Taal van de wiskunde 2

Willem van Ravenstein

Voorwoord

Het doel van het wiskundeonderwijs is het leren beheersen van de taal van de wiskunde en het zinvol leren inzetten van de instrumenten van de wiskunde."

Uit "Standpunt van de Resonansgroep wiskunde ten aanzien van de wiskundevoorstellen havo en vwo voor 2007 en later"
13 november 2007

De leerling leert passende wiskundetaal te gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen en leert de wiskundetaal van anderen te begrijpen.

Taakgroep vernieuwing basisvorming, juni 2004

Inhoudsopgave

Laatst bijgewerkt op dinsdag 11 februari 2020

Hoofdstuk 1 - Wiskunde als wetenschap

"Wiskunde is ook streng, precies zeggen wat je bedoelt. Je moet er geen speld tussen kunnen krijgen."
bron: **Erasmus College Zoetermeer**

Bedenksels van de menselijke geest

Over wiskundigen worden, net als over iedereen, grappen gemaakt.
Bijvoorbeeld die grap over die verdwaalde natuurkundige in een ballon.
De natuurkundige ziet onder zich een man lopen en vraagt: '**Waar ben ik?**'
De man peinst een lange tijd en antwoordt uiteindelijk: '**In een ballon!**''.
Waarop de fysicus onmiddellijk weet zij hier te maken heeft met een wiskundige, want:

1. Er moest lang over nagedacht worden
2. Het antwoord is correct
3. Het antwoord is volledig zinloos

Grappig? Misschien... maar 't geeft wel een indruk hoe er (door sommige mensen) over wiskundigen gedacht wordt. Maar dat is niet terecht: wiskunde is een **wetenschap**:

"Wiskunde is een **wetenschap**. Wetenschappen gaan ergens over, zij hebben een object van studie. Wiskunde gaat over abstracte zaken. Bijvoorbeeld over getallen, zoals de natuurlijke getallen: 0,1,2,3, enz. Een getal is abstract. Je komt in de natuur geen getallen tegen. Wiskunde is geen natuurwetenschap. Abstracte zaken zijn door de mens zelf bedacht en deze bedenksels zijn op hun beurt weer object van studie geworden."
prof.dr. F.J. Keune
http://www.math.ru.nl/~keune/oratie/oratie.html

Er is veel 'verwarring' in het wiskundeonderwijs. Eén van de eigenaardigheden van het huidige wiskundeonderwijs is dat de schoolwiskunde geen goed beeld geeft van de wiskunde als wetenschap.

In het voortgezet onderwijs lijkt er weinig aandacht voor 'definities, stellingen en bewijzen'. Dat is eigenlijk vreemd want 'bewijzen' is toch een beetje het 'wezen' van de wiskunde. Sinds de opkomst van het **realistisch wiskundeonderwijs** spelen definities, stellingen en bewijzen maar een beperkte rol.

"De nieuwste trend in het wiskundeonderwijs is *realistische wiskunde*. Ik heb al betoogd dat wiskunde bij uitstek abstract is. Wiskunde is niet realistisch. Realistische wiskunde bestaat niet. Met zoiets bereik je niks, evenmin als met abstract voetballen."
prof.dr. F.J. Keune
http://www.math.ru.nl/~keune/oratie/oratie.html

Uiteindelijk zou het in het onderwijs moeten gaan om de vraag 'Hoe leer je het beste wiskunde?' De meningen daarover zijn verdeeld, dat is duidelijk... Het gaat niet 'helemaal goed' met het (realistisch) wiskundeonderwijs. HBO's en universiteiten klagen steen en been... PABO-studenten kunnen niet rekenen... Wiskundestudenten brengen zonder GR en formulekaart weinig terecht van de instaptoetsen en het gebruik van de **grafische rekenmachine** en de **formulekaart** is misschien toch niet zo'n goed idee... Of is het programma misschien niet goed? Of worden studenten gewoon 'dommer'?

Naar aanleiding van de aansluitingsproblemen tussen het voortgezet onderwijs en het hoger onderwijs wordt er door verschillende commissies en opleidingen (weer) ernstig nagedacht over bijspijkercursussen, het zoeken naar oplossingen en het ontwikkelen van 'nieuwe' wiskundeprogramma's. Dat is niet erg, zo blijft iedereen lekker bezig. 't Is alleen nog maar de vraag of het daarna dan weer beter wordt...

Bedenksels van de menselijke geest...

Wiskunde? Dat is toch eigenlijk allemaal logica?

