

Bewijzen met volledige inductie¹

Er bestaat een techniek die het mogelijk maakt een formule in één klap voor alle getallen tegelijk te bewijzen. Deze techniek wordt **volledige inductie** genoemd.

Voor deze methode hoeft je de formule maar voor één geval te controleren, namelijk voor $n=1$. Verder moet je het 'domino-effect' aantonen. Dit houdt in dat je van een bewijs van de formule voor een bepaald getal een bewijs kunt maken voor het volgende getal. Het bewijs van de formule voor een bepaald getal kun je je voorstellen als een omgevallen dominosteen. Het domino-effect garandeert dat als de formule voor een bepaald getal 'omgevallen is', de formule ook 'omvalt' voor het volgende getal.

Als je $n=1$ gecontroleerd hebt, heb je de eerste steen omgegooid. Met het domino-effect volgt dan ook de tweede steen, de derde steen, enzovoort. Het domino-effect zorgt er voor dat als de formule 'omgevallen is' voor het lint van alle getallen tot en met de n -de steen, de formule ook omvalt voor de $(n+1)$ -ste steen. Zodoende weet je dan zeker dat de formule 'omvalt' voor alle getallen.

Voorbeeld

$$\text{Te bewijzen : } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Controleer of de formule klopt voor (bijvoorbeeld $n=1$)

$$\text{Stap 1 : vul } n = 1 \text{ in } \rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot 1(1+1) = 1 \text{ Klopt!}$$

Laat dan zien dat als de formule klopt voor ' n ' de formule ook klopt voor ' $n+1$ '.

Stap 2 : Laat zien dat het klopt voor $n+1$

$$1 + 2 + 3 + \dots + \underset{\substack{\downarrow \\ n+1}}{n} = \frac{1}{2} \underset{\substack{\downarrow \\ n+1}}{n} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ n+1}}{n+1} \right)$$

Dus er moet gelden :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Om dit laatste aan te tonen maak je gebruik van de zogenaamde **inductieveronderstelling**. Dat wil zeggen dat je er van uitgaat dat de formule klopt voor ' n '. In dit geval kan je 'links' het stuk van 1 tot met n vervangen door $\frac{1}{2}n(n+1)$.

¹ Uit: Het dominoprincipe door André de Boer | Pythagoras

$$\underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\frac{1}{2}n(n+1)} + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$\frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$(n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \text{ Klopt!}$$

Er is slechts één conclusie mogelijk:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Opdracht 3

Bewijs met volledige inductie: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Opdracht 4

Bewijs met volledige inductie de stelling van 'oneven huisnummers': $1+3+5+\dots+2n-1=n^2$

Opdracht 5

Bewijs met volledige inductie: $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ is deelbaar door 7