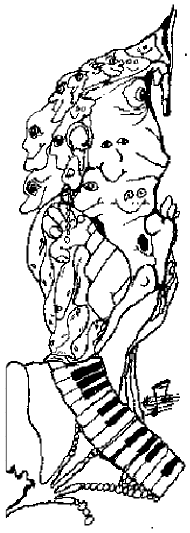


Willem van Ravenstein

Lesbrief hypothesetoetsen

"Je gaat het pas zien als je het door hebt"
Johan Cruijff

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1 - voorkennis

De binomiale verdeling

We beschouwen n onafhankelijke experimenten met elk experiment een kans van p op ’succes’. De stochast X, die het totaal aantal ‘successen’ voorstelt, heeft een **binomiale verdeling** met parameters p en n.

Er geldt: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Voor de binomiale verdeling geldt: E(X)=n·p en Var(X)=n·p(1-p)

De hypergeometrische verdeling

In een vaas bevinden zich **a** witte en **b** rode knikkers. Je pakt er **n** knikkers uit. De kans op **k** witte knikkers is dan gelijk aan:

$$P(X=k)=\frac{\binom{a}{k}\cdot\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

De normale verdeling

Voor stochasten X en Y geldt: E(X+Y) = E(X) + E(Y)

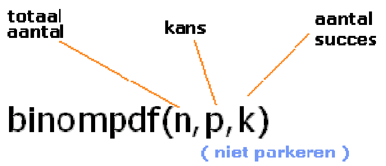
Voor onafhankelijk stochasten X en Y geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

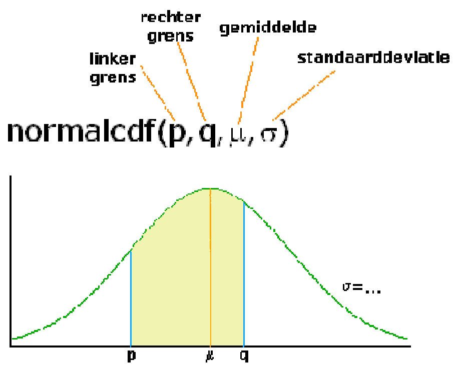
√n-wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\bar{X}$ van de uitkomsten X:

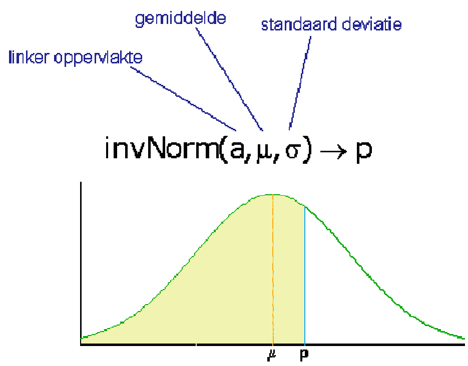
$E(S) = n \cdot E(X)$ en $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\bar{X}) = E(X)$ en $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

De grafische rekenmachine







Hoofdstuk 2 - mens erger je niet

Als je het spel 'mens erger je niet' speelt kan je in de situatie terecht komen dat je met een dobbelsteen eerst 'zes' moet gooien voor je verder mag. Dat is nogal irritant. Een onderzoeker vermoedt dat de kans om met een dobbelsteen een 'zes' te gooien niet $\frac{1}{6}$ is maar kleiner. Hij vermoedt dat dit komt doordat er bij de 'zes' de meeste kuiltjes zitten en deze kant van de dobbelsteen 'lichter' is dan de andere kanten van de dobbelsteen.

De onderzoeker doet het volgende experiment:

- Hij gooit 60 keer met de dobbelsteen en telt het aantal keren dat 6 boven komt, dit noemen we X.
- De vraag is dan: bij welke waarde van X besluit je dat de dobbelsteen 'niet eerlijk' is?