> "Om te beginnen wil ik een paar misverstanden omtrent de wiskunde uit de weg ruimen. Eén commentaar dat je als wiskundige weleens krijgt is, 'Wiskunde, dat is toch eigenlijk allemaal logica'. Er wordt nog net niet gezegd 'kille logica', daarmee de wiskunde reducerend tot een steriele wereld waarin alleen types als professoren Zonnebloem, Barabas en Sickbock kunnen overleven. Staat u mij toe dat ik hier even op in ga.

> Het is duidelijk dat als we iets beredeneren, wij de regels van de logica moeten gebruiken. Anders praten we onzin. Dat geldt op veel terreinen in ons leven, en zeker in de wiskunde. Maar daar mee is wiskunde nog geen logica. De regels van de logica zijn slechts spelregels. Het echte spel, dat van de wiskunde, moet nog beginnen.

> Neemt u ter vergelijking het populaire spel voetbal. De belangrijkste regel van dit spel zegt dat je de bal niet met de hand mag aanraken, tenzij je keeper bent. Daarnaast zijn er natuurlijk ook nog andere regels. Ondanks al die regels heb ik sommige voetballers tijdens een wedstrijd wondermooie dingen met de bal zien doen. Zo mooi, dat ze naar mijn mening werkelijk niet van deze aarde zijn. En dat zonder de bal met de hand aan te raken. Regels geven vorm aan een spel en binnen hun beperkingen is het daarna aan de spelers om er iets moois van te maken. Dat geldt ook voor het spel wiskunde. Er zijn wiskundigen die werk van buitenaardse schoonheid hebben gedaan, ondanks het feit dat ze gebonden waren aan de regels van die kille logica. En hoewel het publiek wat minder groot is dan dat bij voetbal, is het voor de kenners een genoegen om het werk van deze mensen te bewonderen."

Uit: **Weg van getallen - Frits Beukers**

Wiskunde? Dat is toch allemaal formules?

"Een ander commentaar van vergelijkbaar kaliber is: 'Wiskunde, dat is toch allemaal formules'. Dit is een misvatting die berust op het feit dat men vorm met inhoud verwart. Staat u mij toe dat ik ook hier op in ga door een beeld te schetsen dat ooit eens door Henk Barendregt bedacht is.

von Heun sogenannten „Lagrangeschen Zentralgleichung“:

$$(4) \qquad \sum \psi_i \delta u_i = \delta f - \frac{d}{dx}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial u_i'} \delta u_i\right), \qquad \left(u_i' = \frac{du_i}{dx}\right),$$

während für das n-fache Integral (3) übergeht in:

$$(5) \quad \sum \psi_i \delta u_i = \delta f - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_1}} \delta u_i\right) - \cdots - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_n}} \delta u_i\right).$$

In figuur 1 vindt u onder elkaar een fragment uit een pianosonate van Mozart en een stukje wiskundetekst uit een artikel van Emmy Noether. Beide fragmenten staan vol symbolen die voor de niet-kenners in beide gevallen even betekenisloos zijn. Muziekkenners zullen waarschijnlijk al snel de klanken achter de partituur herkennen en na enig gepuzzel de muziek in het hoofd kunnen doen herleven. Zelfs de niet muziekkenners zullen erkennen dat er een groot verschil bestaat tussen de noten op het papier en het muzikale waarvoor zij staan. Het eerste is de vorm, het tweede is de inhoud. U voelt nu waarschijnlijk waar ik naar toe wil.

De uitspraak dat wiskunde allemaal formules is, heeft dus net zoveel waarde als de uitspraak dat muziek allemaal noten is, of dat schilderkunst alleen maar verf is."

Uit: **Weg van getallen - Frits Beukers**

De stelling van de huisnummers

"U loopt op straat en bent op zoek naar huisnummer 85. Helaas, u heeft pech, want u bevindt zich weliswaar aan de zijde van de oneven nummers, maar wel bij nummer 1, aan het begin van de straat. Niets aan te doen, u wandelt gewoon richting nummer 85. Om de tijd wat te doden telt u de huisnummers, die u aan de oneven kant passeert, bij elkaar op. U moet hier nog 32 minuten zitten, dus ik denk dat er weinig anders te doen valt. U ziet hier het resultaat:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & 1 & = & 1 \times 1 \\ 1+3 & = & 4 & = & 2 \times 2 \\ 1+3+5 & = & 9 & = & 3 \times 3 \\ 1+3+5+7 & = & 16 & = & 4 \times 4 \\ 1+3+5+7+9 & = & 25 & = & 5 \times 5 \end{array}$$

