

Hoofdstuk 4 – Programmeren met de GR

Toevoegen: een inleiding op het programmeren met de GR

Hoofdstuk 5 - Numerieke methoden

“Numerieke wiskunde is een deelgebied van de wiskunde waarin algoritmes voor problemen in de continue wiskunde bestudeerd worden (in tegenstelling tot discrete wiskunde). Dit betekent dat het vooral gaat over reële of complexe variabelen, de oplossing van differentiaalvergelijkingen en andere vergelijkbare problemen die optreden in de natuurkunde en techniek.”

http://nl.wikipedia.org/wiki/Numerieke_wiskunde

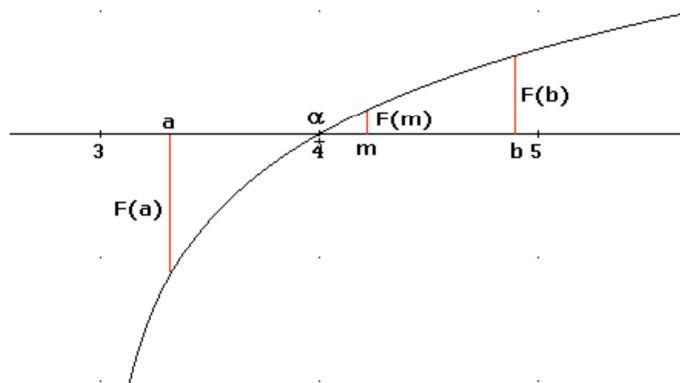
Het oplossen van vergelijkingen

Voor het benaderen van oplossingen van vergelijkingen van de vorm $F(x)=0$ bespreken we een aantal methoden:

- Halveringsmethode
- De methode van Newton-Raphson
- Regula Falsi

Halveringsmethode

Een andere methode is de **halveringsmethode** of **bisectiemethode**. Het principe is heel eenvoudig en de methode is gemakkelijk op een computer te implementeren.



Als F continu is $[a,b]$ en als $F(a) \times F(b) < 0$, dan heeft F minstens één nulpunt in $[a,b]$. We veronderstellen dat er ook hoogstens één nulpunt is.

Je berekent dan $m = \frac{a+b}{2}$ en bereken $F(m)$.

Er zijn nu drie mogelijkheden:

- Als $F(m)=0$ dan hebben α gevonden en zijn we dus klaar.
- Als $F(a) \times F(m) < 0$ dan neem $b=m$ en herhaal het proces.
- Als $F(a) \times F(m) > 0$ dan neem $a=m$ en herhaal het proces.

We stoppen als $|a-b| < \varepsilon$

We noemen dit de **halveringsmethode** of **bisectiemethode**.

Voorbeeld

Bepaal $\sqrt{2}$

Uitgewerkt:

$\sqrt{2}$ is de positieve wortel van de vergelijking $F(x)=x^2-2=0$. We kiezen $a=1$ en $b=2$. Op de manier zoals hierboven besproken krijgen we:

n	a	b	x	x^2-2
0	1	2	1,5	0,25
1	1	1,5	1,25	-0,4375
2	1,25	1,5	1,375	-0,10938
3	1,375	1,5	1,4375	0,066406
4	1,375	1,4375	1,40625	-0,02246
5	1,40625	1,4374	1,421825	0,021586
6	1,40625	1,421825	1,414038	-0,0005
7	...	...	...	...

$$\sqrt{2} \approx 1,414...$$

Dit lijkt omslachtig maar met een computer is het aantal stappen geen probleem. De zekerheid dat het een eindig proces dat zeker een oplossing geeft is veel waard.

Opdracht 1

- Los de vergelijking $xe^{2x}=1$ op m.b.v. de halveringsmethode. Neem $a=0$ en $b=1$ en bereken minimaal 6 stappen.

Opdracht 2

- Los de vergelijking $xe^{2x}=1$ op m.b.v. je grafische rekenmachine. Vergelijk deze oplossing met de oplossing van vraag a.

Successieve substitutie 1

De andere twee methoden voor het oplossen van $F(x)=0$ komen er op neer dat je de vergelijking herschrijft in de vorm $x=f(x)$ die overeenkomt met $F(x)=0$. Dat wil zeggen dat een oplossing van $x=f(x)$ ook een oplossing is van $F(x)=0$ en omgekeerd.

Je bepaalt dan een ruwe schatting x_0 voor de oplossing en je berekent vervolgens:

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1)$$

...

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Dit herhalen van hetzelfde proces heet **itereren**. Het gaat dus om een **iteratief proces**. Je hoopt dan dat de rij $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ snel naar een limiet nadert. Deze limiet is dan (zie onderstaande stelling) een oplossing van $x=f(x)$ en dus ook van $F(x)=0$.

