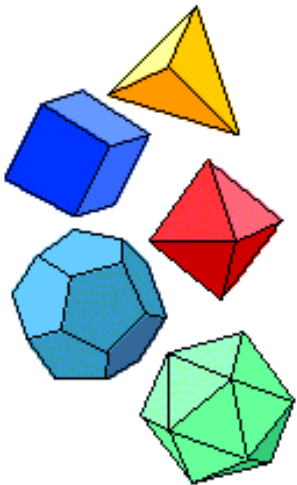


Regelmatige en halfregelmatige veelvlakken



Wiskunde & Cultuur 2-3

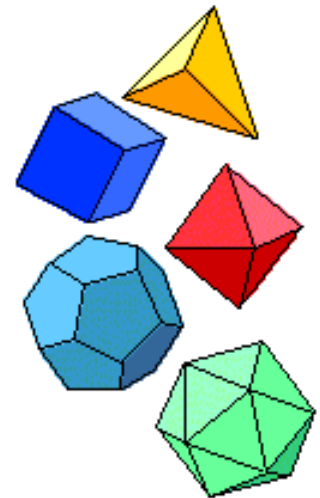
© W.v.Ravenstein

2010-2011

aangepast

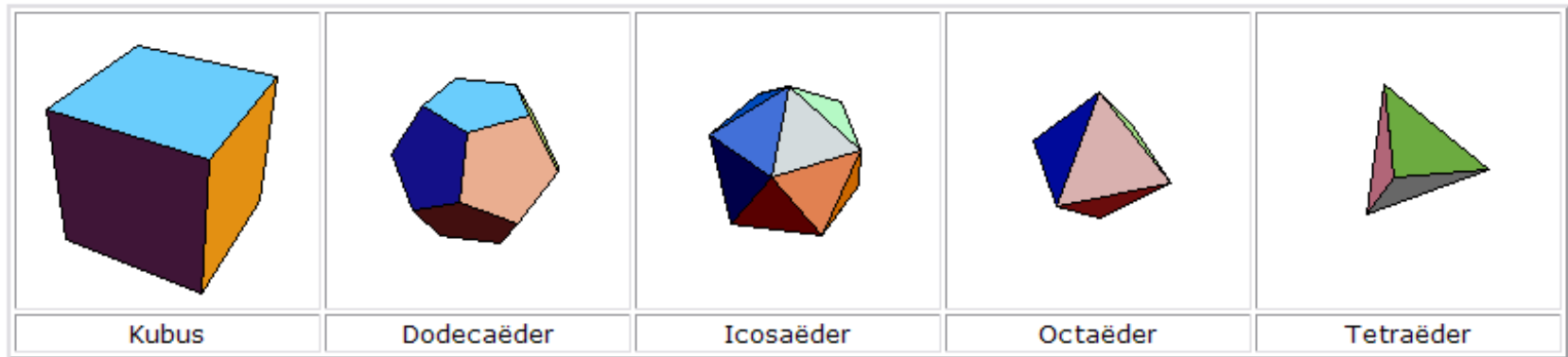
Vandaag...

- Platonische lichamen
 - Regelmatig, halfregelmatig en andere naamgeving
 - Waarom zijn er maar 5 Platonische lichamen?
 - Wat is de formule van Euler?
 - Dualiteit?
 - Wat zijn Archimedische lichamen?
- Kunst & Platonische lichamen
 - Pythagoras, Plato en Archimedes
 - Voorbeelden
- En nog zo wat...



[Voorbeschouwing kunstwerken...!?](#)

De platonische lichamen



De namen als tetraëder, octaëder, e.d. komen uit het Grieks.

Zo betekent het 'voorvoegsel' icoosa- gewoon 20.

'eder' komt van 'edr' wat weer komt van het Griekse woord 'hedra'

'hedra' betekent **zitplaats**.

Kortom: icoosaëder is eigenlijk gewoon Grieks voor twintigvlak.

Een andere benaming voor de kubus is **hexaëder**

Platonische lichamen

- Een andere naam voor platonische lichamen is:

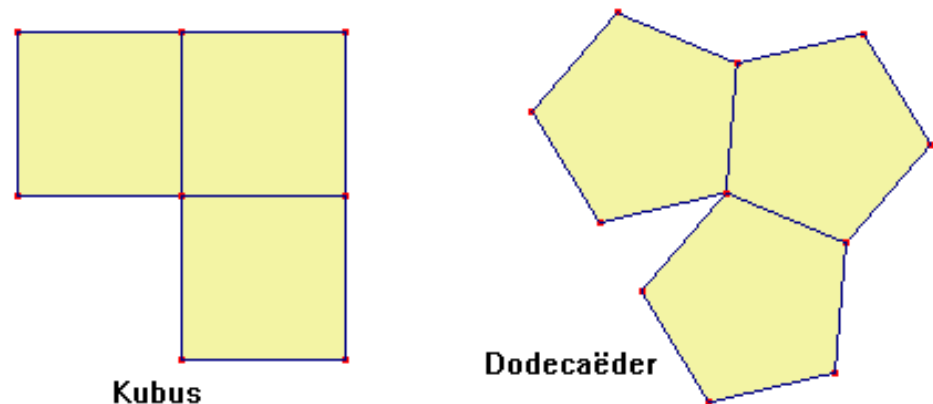
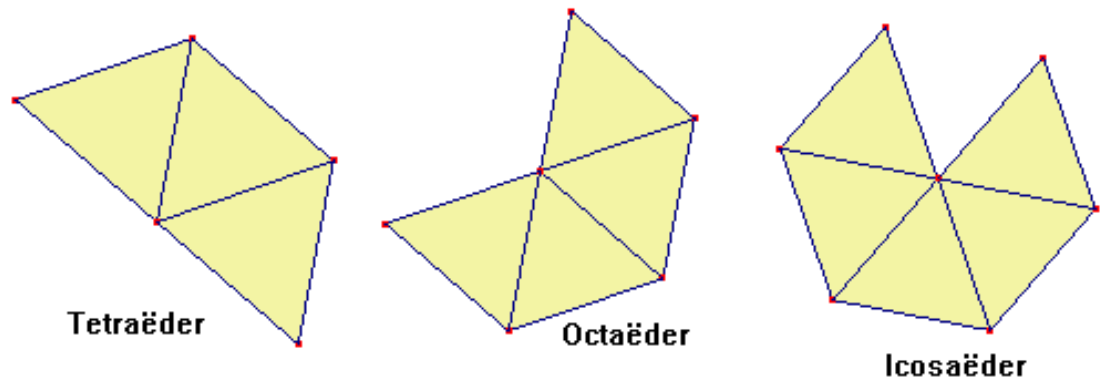
Regelmatige veelvlakken

- Die **regelmatige vlakken** zijn dan de gelijkzijdige driehoek, het vierkant of de regelmatige vijfhoek...



