Hoofdstuk 3 – de √n-wet

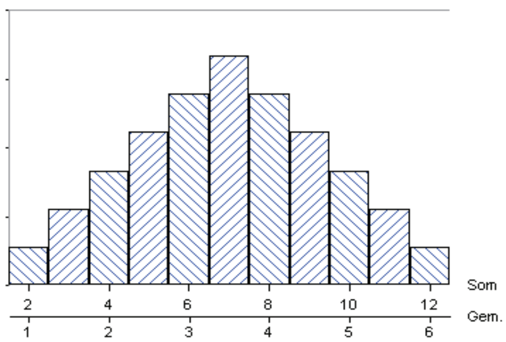
Je gooit me een dobbelsteen. X noemen we het aantal ogen van de worp. Je kunt de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van X uitrekenen met een tabel:

X	P(X)	X·P(X)	X – E(X)	(X – E(X))²	(X – E(X))²·P(X)
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$	$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{24}$
	E(X) =	$3\frac{1}{2}$		Var(X) =	2,92
	μ(X) =	**3,5**		**σ(X) =**	**1,71**

We zien dat $\mu = 3{,}5$ en $\sigma \approx 1{,}71$

Als je nu met twee keer met die dobbelsteen gooit en je noemt het aantal ogen van de eerste worp X en het aantal ogen van de tweede worp Y. Wat is dan de verwachtingswaarde van X+Y en wat is dan de standaarddeviatie van X+Y?

Je zou natuurlijk een nieuwe tabel kunnen maken, maar **handig** is dat niet.



In het algemeen geldt voor onafhankelijke stochasten X en Y:

E(X + Y) = E(X) + E(Y)
Var(X + Y) = Var(X) +Var(Y)

Gevolg:

- E(X+Y)=7
- Var(X+Y)=5,84 $\Rightarrow$ σ(X+Y)=2,42

De som van n onafhankelijke stochasten

$X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ zijn n onafhankelijke stochasten,
elk met dezelfde kansverdeling met $E(X_i)$ en $\sigma(X_i)$
Wat is dan $E(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n)$?
$E(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = n \cdot E(X_i)$
En wat is dan $\sigma(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n)$?
$\sigma(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X_i)$

Voorbeeld

Je gooit 3 keer met een dobbelsteen en telt de worpen bij elkaar op.

- Bereken de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie.

Uitwerking

$$S = X_1 + X_2 + X_3 \text{ met } E(X_i) = 3{,}5 \text{ en } \sigma(X_i) = 1{,}71$$
$$E(S) = 3 \cdot E(X_i) = 3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5$$
$$\sigma(S) = \sqrt{3} \cdot \sigma(X_i) = \sqrt{3} \cdot 1{,}71 \approx 2{,}96$$

Het gemiddelde van n onafhankelijk stochasten

$X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ zijn n onafhankelijke stochasten,

elk met dezelfde kansverdeling met $E(X_i)$ en $\sigma(X_i)$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n}$$

Wat is dan $E(\overline{X})$?

$$E(\overline{X}) = E(X_i)$$

En wat is dan $\sigma(\overline{X})$?

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma(X_i)}{\sqrt{n}}$$

Voorbeeld

Je gooit 3 keer met een dobbelsteen en berekent het gemiddelde dan de worpen.

- Bereken de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie.

Uitwerking

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \text{ met } E(X_i) = 3{,}5 \text{ en } \sigma(X_i) = 1{,}71$$
$$E(\overline{X}) = E(X_i) = 3{,}5 \text{ en } \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma(X_i)}{\sqrt{3}} = \frac{1{,}71}{\sqrt{3}} \approx 0{,}99$$

Oefeningen

Opgave 1

In een brood gaat gemiddeld 2 gram broom. Er wordt een steekproef van 100 broden gedaan en vervolgens wordt het steekproefgemiddelde hiervan vastgesteld. De standaarddeviatie van de populatie is 0,1 gram.

- Bereken de standaarddeviatie van de steekproef.

Opgave 2

In de bussen van Noordwest hangt een bordje '42 zitplaatsen en 39 staanplaatsen, max. laadvermogen 6.129 kg'. Het gewicht van passagiers is normaal verdeeld met een gemiddelde van 71 kg en een standaardafwijking van 21 kg.

- Bereken de kans dat twee passagiers samen meer wegen dan 150 kg.

Opgave 3

De hoeveelheid drank uit een drankautomaat is normaal verdeeld met een verwachtingswaarde van 150 ml en standaardafwijking van 8 ml. Dit wordt gevuld in een beker van 165 ml met een standaardafwijking van 6 ml.

a. Bereken de kans dat in de beker nog minstens 5 ml ruimte over blijft.

De fabrikant wil dat de instelling het vulgemiddelde verlaagd wordt, zodat de kans op een overlopende beker hoogstens 0,1% is.

b. Hoe hoog mag het vulgemiddelde (in tienden van millimeters nauwkeurig) hoogstens zijn, zodat aan de eis van de fabrikant is voldaan?

Uitwerkingen van de oefeningen

Opgave 1

$$\sigma\left(\overline{X}\right)=\frac{0,1}{\sqrt{100}}=0,01$$

Opgave 2

x_1 en x_2 zijn twee onafhankelijke stochasten, elk met dezelfde kansverdeling met $\mu = 71$ en $\sigma = 21$.
$E(x_1+x_2) = 2 \cdot 71 = 142$ en $\sigma(x_1+x_2) = \sqrt{2} \cdot 21 \approx 29,7$

Gegeven:

- X: gewicht van 2 passagiers
- X~Norm(142,29.7)
- $P(X > 150) = 0,394$

Opgave 3

We definiëren een nieuwe stochast V = inhoud beker – hoeveelheid drank.
$\mu(V) = 165 - 150 = 15$ ml en $\sigma(V) = \sqrt{6^2+8^2} = 10$

a. Gevraagd: $P(V > 5) \rightarrow 0,841$
b. Kies $\mu(V)=p$ dan $\sigma=10$ en $P(V < 0) < 0,001$
Met de GR: Y1=normalcdf(-9E99,0,X,10) $\rightarrow$ table $\rightarrow$X minimaal 31
Dus neem als vulgewicht 181 ml.