f'(x) = nx^{n-1}$$

VANDAAG

- Formule van raaklijn met behulp van de afgeleide
- Raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt
- Extreme waarden berekenen met behulp van de afgeleide

VOORBEELD 1

- Geef een vergelijking voor de raaklijn aan $f(x)=2x^3$ in het punt (1,2).

VOORBEELD 1

- Geef een vergelijking voor de raaklijn aan $f(x)=2x^3$ in het punt (1,2).
- Wat is de afgeleide?

VOORBEELD 1

- Geef een vergelijking voor de raaklijn aan $f(x)=2x^3$ in het punt (1,2).
- Wat is de afgeleide?
- De afgeleide is $f'(x)=6x^2$

VOORBEELD 1

- Geef een vergelijking voor de raaklijn aan $f(x)=2x^3$ in het punt (1,2).
- Wat is de afgeleide?
- De afgeleide is $f'(x)=6x^2$
- Invullen van $x=1$ geeft $a=6$

VOORBEELD 1

- Geef een vergelijking voor de raaklijn aan $f(x)=2x^3$ in het punt (1,2).
- Wat is de afgeleide?
- De afgeleide is $f'(x)=6x^2$
- Invullen van $x=1$ geeft $a=6$
- De raaklijn $y=6x+b$

VOORBEELD 1

- Geef een vergelijking voor de raaklijn aan $f(x)=2x^3$ in het punt (1,2).
- Wat is de afgeleide?
- De afgeleide is $f'(x)=6x^2$
- Invullen van $x=1$ geeft $a=f'(1)=6$
- De raaklijn $y=6x+b$
- Invullen van (1,2) geeft: $2=6\cdot 1+b$ en dat geeft $b=-4$
- De raaklijn wordt: $y=6x-4$

VOORBEELD 2

- Geef de vergelijking van de raaklijn aan $f(x)=-3x^2+4x+5$ in het punt $(3, -10)$

VOORBEELD 2

- Geef de vergelijking van de raaklijn aan $f(x)=-3x^2+4x+5$ in het punt $(3, -10)$

- Bepaal de afgeleide
- Vul in $x=3$ en vindt $a=\ldots$
- Vul $(3,-10)$ in in $y=ax+b$ en vindt $b=\ldots$
- Geef de vergelijking!

VOORBEELD 2

- Geef de vergelijking van de raaklijn aan $f(x)=-3x^2+4x+5$ in het punt $(3,-10)$
- $f'(x)=-6x+4$
- $a=f'(3)=-6 \cdot 3+4=-14$
- $-10=-14 \cdot 3+b$ dus $b=32$
- $y=-14x+32$

ZELF DOEN!

Voorbeeld 1 en 2

Gegeven: $f(x) = -x^2 + 4x$

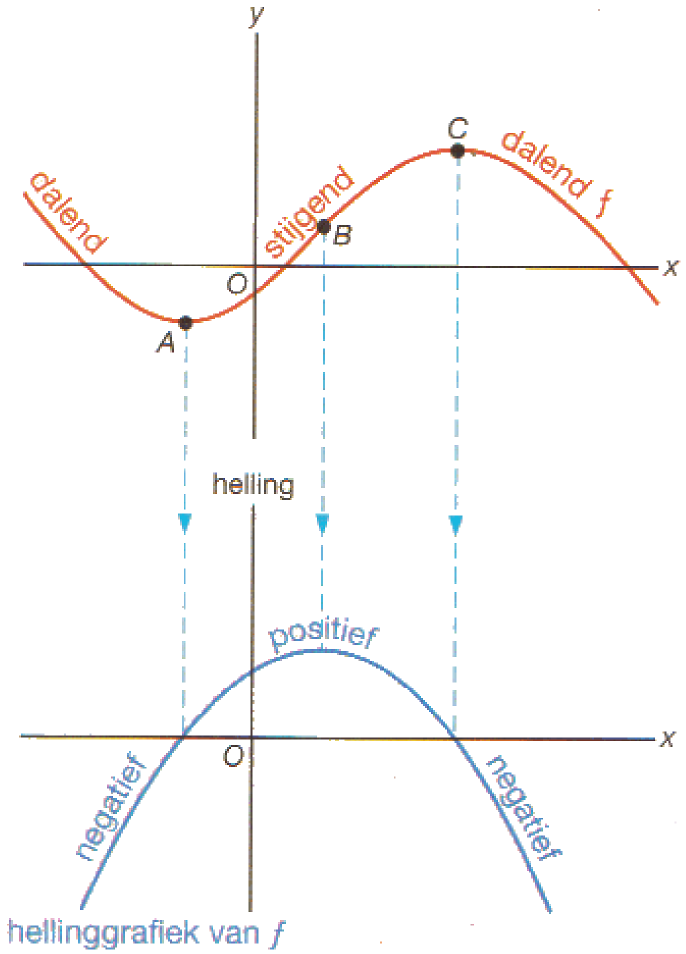
a) Geef de vergelijking van de raaklijn aan f in het punt A(1,3)

b) De lijn k raakt f in O(0,0) en de lijn m raakt in C(4,0). Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en m.

c) De lijn $n: y = 4x + b$ raakt de grafiek van f. Bereken b.