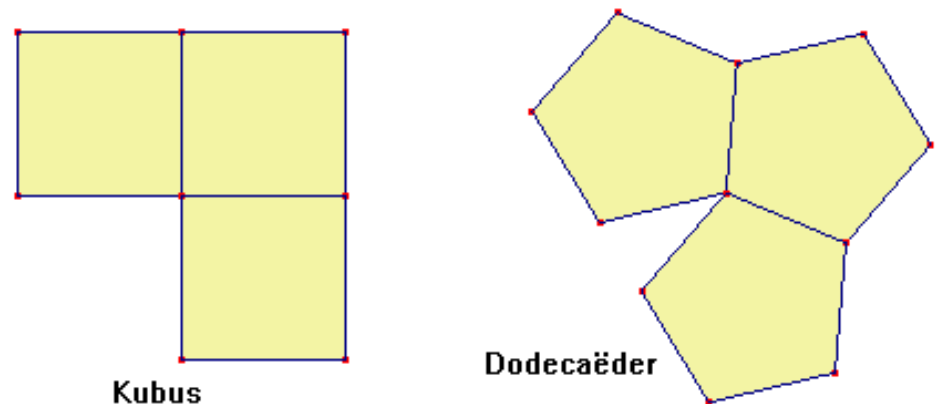
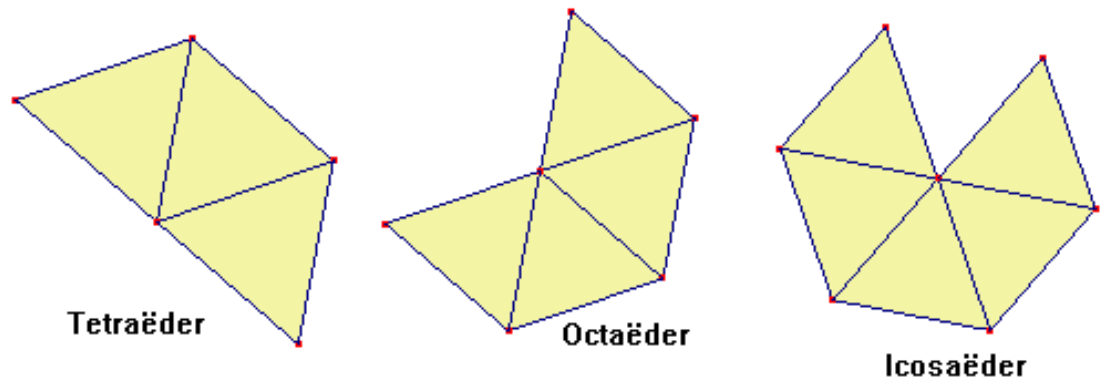
Waarom zijn er maar vijf regelmatige veelvlakken?

- De zijvlakken van een platonisch lichaam bestaan uit een aantal regelmatige en congruente veelhoeken, waarbij elk hoekpunt hetzelfde aantal zijvlakken samenkomen.



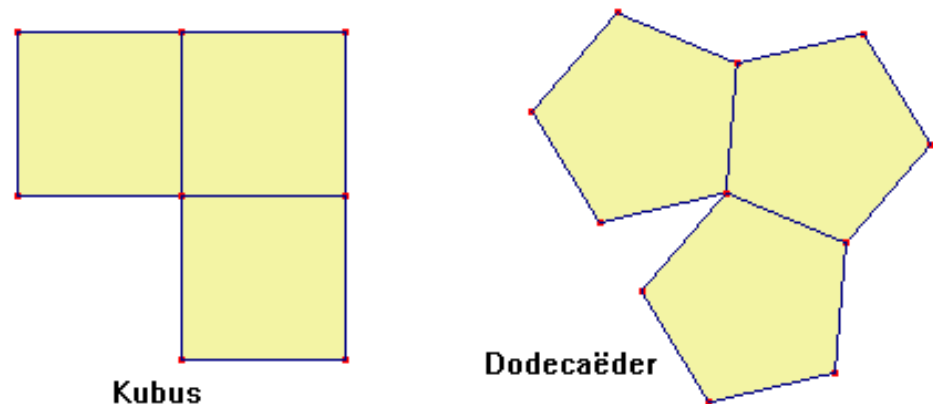
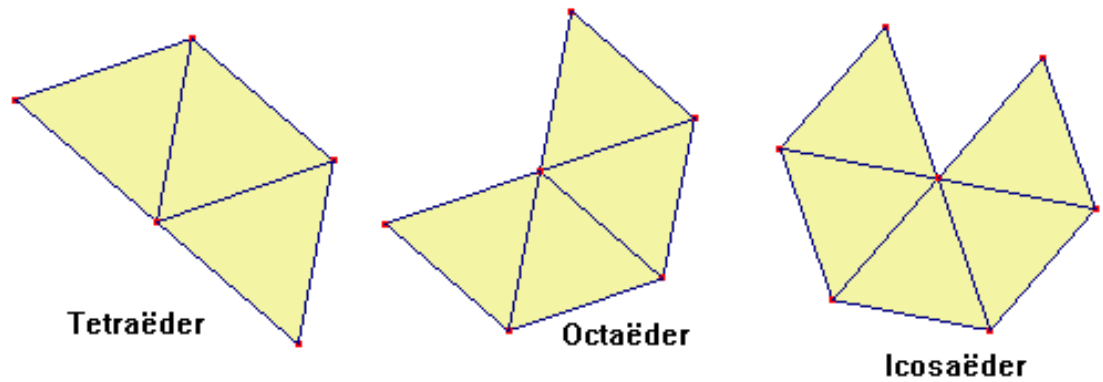
Waarom zijn er maar vijf regelmatige veelvlakken?

- Dat betekent dat we alleen naar één hoekpunt kunnen kijken om te weten hoe het zit bij alle hoekpunten.



Waarom zijn er maar vijf regelmatige veelvlakken?

- Bij een hoekpunt komen in ieder geval altijd minimaal drie zijvlakken bij elkaar.



Formule van Euler

- Voor het aantal ribben (R), het aantal grensvlakken (G) en aantal hoekpunten (H) van **een convex lichaam** geldt de formule van Euler:

$$R+2=G+H$$

Voor **convexe lichamen** geldt dat voor elke 2 punten A en B van dit lichaam ook elk ander punt tussen die punten tot het lichaam behoort.

Concreet betekent dat dat er geen `kuilen` in het lichaam zitten.