We beginnen met 1. Bij 3 aangekomen hebben we 1 + 3 = 4. Bij 5 aangekomen bedraagt de som al 1 + 3 + 5 = 9 en als we de 7 passeren zitten we al op 16. De achtereenvolgende sommen zijn nu 1, 4, 9 en 16. Wellicht komen deze getallen bekend voor. Het zijn namelijk allemaal kwadraten, 1 × 1, 2 × 2, 3 × 3 en 4 × 4. Dat is opmerkelijk en men kan zich afvragen of dit zo doorgaat. We lopen door en bij 9 aangekomen krijgen we als som 25. En jawel, 25 = 5 × 5. Het lijkt erop dat we hier het begin zien van een wetmatigheid die zich afspeelt in de wereld van de getallen. We formuleren dit als een stelling, die we de **stelling van de huisnummers** zullen noemen. Hij luidt als volgt:

- Kies een getal en noem dit n. Dan is de som van de eerste n oneven getallen een kwadraat, namelijk n^2.

U ziet hieruit dat het met getaltheorie net is als met humor, het ligt gewoon op straat.

Er is echter een probleem. We zijn er namelijk nog lang niet zeker van dat de som ook nog een kwadraat zal zijn als we bij nummer 85 aankomen. Of bij eventueel hogere nummers. Het lijkt er wel op, maar we zijn niet honderd procent zeker. Om er zeker van te zijn dat onze stelling voor **alle** waarden van n geldt, moeten we een bewijs leveren. Elke stelling behoeft een bewijs. Onder een bewijs in de wiskunde verstaan we een redenatie die, met inachtneming van de regels van de logica, anderen ervan moet overtuigen dat een bepaalde bewering te allen tijde waar is. Het is duidelijk dat een bewijs aan de regels van de logica moet voldoen. Anders krijgen we onzin. Maar bovenal bevat een bewijs ook een creatief element, namelijk het inzicht in het **waarom** van een bewering.

(…)

Terug naar de stelling van de huisnummers. Het bewijs daarvoor is niet lastig, en een beetje middelbare schoolwiskunde is daartoe al voldoende."

Uit: **Weg van getallen - Frits Beukers**

Hoofdstuk 2 – Bewijzen met volledige inductie

Het somteken

Met het wiskundige symbool Σ kunnen we (oneindige) reeksen heel kort opschrijven. De letter Σ is de hoofdletter S uit het Griekse alfabet. Het symbool Σ is een **somteken** (en heeft dus alles te maken met optellen):

De formule $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ staat voor de oneindige som $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Voor elk getal $k = 1, 2, 3, \dots$ tel je de breuken $\frac{1}{2^k}$ bij elkaar op.

Voorbeeld:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$

Dit kunnen we anders en korter opschrijven als: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

Opdracht 1

Schrijf de volgende optellingen met behulp van het somteken:

a. $3 + 6 + 9 + \dots + 90 =$

b. $a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n =$

c. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$

Opdracht 2

Bereken:

a. $\sum_{k=1}^{4} \frac{2}{k} =$

b. $\sum_{k=1}^{100} 2k - 1 =$

c. $\sum_{k=1}^{10} \pi =$

Bewijzen met volledige inductie[1]

Er bestaat een techniek die het mogelijk maakt een formule in één klap voor alle getallen tegelijk te bewijzen. Deze techniek wordt **volledige inductie** genoemd.

Voor deze methode hoef je de formule maar voor één geval te controleren, namelijk voor n=1. Verder moet je het 'domino-effect' aantonen. Dit houdt in dat je van een bewijs van de formule voor een bepaald getal een bewijs kunt maken voor het volgende getal. Het bewijs van de formule voor een bepaald getal kun je je voorstellen als een omgevallen dominosteen. Het domino-effect garandeert dat als de formule voor een bepaald getal 'omgevallen is', de formule ook 'omvalt' voor het volgende getal.

Als je n=1 gecontroleerd hebt, heb je de eerste steen omgegooid. Met het domino-effect volgt dan ook de tweede steen, de derde steen, enzovoort. Het domino-effect zorgt er voor dat als de formule 'omgevallen is' voor het lint van alle getallen tot en met de n-de steen, de formule ook omvalt voor de (n+1)-ste steen. Zodoende weet je dan zeker dat de formule 'omvalt' voor alle getallen.

