



exponentiële verbanden

1. voorkennis

Procenten en vermenigvuldigingsfactoren Procentuele toename met $p\%$: $g = 1 + \frac{p}{100}$ $p = (g - 1) \cdot 100$ Procentuele afname met $p\%$: $g = 1 - \frac{p}{100}$ $p = (1 - g) \cdot 100$ Vuistregels: ✓ Geef kleinere geldbedragen in centen nauwkeurig. ✓ Geef procenten in één decimaal nauwkeurig (tenzij anders vermeld) ✓ Geef NIEUW en oud in dezelfde nauwkeurigheid. Bij een toename van 15% hoort een vermenigvuldigingsfactor van 1,15 NIEUW = $1,15 \times \text{oud}$ Bij een afname van 15% hoort een vermenigvuldigingsfactor van 0,85. NIEUW = $0,85 \times \text{oud}$ ✓ Rekenen met procenten en groeifactoren	De constante factor In 1859 werden door een Engelsman 24 wilde konijnen ingevoerd in Australië voor de plezierjacht. De natuurlijke vijand van het konijn ontbrak in Australië en er ontstond een ware konijnenplaag. Neem aan dat het aantal konijnen elk jaar met 12,3% toe nam. ✓ Hoeveel konijnen waren er in 2000?  Uitwerking ✓ $N(2000) = 24 \cdot 1,123^{141} \approx 304.618.920$ Dat zijn dan ongeveer 300 miljoen konijnen.
Procent op procent Een hoeveelheid neemt in de periode 2000-2010 toe met 15% en in periode 2010-2015 toe met 20%. De toename in de periode 2000-2015 bereken je dan als volgt: $\text{Toename} = 1,15 \cdot 1,20 = 1,38$ De toename in de periode 2000-2015 is 38%.	Voorbeeld 1 Je zet 500 euro op de bank tegen een rente van 5% per jaar. ✓ Hoeveel is je banktegoed na 50 jaar? Uitwerking De groeifactor is 1,05. Het startbedrag is 500 euro. Na 50 jaar heb je: $B = 500 \cdot 1,05^{50} \approx 5734$ Het tegoed is ongeveer 5734 euro.

2. twee soorten groei

Twee soorten groei

Lineaire groei:

- ✓ hoeveelheid neemt per tijdeenheid toe of af met een constante hoeveelheid.
- ✓ Formule: $N = at + b$
- ✓ De grafiek is een rechte lijn.

Exponentiële groei:

- ✓ de hoeveelheid neemt per tijdeenheid toe of af met een constante groeifactor
- ✓ Formule: $N = b \cdot g^t$

Zie ook **Rekenen met procenten en groeifactoren**

Groeipercantage en groeifactor

Bij een groei met 12% hoort een groeifactor van 1,12.
Bij een afname van 17% hoort een groeifactor van 0,83.

Bij een groeifactor van 1,012 hoort een toename van 1,2% en bij een groeifactor van 0,32 hoort een afname van 68%.

$$g = 1 + \frac{p}{100}$$

Formule opstellen

Uit een bak met 50 liter water lekt per uur 2% weg.
De formule wordt dan:

$$H = 50 \cdot 0,98^t$$

H : hoeveel water in liter

t : tijd in uur

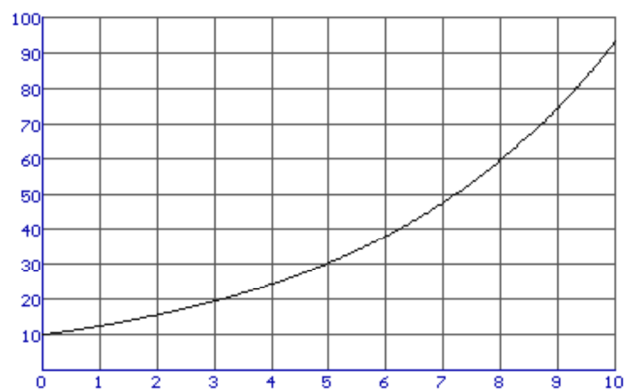
Exponentiële groei herkennen

Om aan te tonen dat er sprake is van exponentiële groei moet je laten zien dat de groeifactor per tijdeenheid constant is.

tijd in minuten	2	5	10	20
aantal	94	175	491	3895

- ✓ **formule voor exponentiële groei**

Exponentiële toename



welke formule hoort er bij deze grafiek?

antwoord

3. exponentiële groeiformules

Groeipercents omzetten naar een andere tijdseenheid

Als g de groeifactor is per tijdseenheid dan is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n . Dat geldt ook voor niet-gehele n .