$R+2=G+H$

- Voor de regelmatige veelvlakken is de formule eenvoudig te controleren door te tellen:

Naam:	Aantal ribben:	Aantal grensvlakken:	Aantal hoekpunten:
Tetraëder	6	4	4
Kubus	12	6	8
Octaëder	12	8	6
Dodecaëder	30	12	20
Ikosaëder	30	20	12



Dualiteit

- Een andere aanduiding van de Platonische lichamen is de $\{p,q\}$ notatie:
- **p**: 'orde van zijde'
aantal zijden van de gebruikte veelhoeken
- **q**: 'orde van hoekpunt'
aantal vlakken dat samenkomt in een hoekpunt

Dualiteit

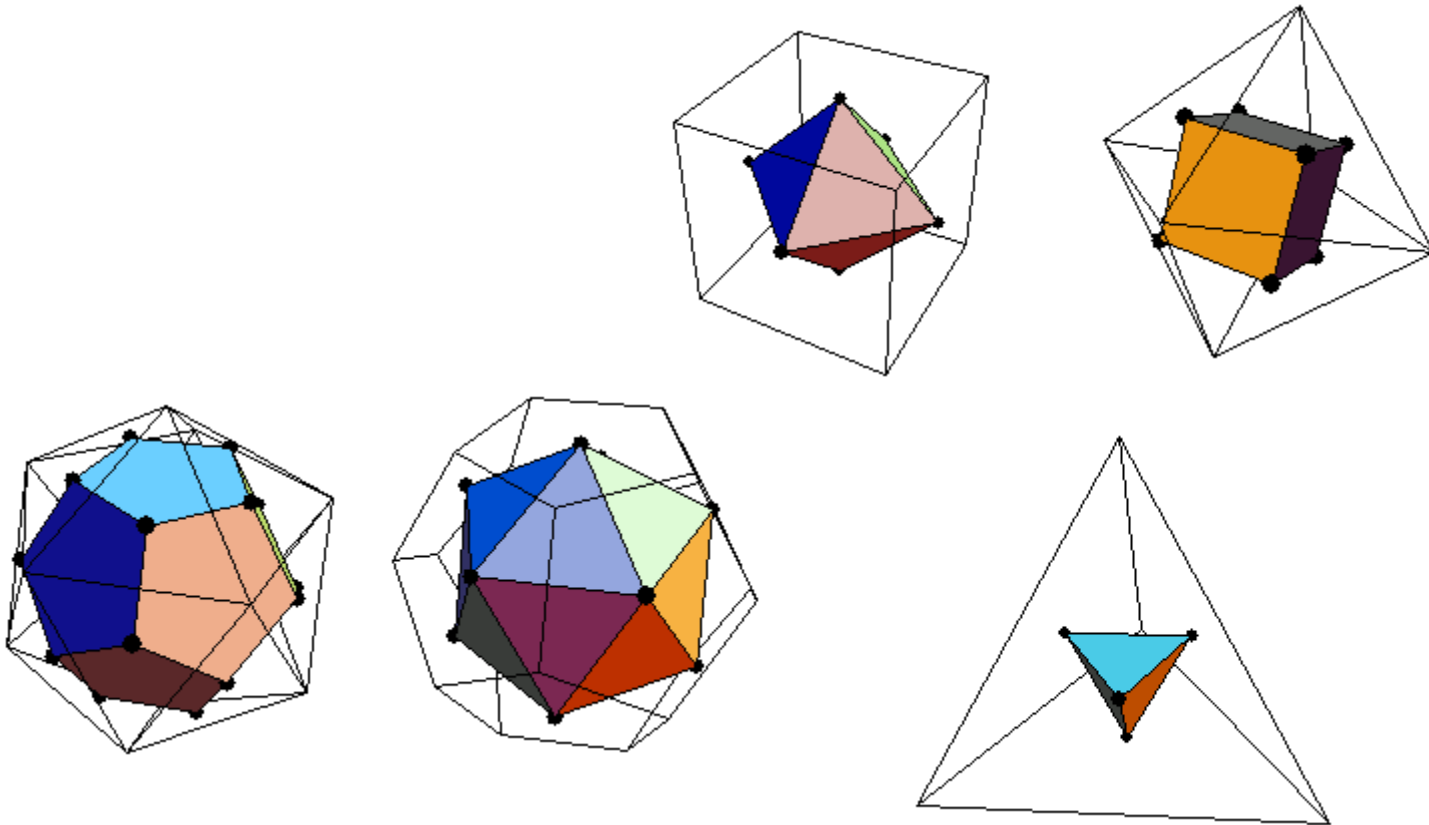
Naam:	$\{p, q\}$	Aantal ribben:	Aantal grensvlakken:	Aantal hoekpunten:
Tetraëder	$\{3, 3\}$	6	4	4
Kubus	$\{4, 3\}$	12	6	8
Octaëder	$\{3, 4\}$	12	8	6
Dodecaëder	$\{5, 3\}$	30	12	20
Ikosaëder	$\{3, 5\}$	30	20	12

We zien dat als $\{3, 4\}$ een mogelijk veelvlak is, dan is $\{4, 3\}$ dat ook!
Men spreekt in dit verband wel van **dualiteit**.



Dualiteit

Als je een kubus tekent $\{4,3\}$ en je verbindt alle 'middelpunten' van de 6 zijden met elkaar, dan krijg je een octaëder $\{3,4\}$ en andersom!.



Halfregelmatige veelvlakken

...dat kan ook...

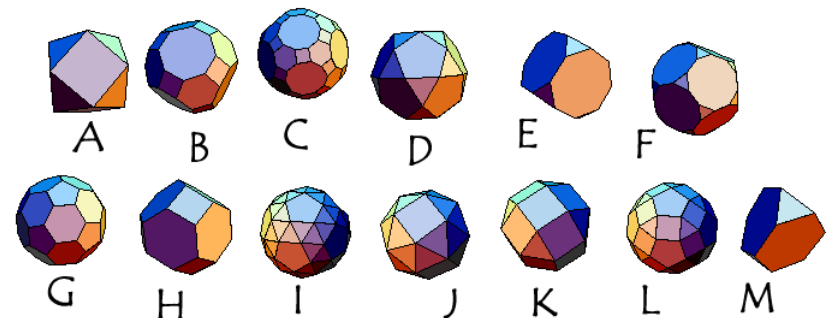


Archimedische lichamen

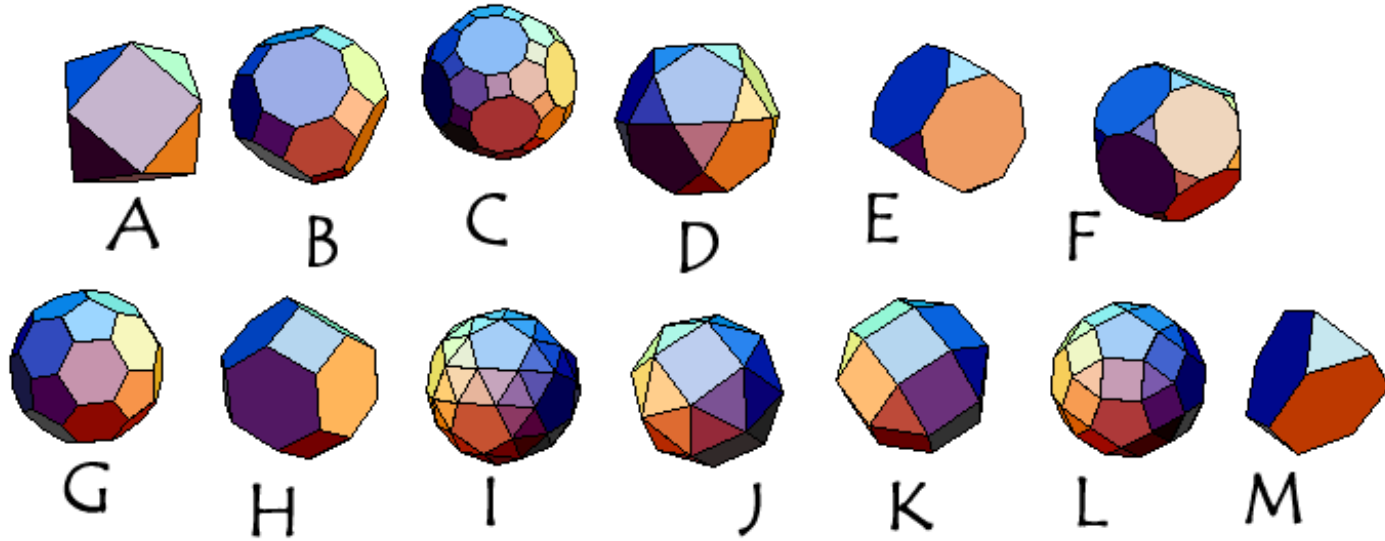
- Bij de regelmatige veelvlakken (Platonische lichamen) zijn de zijvlakken onderling allemaal **hetzelfde** (dus allemaal driehoeken of allemaal vierkanten etc.)