Voorbeeld

$$\text{Te bewijzen}: 1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

Controleer of de formule klopt voor (bijvoorbeeld n=1)

$$\text{Stap 1}: \text{vul } n=1 \text{ in} \rightarrow 1=\frac{1}{2}\cdot 1(1+1)=1 \text{ Klopt!}$$

Laat dan zien dat als de formule klopt voor '**n**' de formule ook klopt voor '**n+1**'.

$$\text{Stap 2}: \text{Laat zien dat het klopt voor } n+1$$

$$1+2+3+\ldots+\underset{n+1}{\underset{\downarrow}{n}}=\frac{1}{2}\underset{n+1}{\underset{\downarrow}{n}}\left(\underset{n+1}{\underset{\downarrow}{n}}+1\right)$$

Dus er moet gelden:

$$1+2+3+\ldots.+n+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Om dit laatste aan te tonen maak je gebruik van de zogenaamde **inductieveronderstelling**. Dat wil zeggen dat je er van uitgaat dat de formule klopt voor 'n'. In dit geval kan je 'links' het stuk van 1 tot met n vervangen door $\frac{1}{2}n(n+1)$.

[1] Uit: Het dominoprincipe door André de Boer | Pythagoras

$$\underbrace{1+2+3+\ldots.+n}_{\frac{1}{2}n(n+1)}+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$(n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\text{ Klopt!}$$

Er is slechts één conclusie mogelijk:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

Opdracht 3

Bewijs met volledige inductie: $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Opdracht 4

Bewijs met volledige inductie de stelling van 'oneven huisnummers': $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$

Opdracht 5

Bewijs met volledige inductie: $3^{2n+1}+2^{n-1}$ is deelbaar door 7

Hoofdstuk 3 – Inleiding in de getaltheorie

Wat is een deler?

a en b zijn twee gehele getallen, we definiëren ‘**b is een deler van a**’ dan en slechts dan als ‘**er een geheel getal q bestaat met $a = q \cdot b$**’.

Notatie

In plaats van ‘b is een deler van a’ schrijven we ‘$b|a$’.

Opdracht 1

Een handige manier om alle delers van een getal te vinden is met behulp van een tabel als hiernaast.

<u>de delers van 24</u>
1 x 24
2 x 12
3 x 8
4 x 6
klaar!

- De delers van 24 zijn: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 en 24.

Geef de delers van:

a. 360
b. 1001
c. 1024
d. 17

Wat is quotiënt en rest?

Voor twee gehele getallen a en b ($b \neq 0$) is q het **quotiënt** en r de **rest** van de deling van a door b, dan en slechts dan als $a = q \cdot b + r$ met q een geheel getal en $0 \leq r \leq |b|$

Voorbeelden

20 : 3 = 6 rest 2 (q=6 en r=2)

32 : 7 = 4 rest 4 (q=4 en r= 4)

Opdracht 2

Bereken quotient en rest:

a. 33 : 12 =
b. 44 : 6 =
c. 123 : 3 =

Priemgetallen

Een priemgetal heeft geen echte delers. Een priemgetal kun je alleen delen door 1 en het getal zelf.

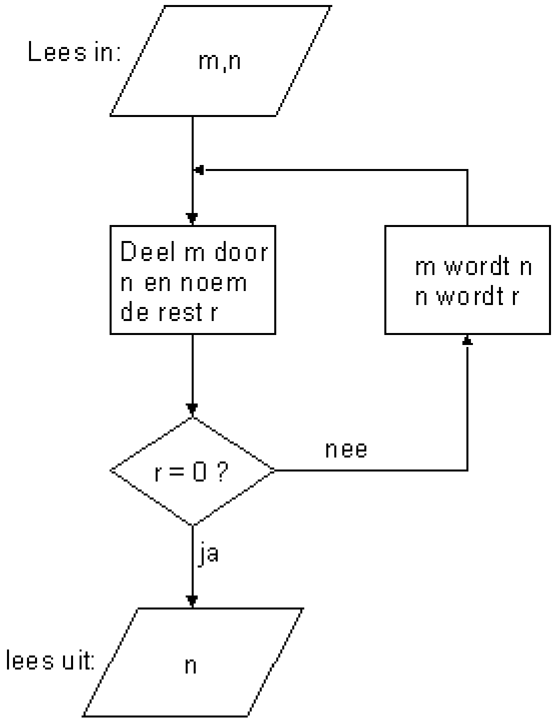
- 2, 3, 5, 7, 11, 13, …

De 'Hoofdstelling' van de getaltheorie:

- Elk positief geheel getal is op precies één manier als product van priemgetallen te schrijven.