EXTREME WAARDEN BEREKENEN

- Bij extreme waarden loopt de raaklijn horizontaal.
- Dat betekent dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn nul is…



EXTREMEN WAARDEN BEREKENEN

Voorbeeld 1

Gegeven $f(x) = x^4 - 50x^2 + 544$, bepaal de extreme waarden van f.

- Bepaal de afgeleide
- Stel de afgeleide nul
- Los de vergelijking op
- Mogelijke kandidaten controleren
- Is het maximum, minimum of een buigpunt…

Voorbeeld 1

Gegeven $f(x) = x^4 - 50x^2 + 544$, bepaal de extreme waarden van f.

Bepaal f':

$f'(x) = 4x^3 - 100x$

Los de vergelijking $f'(x) = 0$ op:

$$4x^3 - 100x = 0$$

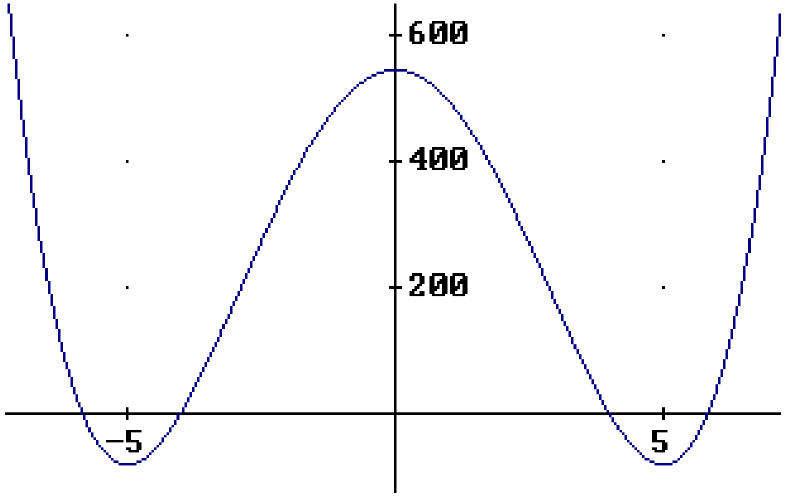
$$4x\left(x^2 - 25\right) = 0$$

$$4x = 0 \vee x^2 - 25 = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 = 25$$

$$x = 0 \vee x = -5 \vee x = 5$$

Maak een schets:



- Het minimum bij $x = -5$ is -81.
- Het maximum bij $x = 0$ is 544.
- Het minimum bij $x = 5$ is -81.

VOORBEELD 2

Gegeven $g(x) = x^4 - 4x^3$, bepaal de extreme waarden van g.

$g'(x) = 4x^3 - 12x^2$

Los de vergelijking $g'(x) = 0$ op:

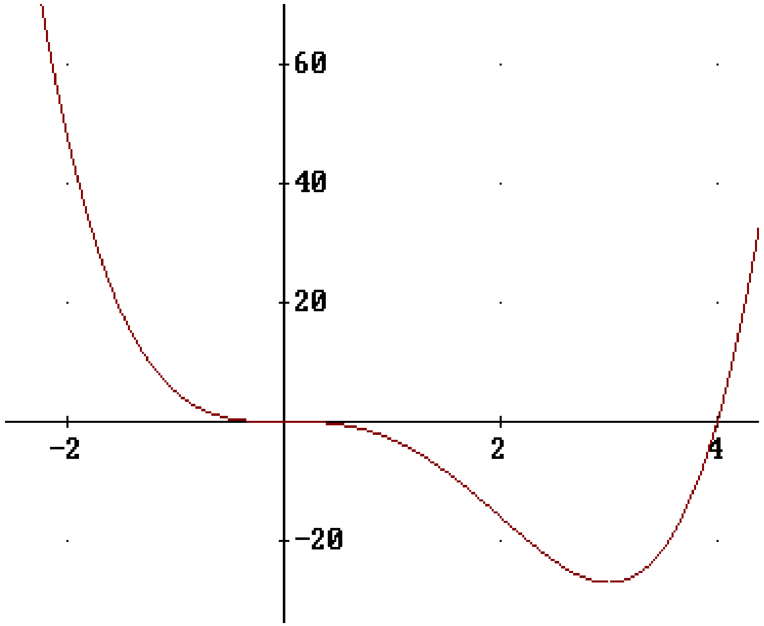
$4x^3 - 12x^2 = 0$

$4x^2\left(x-3\right) = 0$

$4x^2 = 0 \vee x - 3 = 0$

$x = 0 \vee x = 3$

Maak een schets:



- Het minimum bij $x = 3$ is $g(3) = -27$.