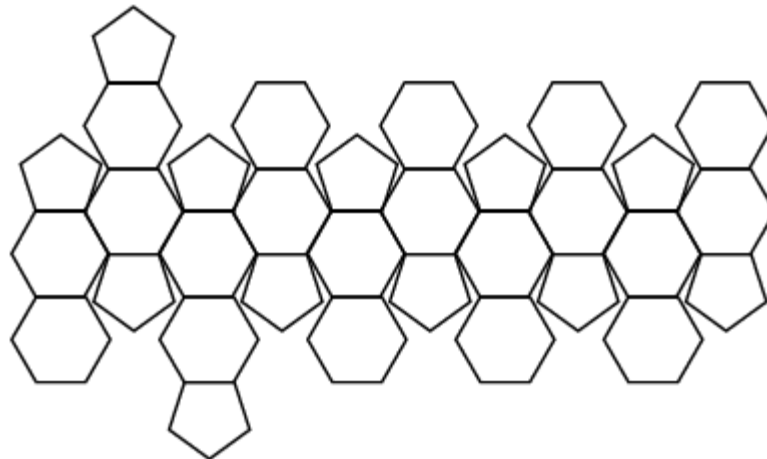
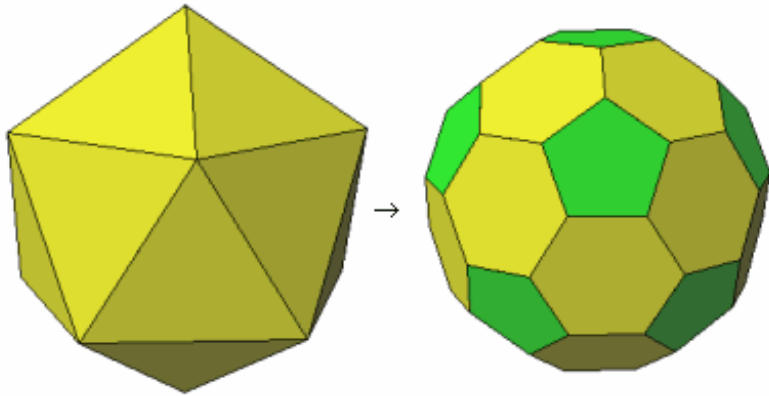
- Bij halfregelmatige veelvlakken (**Archimedische lichamen**) zijn de zijvlakken óók regelmatig, maar **niet** onderling allemaal van dezelfde soort. Behalve driehoeken kunnen er bijvoorbeeld ook vierkanten voorkomen.



Halfregelmatige veelvlakken



Afgeknotte icosaeeder



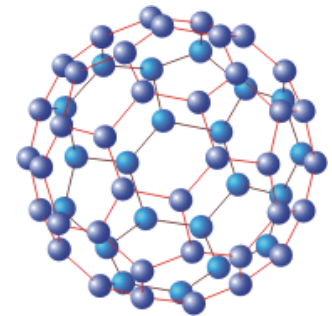
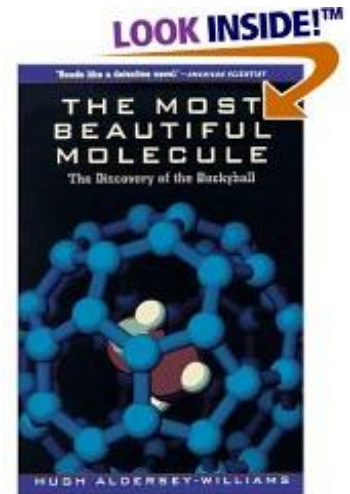
Afgeknotte icoesaeder

- De afgeknotte icoesaëder wordt veelvuldig in het leer of plastic uitgevoerd als **voetbal**.



Afgeknotte icosaeeder

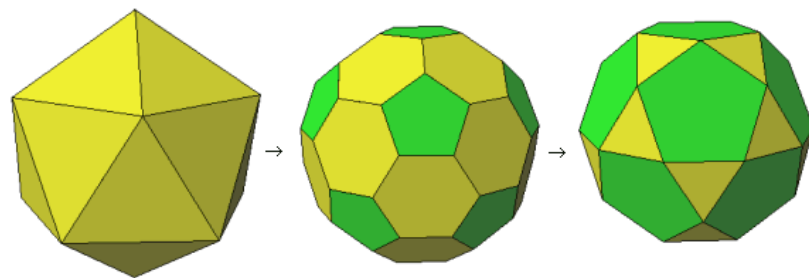
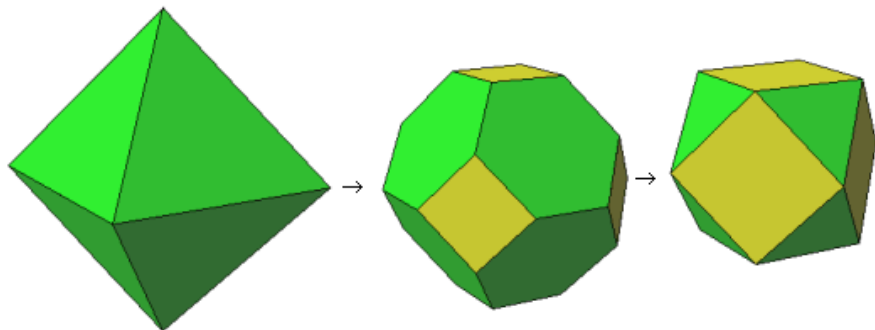
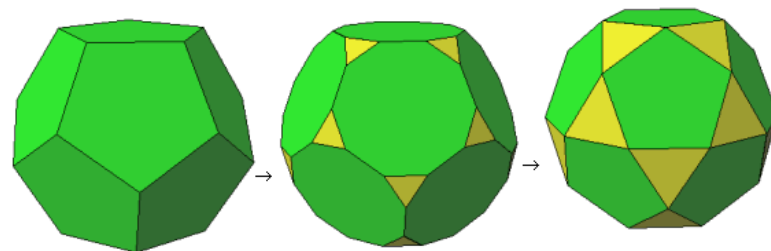
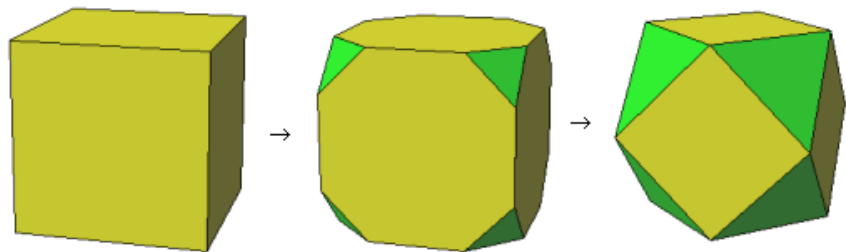
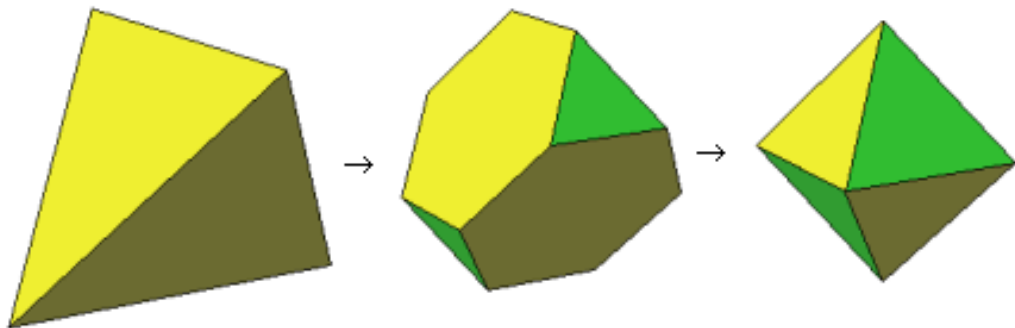
- Buckminsterfullereen, C_{60} , is een **bijzonder koolstofmolecuul** dat deze vorm heeft.
- Fullerenen zijn moleculen die geheel bestaan uit koolstof, in de vorm van een holle bol, ellipsoïde of buis. Bolvormige fullerenen worden in de wandeling **buckyballs** genoemd en cilindrische fullerenen buckybuizen (buckytubes) of (koolstof) nanobuizen (nanotubes).
- De klasse moleculen is genoemd naar Richard Buckminster Fuller, een bekend **architect** die de geodetische koepel beroemd heeft gemaakt.