Als X gelijk is aan 10 of groter is er geen reden om aan te nemen dat de dobbelsteen niet deugt. Met een kans van $\frac{1}{6}$ verwacht je bij 60 keer gooien 10 keer een zes. Akkoord?

Als je nu minder dan 10 keer een zes gooit, dan is de vraag:

a. Wanneer moet je nu ernstig gaan twijfelen aan de eerlijkheid van de dobbelsteen? Bij 9? Bij 8? Of 7? 6? ...

Theorie

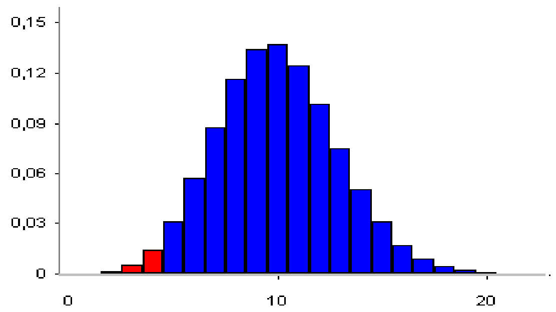
X: aantal keren 6 gooien bij 60 keer gooien.

X~binomiaal verdeeld met n=60 en p = $\frac{1}{6}$

Wat is dan de kans dat X ≤ 6? Met je GR!? ⟶ **Binomcdf**(60, 1/6, 6) = 0,1081

Wat is k zodat P(X ≤ k) ≤ 0,05?

Bij een betrouwbaarheid of significantie van 5% kan je pas bij X ≤ 4 concluderen dat de kans op een zes kleiner is dan $\frac{1}{6}$. Ga dat na!



Opgave 1

De onderzoeker doet het experiment opnieuw, maar nu met 600 keer gooien met een dobbelsteen. Laat zien dat voor k=84 geldt dat P(X ≥ k) ≤ 0,05?

Hoofdstuk 3 - hypothese toetsen

De onderzoeker in het voorbeeld in hoofdstuk 2 wilde aantonen dat de dobbelsteen niet 'eerlijk' is. Om dat aan te tonen ging ze er van uit dat de dobbelsteen wel eerlijk is en probeert vervolgens aan te tonen dat de 'gevonden waarde' dan wel heel toevallig zou zijn. Feitelijk ga je dan uit van het tegendeel dat je wilt aantonen. We noemen dat H_0: de nulhypothese. De hypothese dat de dobbelsteen niet deugt noemen we dan H_1: de alternatieve hypothese.

$$H_0: p = \frac{1}{6}$$
$$H_1: p < \frac{1}{6}$$

Vervolgens kiezen we een bepaalde betrouwbaarheid of significantie. Deze betrouwbaarheid wordt vastgelegd met de onbetrouwbaarheidsdrempel α. We noemen dit ook wel significantieniveau. Meestal kiezen we $\alpha = 0{,}05$ of $\alpha = 0{,}01$.

$$P(H_0 \text{ wordt verworpen} \mid H_0 \text{ is waar}) < \alpha$$

De waarden van de stochast waarvoor H_0 wordt verworpen vormen het kritieke gebied van de toets. De kans dat we bij het experiment in het kritieke gebied terecht komen noemen we overschrijdingskans.

		Realiteit	
		H_0	H_1
Beslissing	H_0	...	**ten onrechte H_0 handhaven**
	H_1	**ten onrechte H_0 verwerpen**	...

Je zou ook kunnen zeggen dat α de kans is dat je 'ten onrechte H_0 verwerpt'. Een andere 'foute beslissing' is als je 'H_0 ten onrechte' handhaaft. We komen hier later op terug.

Enkelzijdige binomiale toets

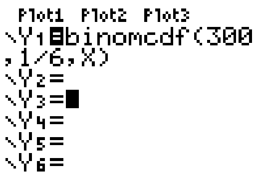
Je gooit 300 keer met een dobbelsteen en telt het aantal keren dat je 'zes' gooit. We noemen dat X. In ons experiment blijkt het aantal keren 'zes' gelijk te zijn aan 41. We vermoeden dat de kans om 'zes' te gooien kleiner is dan $\frac{1}{6}$.