Bij $x = 0$ is iets anders aan de hand. Dat heet **buigpunt**.

ZELF DOEN!

- Gegeven

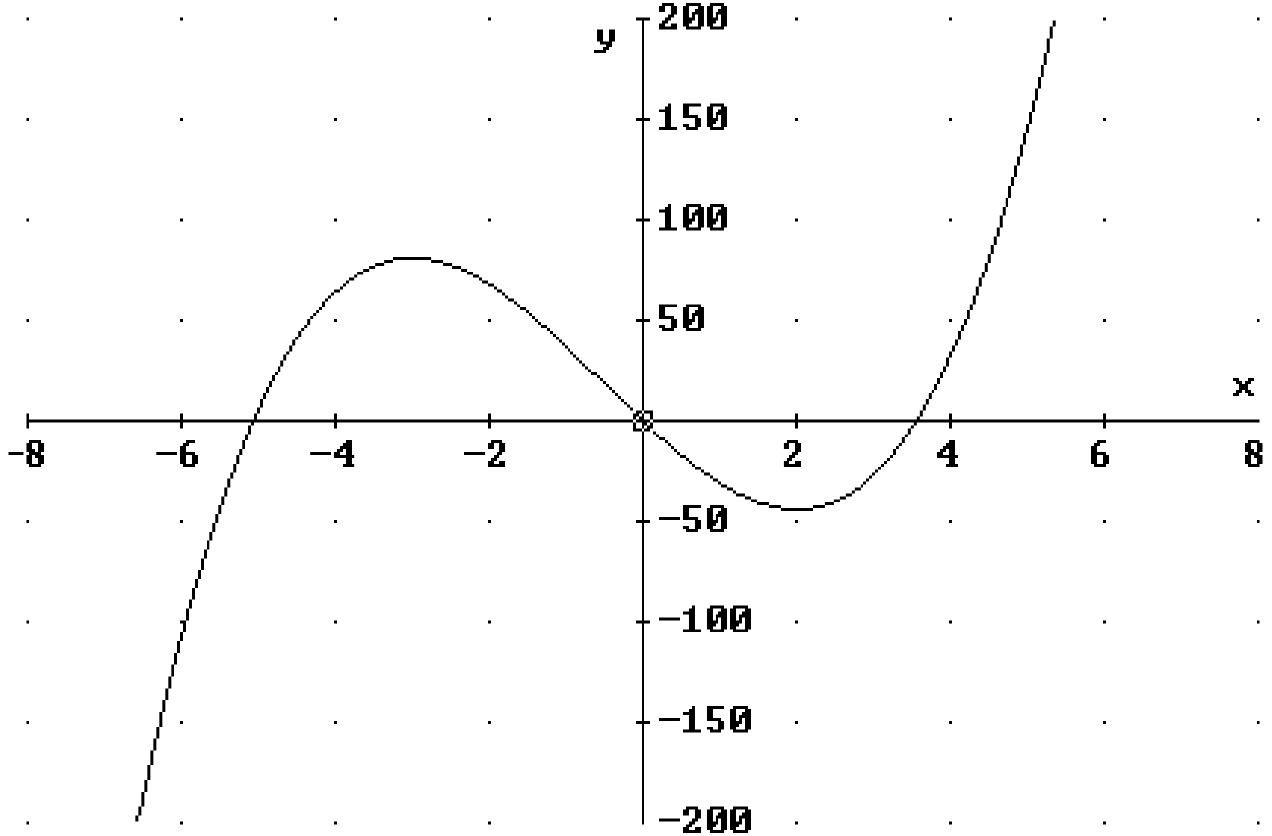
  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$
- Bereken de extreme waarden van f.

UITGEWERKT

- $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$
- $f'(x) = 0$ dus
  $6x^2 + 6x - 36=0$
  $x^2 + x - 6 = 0$
  $(x + 3)(x - 2) = 0$
  $x = -3$ of $x = 2$

Zie de grafiek!

- Maximum: $f(-3) = 81$
- Minimum: $f(2) = -44$



EINDE

- Als het goed is kan je nu:
  - Formule van de raaklijn opstellen met behulp van de afgeleide.
  - Extreme waarden berekenen met behulp van de afgeleide.