Van icosaeeder naar voetbal

- Iets dat opvalt aan 7 van de 13 halfregelmatige veelvlakken is dat ze gemaakt kunnen worden door van een regelmatig veelvlak de hoekpunten af te snijden.
- Blijkbaar is het mogelijk om door afknotting van een regelmatig veelvlak een halfregelmatig veelvlak te krijgen. Althans in 7 van de 13 gevallen.
- [Klik HIER om dat te bekijken...](#)

Afknotten

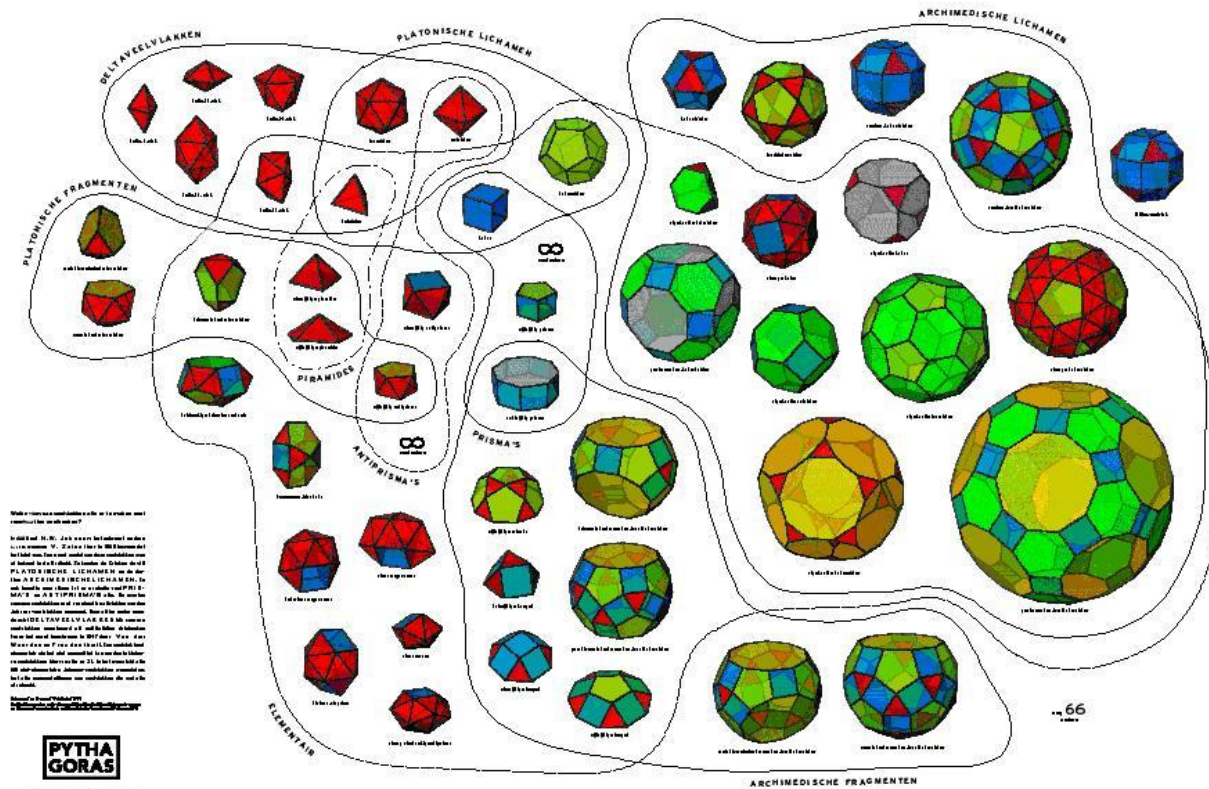


Overzicht

Naam	Vlakken	
Kuboctaëder	14	8 gelijkzijdige driehoeken, 6 vierkanten
Icosidodecaëder	32	20 gelijkzijdige driehoeken, 12 vijfhoeken
Afgeknotte tetraëder	8	4 driehoeken, 4 zeshoeken
Afgeknotte kubus	14	8 driehoeken, 6 achthoeken
Afgeknotte octaëder	14	6 vierkanten, 8 zeshoeken
Afgeknotte dodecaëder	32	20 driehoeken, 12 tienhoeken
Afgeknotte icsaëder	32	12 vijfhoeken, 20 zeshoeken
Romboëdrisch kuboctaëder	26	8 driehoeken, 18 vierkanten
Afgeknotte kuboctaëder	26	12 vierkanten, 8 zeshoeken, 6 achthoeken
Romboëdrisch icosidodecaëder	62	20 driehoeken, 30 vierkanten, 12 vijfhoeken
Afgeknotte icosidodecaëder	62	30 vierkanten, 20 zeshoeken, 12 tienhoeken
Stompe hexaeder	38	32 driehoeken, 6 vierkanten
Stompe dodecaëder	92	80 driehoeken, 12 vijfhoeken

Zijn er nog meer?