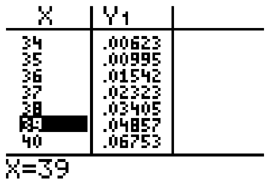
X is binomiaal verdeeld met n=300 en een onbekende kans p. We stellen de nulhypothese en de alternatieve hypothese op:

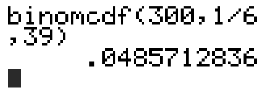
$$H_0: p = \frac{1}{6}$$
$$H_1: p < \frac{1}{6}$$

Onder H_0 is $p = \frac{1}{6}$.

De vraag is dan voor welke waarde van k geldt (onder H_0) dat $P(X \leq k) < 0,05$. Dit is voor het eerst bij k=39.
Het kritieke gebied is 0...39 en de overschrijdingskans is (ongeveer) gelijk aan 0,0486.







De ‘gevonden’ waarde voor k is 41. Dit ligt niet in het kritieke gebied. Er is geen reden om H_0 te verwerpen. Dus op basis van deze gegevens kunnen we niet concluderen dat de dobbelsteen niet deugt.

Dubbelzijdige binomiale toets

In het voorbeeld over de dobbelsteen was het vermoeden dat de kans kleiner was dan een bepaalde waarde. Er kunnen zich ook situaties voordoen waarin je wil toetsen of er een verschil is, dus zeg maar een ‘verschil zonder richting’.

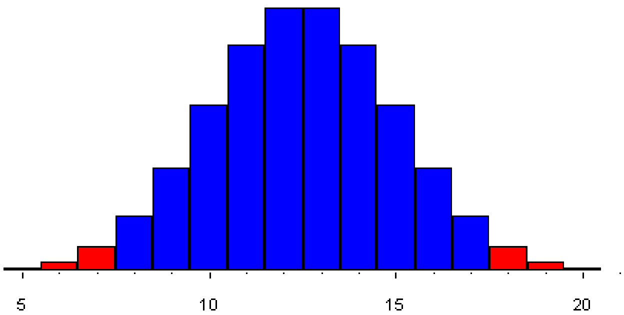
We gooien 25 keer met een munt en tellen het aantal kop. We vermoeden dat dit geen eerlijke munt is. We weten niet of de munt nu vaker op kop valt of juist minder vaak. We gaan nu op dezelfde manier hypotheses opstellen, maar nu gaat dat anders:

X: aantal keren kop
X ~ binomiaal verdeeld met n=25 en onbekende p.

$H_0 : p = \frac{1}{2}$

$H_1 : p \neq \frac{1}{2}$

Onder H_0 kan je het kritieke gebied bepalen. Dat betekent dat we aan beide kanten (links en recht) een gebied nemen van 0,025.



Het kritieke gebied is 0...7 en 18...25. Ga dat na!

Opdrachten

Opgave 2

In een gemeente worden jaarlijks 189 jongens geboren en 167 meisjes. Zijn deze gegeven voldoende grond om aan te nemen dat er significant **meer** jongens worden geboren dan meisjes?

Opgave 3

Een fabrikant heeft een medicijn ontwikkeld waarvan de fabrikant van mening is dat het medicijn in 90% van de gevallen de gewenste genezing brengt. Een onderzoeker betwijfelt dit en wil controleren of deze hoge werkzaamheid niet een beetje hoog is ingeschat en doet een onderzoek bij 50 patiënten.

a. Leg uit dat je hier H_0: p = 0,9 tegen H_1: p < 0,9 zal worden getoetst.

b. Wat zal de conclusie zijn (bij een significatie van 5%) als de onderzoeker constateert dat bij 46 patiënten het medicijn werkt?

c. Wat zal de conclusie zijn (bij een significantie van 5%) als de onderzoeker constateert dat bij 41 patiënten het medicijn werkt?