Stelling 1

Als de rij $\{x_n\}$ de limiet α heeft en f is continu, dan is $x=\alpha$ een oplossing van $x=f(x)$.

De methode van Newton-Raphson

De methode van **Newton-Raphson**, ook bekend als de methode van Newton, is een numeriek algoritme om de nulpunten van een functie te bepalen. Je kunt dit gebruiken voor functies die differentieerbaar zijn en waarvan de afgeleide bekend is.

Voorbeeld

Gegeven $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$. We willen graag de coördinaten weten van het meest rechtse nulpunt. We stellen vast $f'(x)=3x^2-12x+9$.

- Als startpunt kiezen we $x_1=4$.
- Met $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ berekenen we de volgende term.
- Dit proces herhalen we tot x_n (tot het aantal gewenste/mogelijke decimalen) niet meer verandert.

Met de **grafische rekenmachine**:

Plot1 Plot2 Plot3 $\backslash Y_1 \equiv X^3-6X^2+9X-1$ $\backslash Y_2 \equiv 3X^2-12X+9$ $\backslash Y_3 =$ $\backslash Y_4 =$ $\backslash Y_5 =$ $\backslash Y_6 =$	4 $\text{Ans}-Y_1(\text{Ans})/Y_2(\text{Ans})$	$\text{Ans}-Y_1(\text{Ans})/Y_2(\text{Ans})$ 3.666666667 3.548611111 3.532390162 3.532088989 3.532088886
--	---	---

Na 5 'slagen' hebben we een benadering gevonden voor het nulpunt.
 $x \approx 3,532088886$

Opdracht 3

- Maak gebruik van de functie en het algoritme van het voorbeeld met als startwaarde $x_1=2$. Krijg je nu de waarde van het 'middelste nulpunt'?
- Neem als startwaarde $x_1=0$. Krijg je nu waarde van het 'linker nulpunt'?
- Neem als startwaarde $x_1=100$. Na hoeveel slagen krijg je
 $x \approx 3,532088886$

Opdracht 4

- De functie $f(x) = \cos(x-1)$ heeft bij $x \approx 2,5$ een nulpunt. Benader dit nulpunt met de methode van Newton op 6 decimalen nauwkeurig.

Opdracht 5

- De functie $f(x) = \ln(x+3)+1$ heeft bij $x \approx -2,6$ een nulpunt. Neem als startwaarde $x_1 = 10$ en probeer een benadering te vinden voor dat nulpunt met de methode van Newton.
- Verklaar waarom dit niet lukt.

Beperkingen

In opdracht 3 heb je gezien dat soms de methode van Newton 'ontspoort'. De methode kan ook eindeloos voortzetten. Je kunt zeggen dat als voor iedere x tussen nulpunt en startwaarde de grafiek met de bolle (convexe) kant naar de x -as gekeerd is dan is succes verzekerd.

Regula falsi

Een andere methode om nulpunten te bepalen is **Regula falsi**. Het algoritme convergeert trager dan de Newton-Raphson-methode, maar is stabiel. De methode maakt ook gebruik van opeenvolgende iteraties van het gezochte punt.

Dit gaat als volgt:

Gegeven de vergelijking $F(x)=0$. Bepaal twee waarden x_0 en x_1 zodat

$$F(x_0) \times F(x_1) < 0.$$

Als F continu is op $[x_0, x_1]$ dan heeft de vergelijking $F(x)=0$ minstens één oplossing tussen x_0 en x_1 . We veronderstellen nu dat er ook hoogstens één oplossing is op $[x_0, x_1]$.

$$\text{We berekenen } x_2 = \frac{x_0 \cdot F(x_1) - x_1 \cdot F(x_0)}{F(x_1) - F(x_0)}$$

Er zijn nu drie mogelijkheden:

- I. Als $F(x_2)=0$ dan hebben we de oplossing gevonden.
- II. Als $F(x_0) \times F(x_2) > 0$ dan herhalen we het proces met x_1 en x_2 .