CONVEXE VEELVLAKKEN MET REGELMATIGE ZIJVLAKKEN



Waarom is er geen convexe veelvlak met 7 zijvlakken?
 In 1827 gaf L. Schlegel de oplossing. Hij bewees dat er geen convexe veelvlak met 7 zijvlakken kan bestaan. Dit is een bekend resultaat in de wiskunde. De reden hiervoor is dat een convexe veelvlak met 7 zijvlakken een onmogelijke combinatie van driehoeken, vierhoeken en vijfhoeken zou zijn. Het aantal hoeken op de randen zou niet overeenkomen met het aantal hoeken op de vlakken.

Waarom is er geen convexe veelvlak met 8 zijvlakken?
 Dit is ook een onmogelijke combinatie van driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken en zeshoeken. Het aantal hoeken op de randen zou niet overeenkomen met het aantal hoeken op de vlakken.

Waarom is er geen convexe veelvlak met 9 zijvlakken?
 Dit is ook een onmogelijke combinatie van driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, zeshoeken en zeventhoeken. Het aantal hoeken op de randen zou niet overeenkomen met het aantal hoeken op de vlakken.

Waarom is er geen convexe veelvlak met 10 zijvlakken?
 Dit is ook een onmogelijke combinatie van driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, zeshoeken, zeventhoeken en achthoeken. Het aantal hoeken op de randen zou niet overeenkomen met het aantal hoeken op de vlakken.

Waarom is er geen convexe veelvlak met 11 zijvlakken?
 Dit is ook een onmogelijke combinatie van driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, zeshoeken, zeventhoeken, achthoeken en negenhoeken. Het aantal hoeken op de randen zou niet overeenkomen met het aantal hoeken op de vlakken.

Waarom is er geen convexe veelvlak met 12 zijvlakken?
 Dit is ook een onmogelijke combinatie van driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, zeshoeken, zeventhoeken, achthoeken, negenhoeken en tielhoeken. Het aantal hoeken op de randen zou niet overeenkomen met het aantal hoeken op de vlakken.

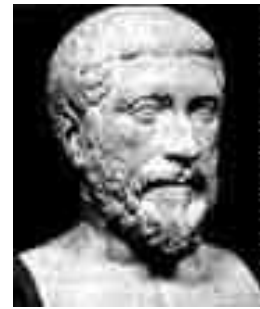


WISKUNDELIJCH NPT
 VOOR JONGEREN

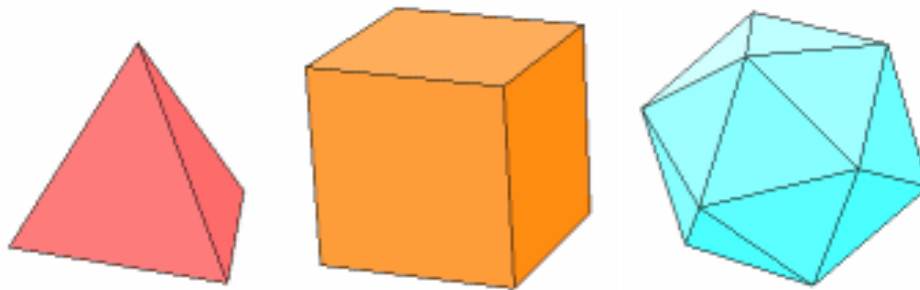
Geschiedenis

Pythagoras, Plato & Archimedes

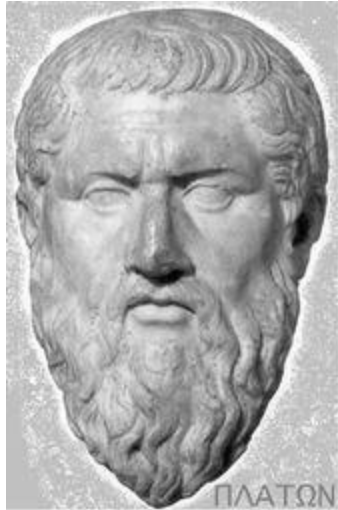
Pythagoras



- Latere schrijvers beweren dat Pythagoras (rond 550 voor Christus) drie regelmatige veelvlakken kende. Dat waren de *kubus*, de *tetraëder* en het regelmatige twaalfvlak of *dodecaëder* ('dodeka' is 'twaalf').



Plato & Archimedes

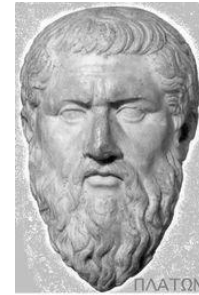


- **Plato** was een Grieks filosoof en schrijver die leefde van 427 – 347 v. Chr. In Athene.

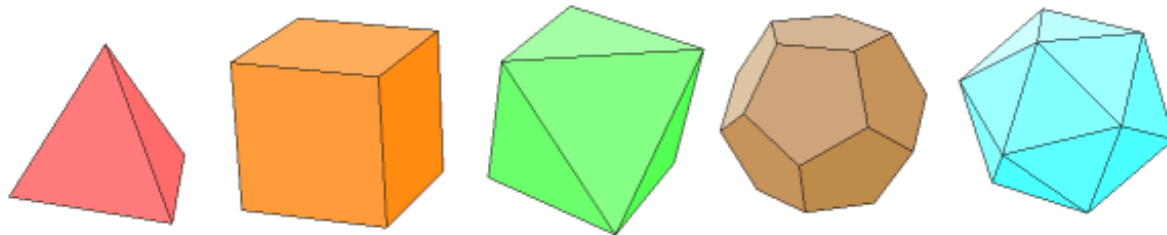


- **Archimedes** was een Grieks wiskundige en natuurkundige die leefde van 287 - 212 v.Chr. in Syracuse op Sicilië.