Opgave 4

Een fabrikant van frisdranken houdt een actie om zijn marktaandeel te vergroten. Bij deze actie kan de consument doppen verzamelen. De onderkant van een dop heeft één van de kleuren rood, groen, blauw of oranje. Lever je vier verschillend gekleurde doppen in, dan krijg je een fles gratis.

De fabrikant beweert dat 50% van de doppen rood is, 30% groen, 15% blauw en 5% oranje.

a. Bereken de kans dat iemand na het kopen van vier flessen frisdrank een gratis fles krijgt.

b. Bereken de kans dat iemand na 8 flessen twee gratis flessen krijgt.

c. Bereken de kans dat iemand die 30 flessen heeft gekocht minstens 1 oranje dop heeft.

Volgens een klant is het percentage flessen met een rode dop groter dan 50%. Van de 100 flessen die hij heeft opengemaakt hadden er 57 een rode dop.

d. Moet je hem bij een significantieniveau van 10% gelijk geven?

Een groothandel in frisdranken krijgt klachten binnen over het percentage oranje doppen; dat zou minder zijn dan 5%. Er wordt besloten een steekproef te nemen van 200 flessen.

e. Hoeveel oranje doppen moet men in deze steekproef aantreffen opdat de bewering van de fabrikant kan worden verworpen? Neem een significantieniveau van 10%.

Hoofdstuk 4 - de tekentoets

Het komt wel 's voor dat je twee series van gekoppelde gegevens wilt vergelijken. Bijvoorbeeld de resultaten van 25 leerlingen voor een twee wiskundeproefwerken, zeg proefwerk A en proefwerk B. Je zou je dan af kunnen vragen of proefwerk B beter gemaakt is dan proefwerk A?

Voorbeeld

Een wiskundedocent vraagt zich af of herkansingen bij toetsen eigenlijk wel veel zin heeft. Om deze vraag nader te onderzoeken verzamelt de docent data dan 20 studenten. In de tabel hieronder zie je de scores van deze leerlingen voor de toets en de herkansing.

toets	4,7	5,2	3,8	5,5	4,6	2,4	3,9	4,6	5,3	5,4	4,6	5,9	3,9	4,0	5,1	5,4	5,3	6,8	5,8	4,2
herkansing	4,9	5,3	3,7	5,8	6,2	2,7	4,8	5,9	5,2	6,7	6,2	6,5	4,7	5,6	5,0	7,3	5,3	6,7	6,7	4,1

We kijken (per student) of de herkansing beter is gemaakt dan de toets. Beter geven we een +, slechter een – en als het resultaat hetzelfde is een 0.

Dit levert 14+, 5- en één 0.

We laten de '0' buiten beschouwing. Je kunt je dan afvragen wat de kans is dat je van de 19 resultaten 14 keer een + vindt als de herkansing niet beter gemaakt zou zijn. Of beter geformuleerd:

X: aantal plussen
H_0: p=0,5 (er is geen verschil!)
H_1: p>0,5 (de herkansing is beter gemaakt)

X ~ Bin(19, 0,5)
$P(X \geq 14) = 1 - P(X \leq 13) = 0{,}0318$
Dat is kleiner dan 0,05 dus ja, we verwerpen de nulhypothese en nemen de alternatieve hypothese aan. De herkansing is beter gemaakt dan de toets.

Deze manier van toetsen noemen we de **tekentoets**.

Opgave 5

Van 12 proefpersonen werd de (diastolische) bloeddruk gemeten, zowel voor als na het toedienen van een bloeddrukverlagend medicijn. Het resultaat was:

Proefpersoon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
voor toedienen	83	72	95	88	81	110	99	77	85	80	101	91
na toedienen	79	75	88	81	81	99	87	77	86	72	91	83

- Onderzoek of je met significantieniveau 5% aannemelijk kan maken dat het medicijn werkt.