Als de groeifactor **per uur** bijvoorbeeld 1,25 is dan is de groeifactor:

- ✓ per 3 uur: $1,25^3$
- ✓ per dag: $1,25^{24}$
- ✓ per half uur: $1,25^{\frac{1}{2}}$
- ✓ per minuut: $1,25^{\frac{1}{60}}$

Het omrekenen van een groeipercents naar een andere tijdseenheid doe je met **groeifactoren**.

Een hoeveelheid neemt toe met 2,5% per uur. Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid toe per dag?

De groeifactor per dag: $1,025^{24} \approx 1,809$

De hoeveelheid neemt toe met 80,9% per dag.

Exponentiële verbanden

In 1859 werden door een Engelsman 24 wilde konijnen ingevoerd in Australië voor de plezierjacht. De natuurlijke vijand van het konijn ontbrak in Australië en er ontstond een ware konijnenplaag. In 2000 waren er ruim 300 miljoen konijnen. Als we veronderstellen dat de groei exponentieel verliep, bepaal dan het groeipercents per jaar.

De groeifactor per 141 jaar is:

$$\frac{300.000.000}{24}$$

De groeifactor per jaar is:

$$\left(\frac{300.000.000}{24}\right)^{\frac{1}{141}} \approx 1,122878315...$$

Het groeipercents per jaar is 12,3% per jaar.

Een formule opstellen bij exponentiële groei

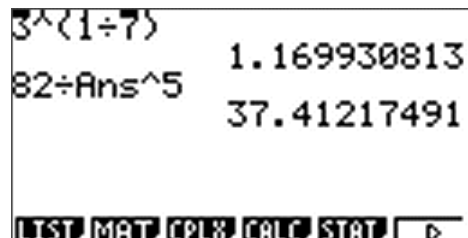
Als je bij exponentiële groei op twee tijdstippen de hoeveelheid kent dan kan je een formule opstellen.

Voorbeeld

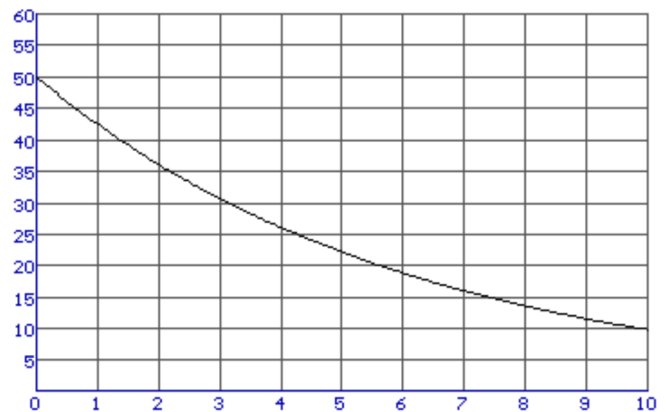
Is $N=82$ voor $t=5$ en $N=246$ voor $t=12$ dan:

- ✓ groeifactor per 7 uur: $\frac{246}{82}=3$
- ✓ groeifactor per uur: $3^{\frac{1}{7}} \approx 1,170$
- ✓ Formule: $N = b \cdot 1,170^t$
Vul in: $t = 5$ en $N = 82$
 $b \cdot 1,170^5 = 82$
Oplossen geeft $b = 37$
✓ $N = 37 \cdot 1,170^t$

Denk aan de haakjes bij de rekenmachine...