Plato



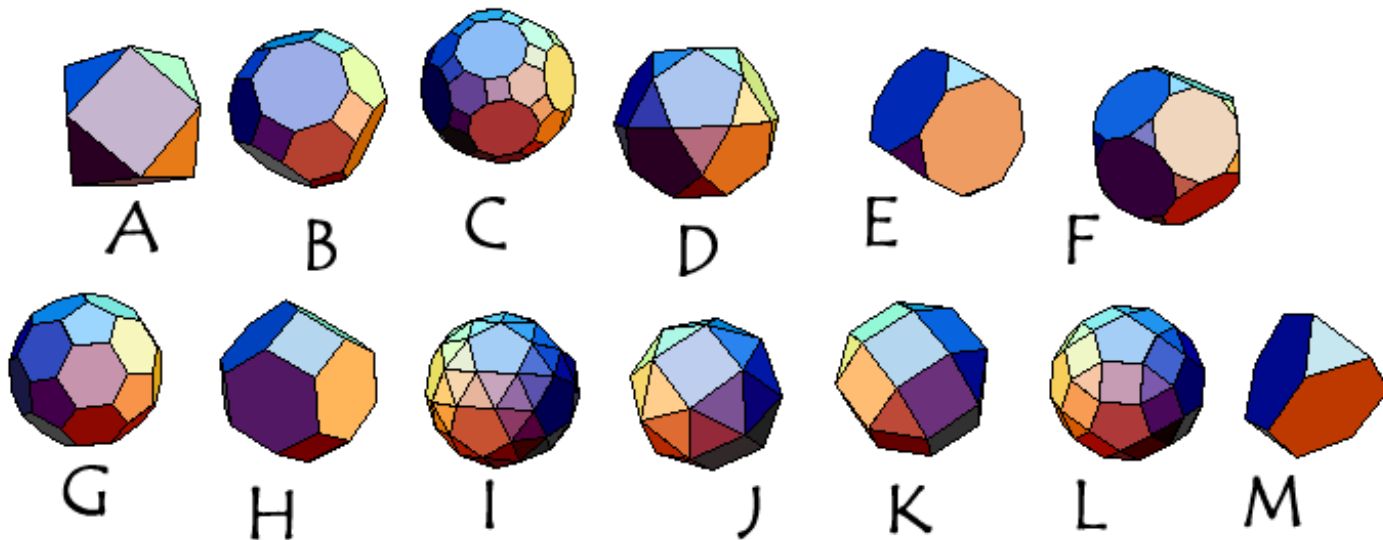
- Zo'n 150 jaar later heeft Plato (427-347 voor Christus) het over *vijf* regelmatige veelvlakken. Behalve de drie van Pythagoras waren dat het regelmatige achthoek en twintigvlak, respectievelijk de *octaëder* en de *icosaëder* ('okto' is 'acht', 'eikosi' = 'twintig').



Archimedes



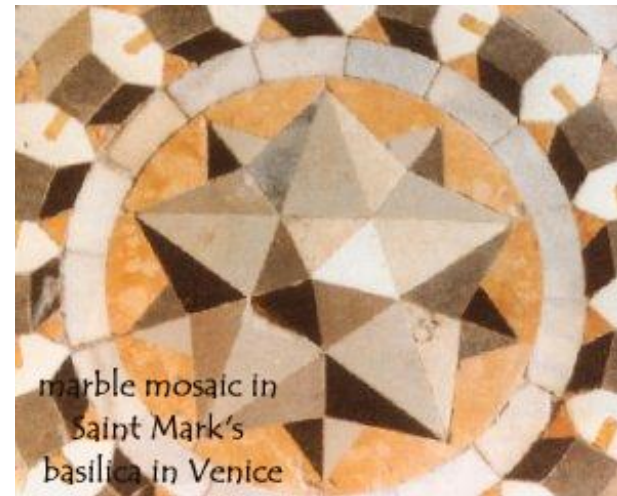
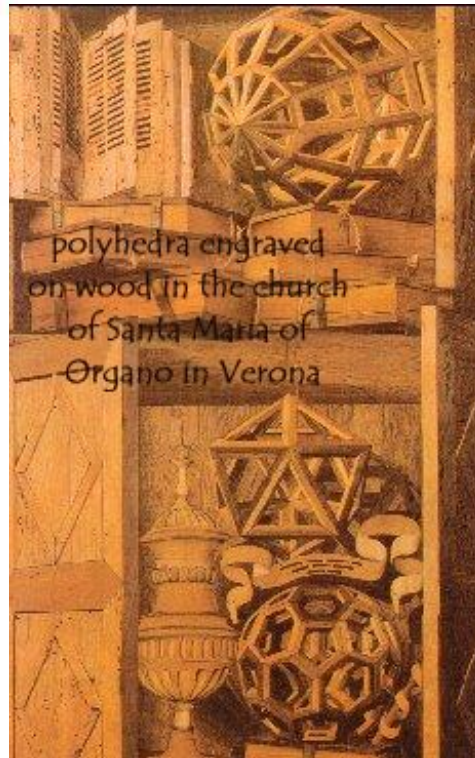
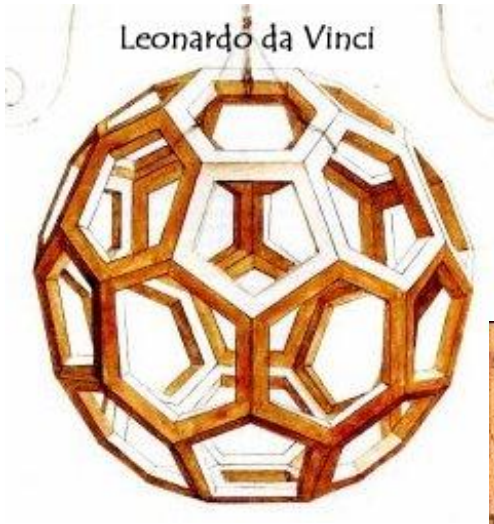
- Archimedes ontdekte in de oudheid 13 halfregelmatige veelvlakken.



Voorbeelden

Historisch en/of kunstzinnig

Voorbeelden



Dürer



Escher



Modern



Meer...



Ook leuk...

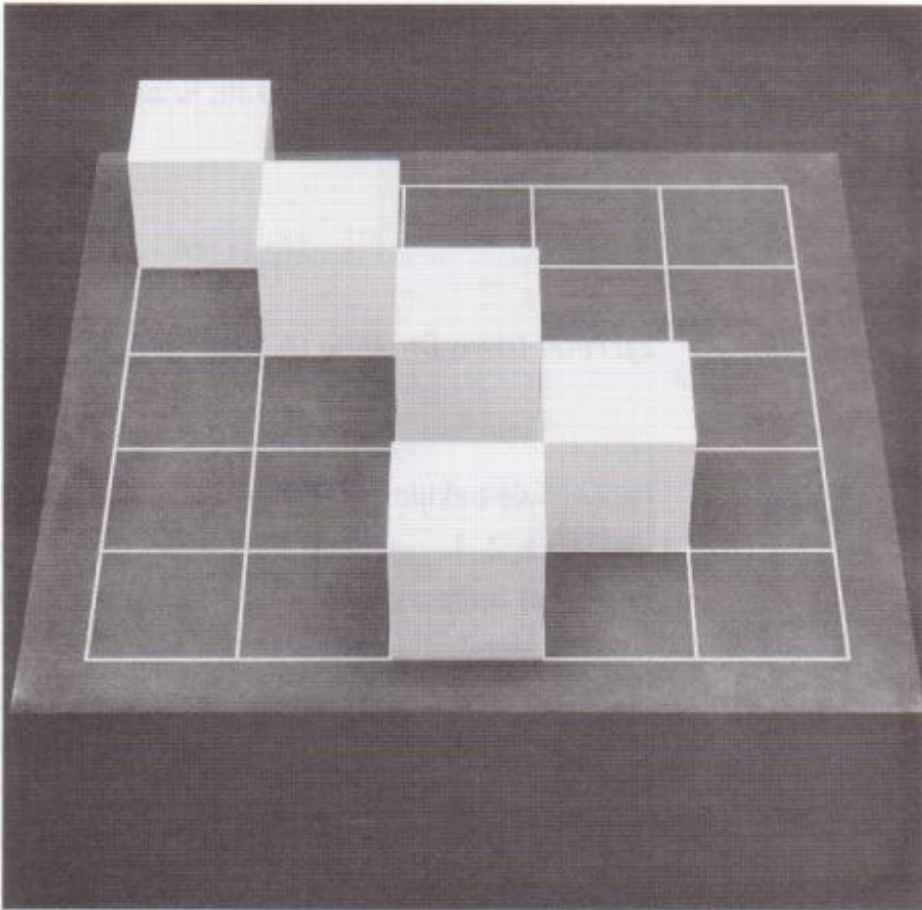


Nog meer...