Hoofdstuk 5 - toetsen van het gemiddelde van een normaal verdeelde stochast

Tot nu toe hebben we steeds stochasten getoetst met een binomiale kansverdeling. Maar je kunt ook te maken hebben met andere kansverdelingen, zoals de normale verdeling.

Voorbeeld

Stochast X is een normaal verdeelde stochast met μ = 180 en σ = 20. Iemand beweert dat het gemiddelde hoger is en wil dit onderzoeken en neemt een steekproef van 100. Gevraagd: geef het kritieke gebied bij α = 0,05.

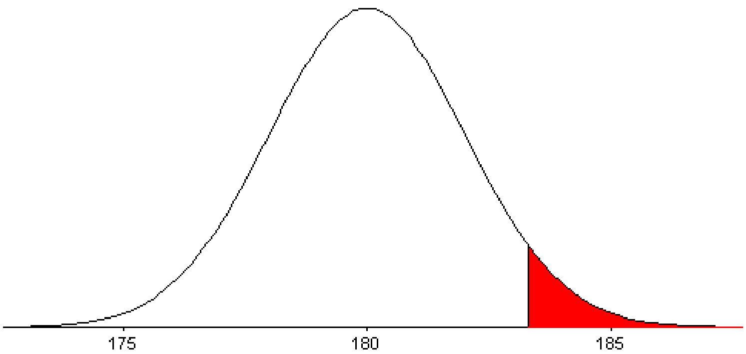
Je gebruikt hier de $\sqrt{}$n-wet. De verwachtingswaarde van de steekproef is 180 en de standaarddeviatie is gelijk aan $\frac{20}{\sqrt{100}} = 2$.

$H_0 : \mu = 180$
$H_1 : \mu > 180$

Onder H_0 kan je bereken welke waarde je voor g nemen zodat $P(X > g) < 0,05$.

Met je GR: invNorm(.95,180,2) $\to$ 183,289...

Het kritieke gebied is [183,3 ; $\to$>



Dus bij een 'gevonden' waarde van 183,3 of meer kan je besluiten dat het gemiddelde 'waarschijnlijk' hoger is dan 180.

Opgave 6

In het algemeen wordt er van uit gegaan dat het IQ van de 'gemiddelde Nederlander' normaal verdeeld is met een gemiddelde van 100 en een standaarddeviatie van 15. Ik neem een willekeurige steekproef van 25 wiskunde studenten en onderwerp ze aan een IQ-test. Het gemiddelde IQ uit deze steekproef noemen we μ.

a. Bij welke grenswaarde (α = 0,05) kan ik H_0 verwerpen?

Uit mijn onderzoek blijkt het gemiddelde IQ in de steekproef gelijk te zijn aan 107.

b. Bereken de kans dat ik **ten onrechte** H_0 verwerp.

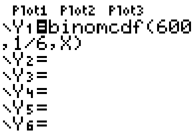
Uitwerkingen van de opdrachten

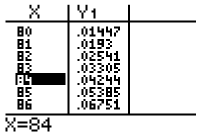
Opdracht 1

X: aantal keren 6 gooien bij 600 keer gooien.

X~binomiaal verdeeld met n=600 en p = $\frac{1}{6}$

Wat is k zodat $P(X \leq k) \leq 0{,}05$?





$k \leq 84$

Opgave 2

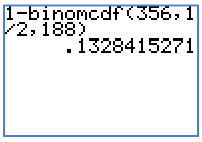
X: aantal jongens dat wordt geboren.

X ~ binomiaal verdeeld met n=356 met p onbekend.

$H_0 : p = \frac{1}{2}$

$H_1 : p > \frac{1}{2}$

Onder H_0 is $P(X \geq 189) = 1 - P(X \leq 188) = 0{,}1328$.