Exponentiële afname



welke formule hoort er bij deze grafiek?

antwoord

4. rekenen met logaritmen

Rekenregels voor logartimen Hoofdregel: ${}^g \log(x) = y \Leftrightarrow g^y = x$ Hieruit volgt: $g^{{}^g \log(x)} = x$ Daarmee kan je de volgende regels aantonen: ${}^g \log(a) + {}^g \log(b) = {}^g \log(ab)$ ${}^g \log(a) - {}^g \log(b) = {}^g \log(\frac{a}{b})$ $n \cdot {}^g \log(a) = {}^g \log(a^n)$ ${}^g \log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ Voorbeeld: $5 + 3 \cdot {}^2 \log(3) - {}^2 \log(100) =$ ${}^2 \log(2^5) + {}^2 \log(3^3) - {}^2 \log(100) =$ ${}^2 \log(\frac{32 \cdot 27}{100}) = {}^2 \log(8 \frac{16}{25})$	Logaritmische vergelijkingen Je kunt de rekenregels voor logaritmen gebruiken om logaritmische vergelijkingen op te lossen. Voorbeeld ${}^2 \log(x-2) + {}^2 \log(x) = 3$ ${}^2 \log(x(x-2)) = 3$ $x(x-2) = 2^3$ $x^2 - 2x = 8$ $x^2 - 2x - 8 = 0$ $(x+2)(x-4) = 0$ $x = -2$ (v.n.) of $x = 4$ $x = 4$ ✓ twee voorbeelden
Overgaan op een ander grondtal Op de CASIO kan je met de functie logab logaritmen invoeren met een ander grondtal dan 10. Als je die functie niet hebt dan kan je gebruik maken van de volgende regel: ${}^g \log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ Voorbeeld ${}^2 \log(12) = \frac{\log(12)}{\log(2)} \approx 3,584...$	Logaritmen en de grafische rekenmachine Denk bij het invoeren van je functievoorschriften aan de juiste vorm...GR?!  ✓ Invoeren van logaritmische functies

De logaritmische functie

$$f(x) = {}^g \log ax + b$$

Deze functies zijn standaardfuncties en de bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken.

Om het domein te berekenen van de functie

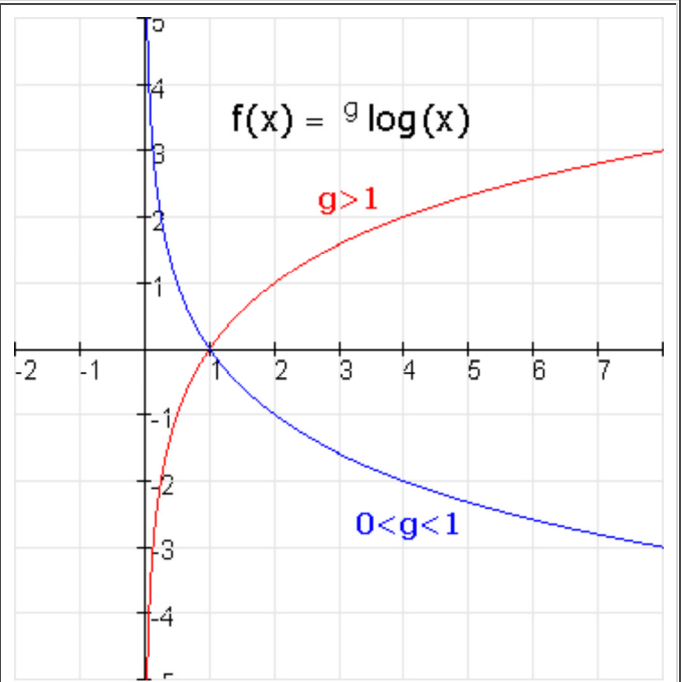
$f(x) = {}^3 \log 2x + 5$ los je de ongelijkheid $2x + 5 > 0$ op. Je krijgt $x > -2\frac{1}{2}$ dus:

$$\checkmark D_f = < -2\frac{1}{2}, \rightarrow >$$

Uit het domein volgt dat de verticale asymptoot van de grafiek van f de lijn $x = -2\frac{1}{2}$ is.

Afspraak

Bij het schetsen of tekenen van de grafiek van een logaritmische functie bereken je eerst het domein. Je tekent de verticale asymptoot als stippellijn in de figuur en zet de formule erbij.



Verdubbelingstijd en halveringstijd

De verdubbelingstijd bij exponentiële groei is de tijd waarin de hoeveelheid verdubbeld.

Bij groeifactor g bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $g^T = 2$ op te lossen.

Bij exponentiële afname is de halveringstijd de tijd waarin de hoeveelheid gehalveerd wordt.

Bij groeifactor g bereken je de halveringstijd T door de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Voorbeeld 1

Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 13,1% toe.