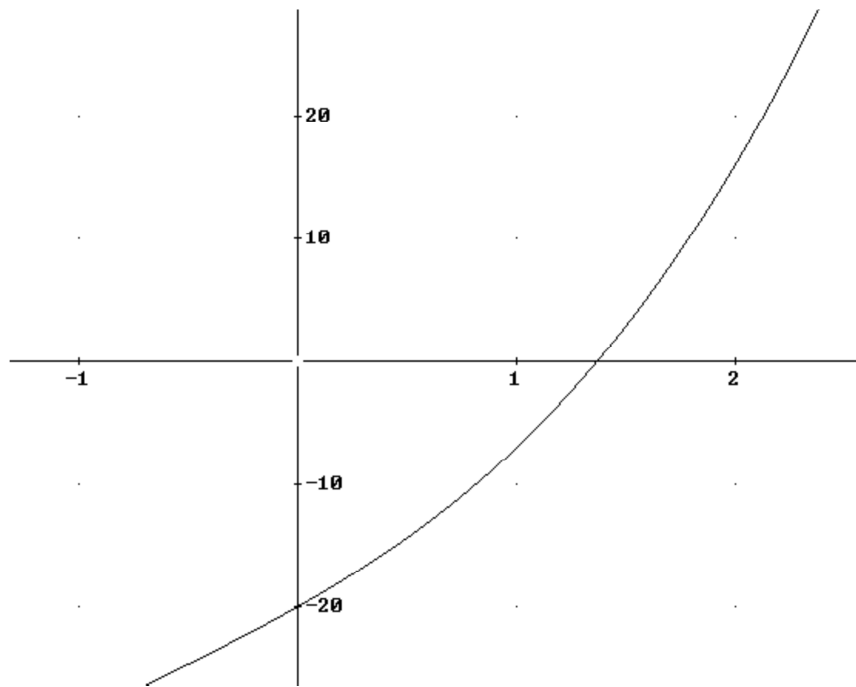
$$x_3 = \frac{x_1 \cdot F(x_2) - x_2 \cdot F(x_1)}{F(x_2) - F(x_1)}$$

- III. Als $F(x_0) \times F(x_2) < 0$ dan herhalen we het proces met x_0 en x_2 .

$$x_3 = \frac{x_0 \cdot F(x_2) - x_2 \cdot F(x_0)}{F(x_2) - F(x_0)}$$

Opdracht 6

In onderstaande tekening zie je de grafiek van $F(x)=x^3+2x^2+10x-20$.

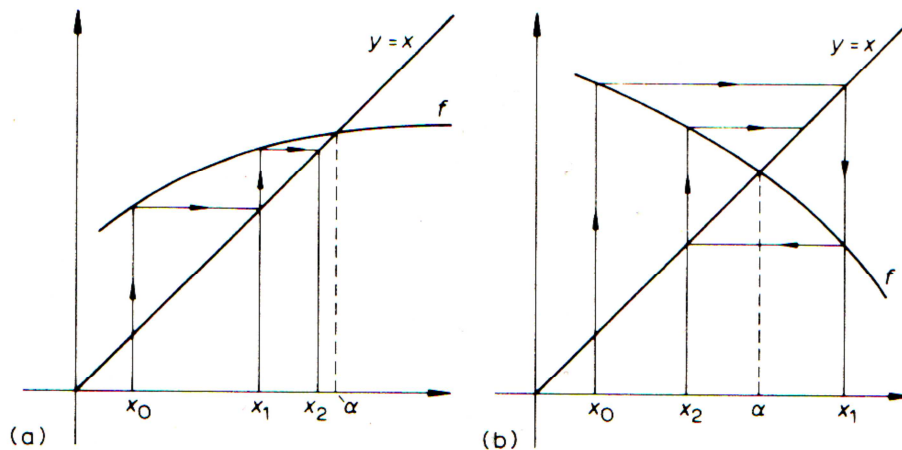


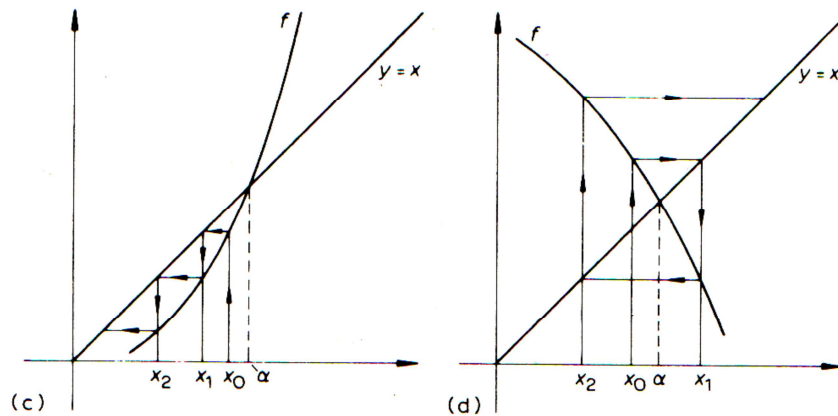
We kiezen $x_0 = 0$ en $x_1 = 2$.

- Bereken x_2 zoals in het voorbeeld hierboven.
- Geef x_2 in te tekening aan. Hoe kan je dat punt 'meetkundig' vinden?
- Wat is nu de volgende stap?
- Bereken x_3 . Zet x_3 in de tekening.

Successieve substitutie 2

We gaan nog een keer kijken naar de gang van zaken bij successieve substitutie waarbij α een oplossing is van $x=f(x)$ en x_0 de startwaarde.