Popke Bakker Quintessens (1984)

...en nog één...



24: Sol LeWitt, *five cubes / twenty-five squares (Corners Touching)*

Wel aan... de laatste dan

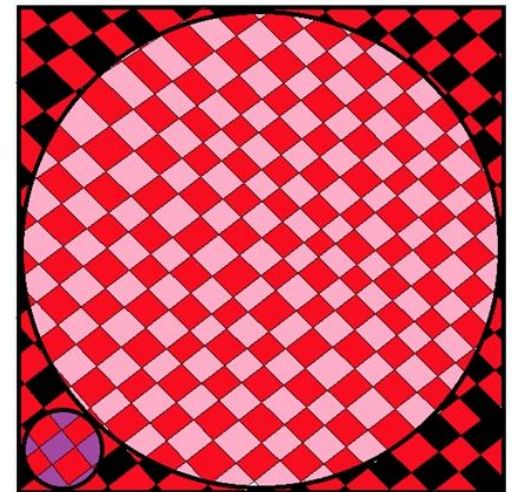
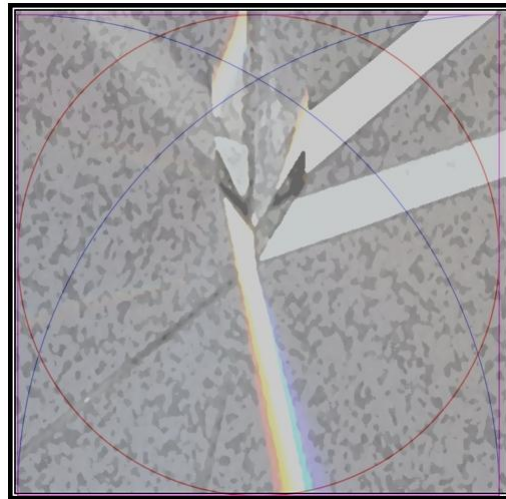
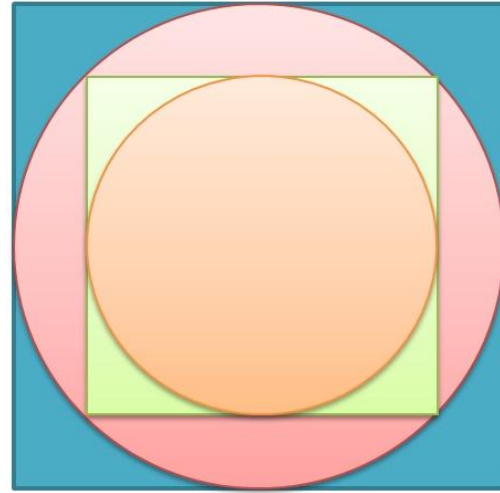
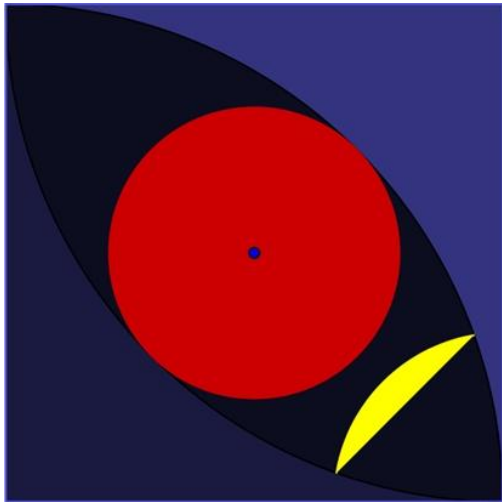


25: Gerard Caris, *Helix 2* (1993)

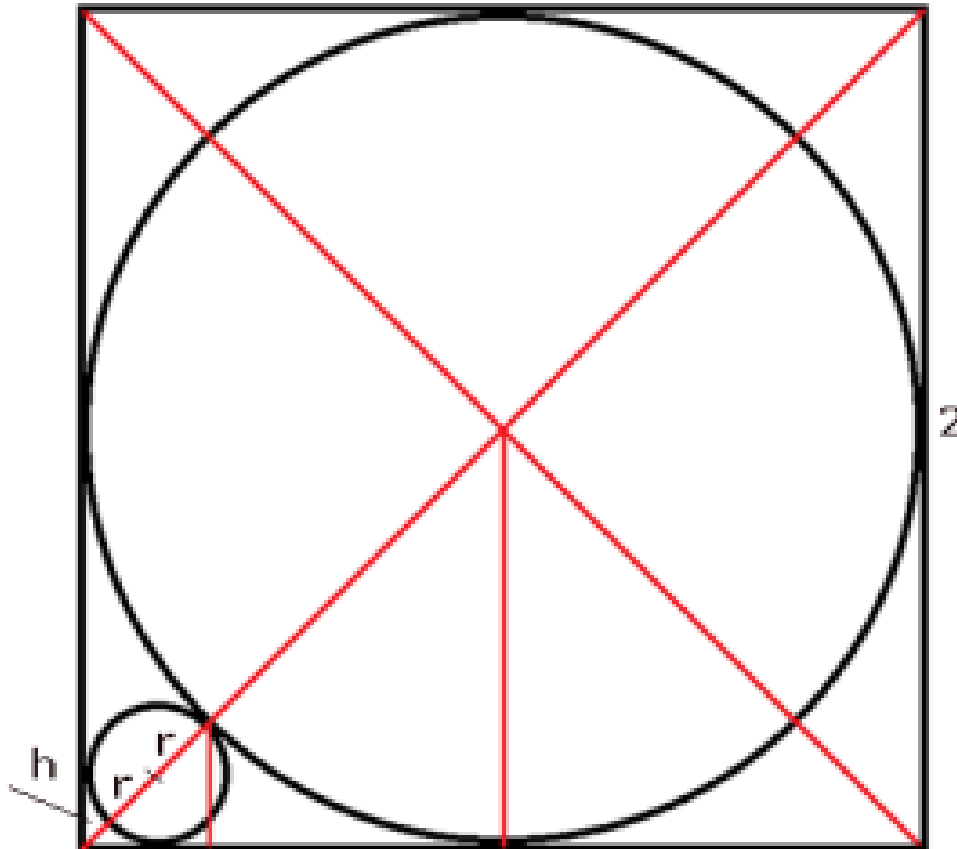
Sangaku's

Enkele sangaku's uit de cursus
'Wiskunde & Cultuur 2-3'
van 2010-2011

Voorbeelden



Doe maar 's! 😊



E I N D E

"I always wanted to be somebody, but I
should have been more specific."

Jane Wagner