- ✓ Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Een hoeveelheid neemt wekelijks met 8,5% af.

- ✓ Bereken de halveringstijd in dagen nauwkeurig.

Zie **uitwerking**

rekenregels logaritmen

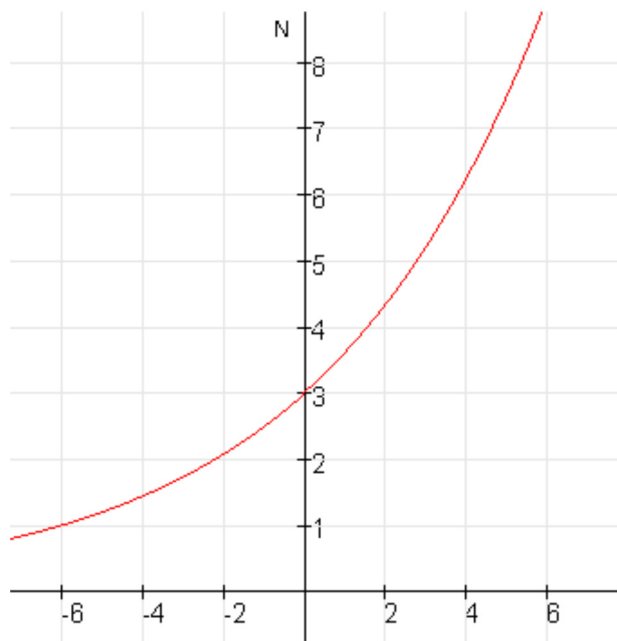
5. formules omwerken

Exponentiële formules omwerken Je kunt: $N = b \cdot g^t$ schrijven als: $\log(N) = pt + q$ Voorbeeld $N = 3 \cdot 1,2^t$ $\log(N) = \log(3 \cdot 1,2^t)$ $\log(N) = \log(3) + \log(1,2^t)$ $\log(N) = \log(3) + t \cdot \log(1,2)$ $\log(N) = \log(1,2) \cdot t + \log(3)$ <i>benaderd :</i> $\log(N) = 0,079 \cdot t + 0,477$	Machtsformules omwerken Je kunt: $y = ax^n$ schrijven als: $\log(y) = p + q \cdot \log(x)$ Voorbeeld $y = 50 \cdot x^5$ $\log(y) = \log(50 \cdot x^5)$ $\log(y) = \log(50) + \log(x^5)$ $\log(y) = \log(50) + 5 \cdot \log(x)$ <i>benaderd :</i> $\log(y) = 1,699 + 5 \cdot \log(x)$
Formule met logaritmen omwerken (1) Je kunt bovenstaande omzetting ook in omgekeerde volgorde doen: $\log(N) = 0,2t + 3,1$ $N = 10^{0,2t+3,1}$ $N = 10^{0,2t} \cdot 10^{3,1}$ $N = 10^{3,1} \cdot (10^{0,2})^t$ <i>benaderd :</i> $N = 1259 \cdot 1,585^t$	Formule met logaritmen omwerken (2) Je kunt bovenstaande omzetting ook in omgekeerde volgorde doen: $\log(K) = 2,8 + 4,9 \cdot \log(L)$ $\log(K) = \log(10^{2,8}) + \log(L^{4,9})$ $\log(K) = \log(10^{2,8} \cdot L^{4,9})$ $K = 10^{2,8} \cdot L^{4,9}$ <i>benaderd :</i> $K = 631 \cdot L^{4,9}$

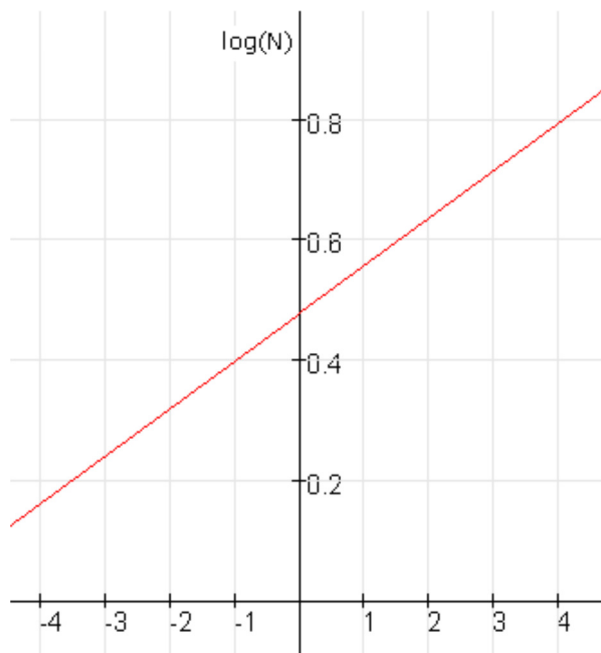
Logaritmen uitzetten op de assen

Je ziet hieronder de grafiek van:

$$N = 3 \cdot 1,2^t$$



Als je voor de **verticale as** niet N zet maar $\log(N)$ krijg je deze grafiek:

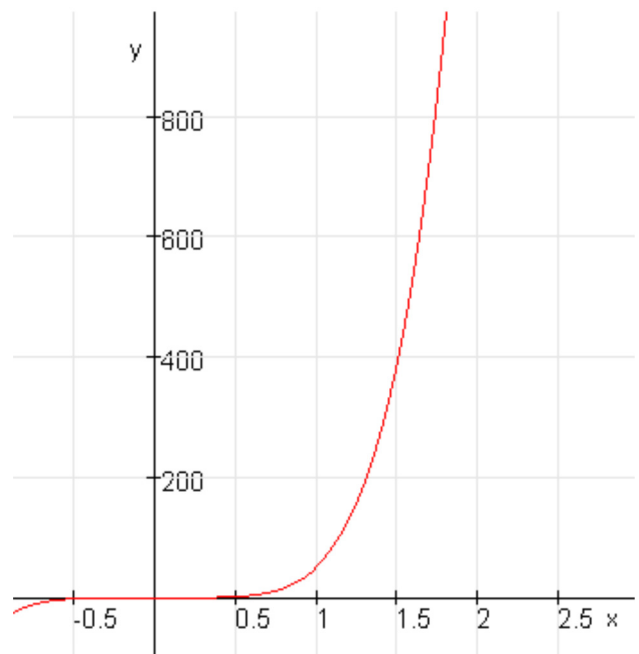


De grafiek is dan een **rechte lijn**.

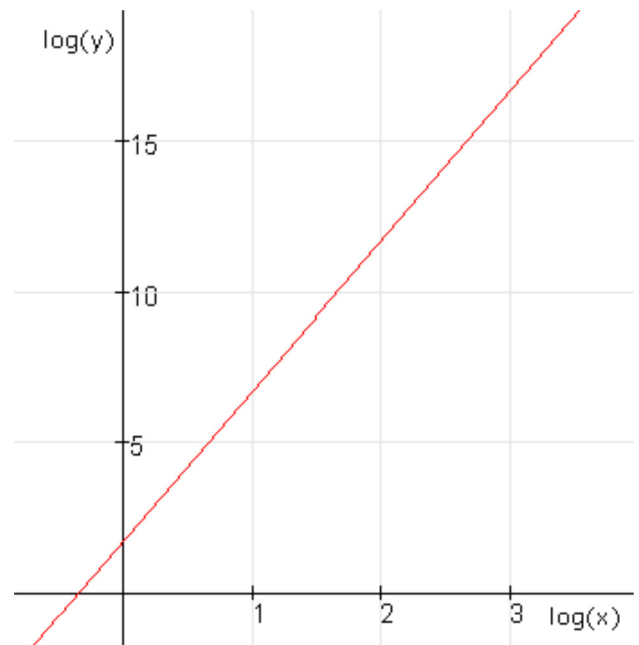
Logaritmen uitzetten op de assen

Je ziet hieronder de grafiek van:

$$y = 50 \cdot x^5$$



Als je op de **verticale as** niet N zet maar $\log(N)$ en op **horizontale as** niet x maar $\log(x)$ krijg je deze grafiek:



De grafiek is dan een **rechte lijn**.

Als je onderzoek doet waarbij je een onbekend verband tegen komt dan kan je je **meetpunten** op enkel of dubbellogaritmisch papier tekenen, zoals hierboven. Misschien dat je er op die manier er achter komt dat je te maken hebt met een **exponentieel-** of **machtsverband**.

5. Logaritmische schaal