Er zijn verschillende mogelijke verlopen van het iteratieproces.

- Monotoon convergent als $0 < f'(\alpha) < 1$
- Oscillerend convergent als $-1 < f'(\alpha) < 0$
- Monotoon divergent als $f'(\alpha) > 1$
- Oscillerend divergent als $f'(\alpha) < -1$

Voorbeeld

We gaan nog 's kijken naar de oplossing van $F(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ met successieve substitutie. Daarvoor moeten we de vergelijking $F(x) = 0$ eerst herschrijven in een vorm $x = f(x)$.

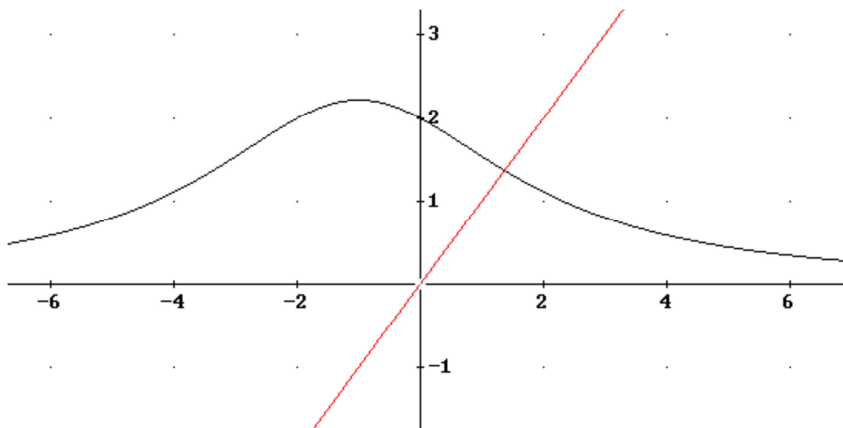
$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

$$x(x^2 + 2x + 10) = 20$$

$$x = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}$$

In de tekening hieronder kan je de grafieken van $f(x)$ en x terug vinden:



Neem als startwaarde $x_0 = -6$ en teken een aantal iteraties. Wat is α ?

Met de GR

```

NORMAL SCI ENG
FLOAT 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
RADIAN DEGREE
FUNC PAR POL SEQ
CONNECTED DOT
SEQUENTIAL SIMUL
REAL a+bi re^θi
FULL HORIZ G-T
SETCLOCK 11/08/10 12:26AM

```

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)=20/(u(n-1)
^2+2*u(n-1)+10)
u(nMin)=(-6)
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=

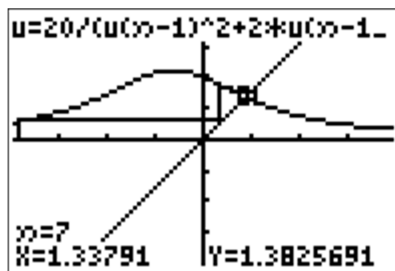
```

```

TimeMode uv vw uw
RectGC PolarGC
CoordOn CoordOff
GridOff GridOn
AxesOn AxesOff
LabelOff LabelOn
ExprOn ExprOff

```

Als je dat allemaal goed instelt dan kan je zelf 'webgrafieken' tekenen!



Via **[MODE]** kan je GR instellen op **Seq**. Je GR bevindt zich dan in de 'rijentoestand'. Via **[Y=]** kan je dan (recursief gedefinieerde) rijen invoeren...

De **u**, **v** en **w** krijg je via **2nd 7**, **2nd 8** en **2nd 9** en de **n** met **[X,T,θ,n]**.

De grafiek kan je krijgen door bij **[FORMAT]** te kiezen voor **Web** (in plaats van **Time**).

Met **[GRAPH]** en **[TRACE]** kan je dan met het 'pijltjerechts' zien wat er gebeurt...

Opdracht 7

- Neem als startwaarde $x_0 = 5$. Lukt het dan ook?
- Bereken de afgeleide $f'(\alpha)$.
- Klopt het resultaat van b. met:
 - Monotoon convergent als $0 < f'(\alpha) < 1$
 - Oscillerend convergent als $-1 < f'(\alpha) < 0$
 - Monotoon divergent als $f'(\alpha) > 1$
 - Oscillerend divergent als $f'(\alpha) < -1$

Opdracht 8

Gegeven de vergelijking $x^3 + 4x - 25 = 0$.

- Schrijf de vergelijking als $x = f(x)$. Welk functie heb je voor f genomen?
- Neem als startwaarde $x_0 = 2$. Plot de webgrafiek zoals hierboven, gebruik **trace** om een aantal iteraties te volgen en verklaar wat je ziet.
- Los de vergelijking ook op met je GR en benader de afgeleide $f'(\alpha)$.