Nemen we $\alpha = 0{,}05$ dan is er geen reden om H_0 te verwerpen.

Opgave 3

a. De onderzoeker denkt dat de kans op genezing lager is dan 0,9 dus eenzijdig toetsen.

b. Dit is zelfs meer dan 90%. Toetsen is niet nodig.

c. X: aantal genezingen

   H_0: p=0,9

   H_1: p<0,9

   X~Bin(50,0.9)

   $P(X \leq 41) = 0{,}0579$ en dat is groter dan 0,05. De H_0 kan niet worden verworpen.

Opgave 4

a. $P(RGBO) = 0{,}50 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}05 = 0{,}0125$

   Er zijn $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ zulke volgorden, dus de kans wordt $24 \cdot 0{,}0125 = 0{,}3$

b. $P(RRGGBBOO) = 0{,}0125^2 = 0{,}00015625$

   Er zijn $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 2520$ mogelijke volgorden.

   De kans wordt dan $0{,}00015625 \cdot 2520 = 0{,}39375$

   NB. We rekenen niet mee dat je met 4 doppen een extra flesje kunt krijgen en de dop van dát flesje ook kunt gebruiken.

c. P(minstens 1 oranje dop) = 1 - P(geen oranje dop) = $1 - 0{,}95^{30} = 0{,}7854$

d. H_0: p = 0,50 (de fabrikant)

   H_1: p > 0,50

Een rechtszijdige toets met a = 0,10

De meting leverde 57 van de 100

Overschrijdingskans = $P(X \geq 57) = 1 - P(X \leq 56) = 0{,}0666$

Dat is kleiner dan 0,10 dus je moet H_0 verwerpen.

Je moet hem dus gelijk geven.

e. H_0: $p = 0{,}05$ (de fabrikant)

H_1: $p < 0{,}05$

Een linkszijdige toets met $\alpha = 0{,}10$

Stel de grenswaarde vanaf waar H_0 wordt verworpen gelijk aan G

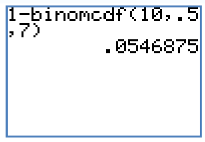
Dan moet gelden $P(X \leq k) < 0.10$

k = 5 geeft kans 0,062 en k = 6 geeft kans 0,123

Om de bewering van de fabrikant te verwerpen moet je dus 5 of minder doppen aantreffen.

Opgave 5

Proefpersoon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
voor toedienen	83	72	95	88	81	110	99	77	85	80	101	91
na toedienen	79	75	88	81	81	99	87	77	86	72	91	83
	-	+	-	-	0	-	-	0	+	-	-	-



We tellen 8-, 2+ en 2 keer een 0.

X: aantal keren -

X ~ binomiaal verdeeld met n=10 en onbekende p.

$H_0 : p = \frac{1}{2}$

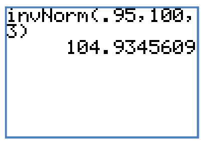
$H_1 : p > \frac{1}{2}$

Onder H_0: $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 0{,}0547$.

Er is geen reden om H_0 te verwerpen.

Opgave 6

a. X: gemiddelde IQ van 25 wiskundestudenten



X ~ normaal verdeeld met μ is onbekend en $\sigma = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3$

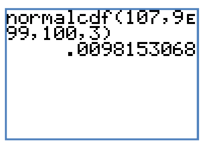
$H_0 : \mu = 100$

$H_1 : \mu > 100$

Onder H_0: $P(X > k) < 0{,}05 \rightarrow k = 104{,}9$

Dus bij een gevonden waarde groter of gelijk aan 104,9 kan je H_0 verwerpen.

b. We hebben gevonden dat het gemiddelde IQ in de steekproef gelijk is aan 107. Je zou op grond van a. dan H_0 verwerpen. Maar als het IQ toch 100 is wat is dan de kans dat je 107 of hoger vindt?



$P(X > 107) = 0{,}0098$

EINDE