In de Disquisitiones arithmeticae, het boek waarmee Carl Friedrich Gauss (1777-1855) in 1801 de moderne getaltheorie inluidde, is de hoofdstelling voor het eerst duidelijk geformuleerd en bewezen. Een getal als 17 kun je niet schrijven als het product van twee (of meer) andere getallen.
Het getal 7653434365367476847891 ook niet.

Hieronder zie je het stroomschema dat hoort bij het **Algoritme van Euclides**.



- m en n zijn twee natuurlijke getallen, waarbij m > n

Voorbeeld:

24 = 1 · 15 + 9
15 = 1 · 9 + 6
9 = 1 · 6 + 3
6 = 2 · 3 + 0
Nu is **r** gelijk aan 0, het algoritme stopt. **n** heeft de waarde 3.

Opdracht 3

Pas het algoritme toe op onderstaande voorbeelden:

- m = 35 en n = 15
- m = 100 en n = 36
- m = 31 en n = 4

Wat berekent het algoritme bij twee gegeven getallen?

De grootste gemene deler

Definitie: Onder de grootste gemene deler van de gehele getallen a en b verstaan we het grootste getal dat deler is van a en b.

Notatie: ggd(a,b)

Voorbeeld: ggd(12,20)=4

Voorbeelden

De delers van 30 zijn: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 en 30.
De delers van 48 zijn: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 en 48.
De grootst gemeenschappelijke deler is 6. We noteren dat als: ggd(30,48)=6
Met behulp van het **algoritme van Euclides** (zie vorige bladzijde) kun je de g.g.d. van twee getallen bepalen.

Relatief priem

Het kan voor komen dat twee getallen, zeg a en b een g.g.d. hebben van 1. Dat wil niet zeggen dat de getallen zelf priemgetallen zijn, het betekent alleen dat deze twee getallen geen gemeenschappelijke delers hebben. Twee getallen a en b waarvoor geldt **ggd (a,b)=1** noemen we **relatief priem**.

Opdracht 4

Welke van de volgende paren getallen zijn relatief priem ?

a. 40 en 78
b. 256 en 243
c. 100 en 45
d. 6 en 21
e. 1001 en 1002
f. 44 en 111111

Modulo rekenen

Modulo rekenen is rekenen met resten. 'Normaal gesproken' zijn er oneindig veel natuurlijke getallen. Als je alleen kijkt naar bijvoorbeeld de '**rest bij delen door 3**' zijn er voor elk willekeurig getal maar 3 mogelijkheden:

- De rest bij delen door 3 is 0. (Het getal is deelbaar door 3.)
- De rest bij delen door 3 is 1.
- De rest bij delen door 3 is 2.

Andere mogelijkheden zijn er niet. Het aardige is nu dat je met deze resten gewoon kunt rekenen.

Voorbeeld:

Je zit op een test en je moet de volgende vraag beantwoorden:

De oppervlakte van een rechthoek van 123 cm bij 234 cm is:

- 28781 cm^2
- 28782 cm^2
- 28783 cm^2

Als het goed is kun je het zo zien! Namelijk als je alleen naar de laatste cijfers kijkt. $3 \cdot 4 = 12$. Dus het antwoord moet eindigen op een 2. In feite reken je dan met resten van 10, we zeggen dan dat je rekent **modulo 10**.
123 = 3 modulo 10 en 234 = 4 modulo 10.
$3 \times 4 = 12 = 2$ (modulo 10)
Conclusie: antwoord **B** is het juiste antwoord.

Het (merkw)aardige is dat allerlei regels, die voor 'normaal' rekenen gelden, nog steeds gelden:

25 + 38 = 63
25 = 1 (modulo 3), 38 = 2 (modulo 3) en 63 = 0 (modulo 3)
Er geldt: 1 + 2 = 0 (modulo 3)

$14 \cdot 89 = 1246$
14 = 2 (modulo 3), 89 = 2 (modulo 3) en 1246 = 1 (modulo 3)
$2 \cdot 2 = 4 = 1$ (modulo 3)

$5^3 = 125$
5 = 2 (modulo 3) en 125 = 2 (modulo 3)
$2^3 = 8 = 2$ (modulo 3)

Je kunt deze eigenschappen bijvoorbeeld gebruiken om snel antwoorden te controleren.

Voorbeeld:
Is $12^9 = 5159780351$?
Antwoord: nee!
Uitleg: 12 = 0 (modulo 3) en 5159780351 = 2 (modulo 3), terwijl $0^9 = 0$ en geen 2 (modulo 3)

Opdracht 5
Bereken de aankomsttijd van een reis die begint om 10 uur en die uit een vliegreis van 21 uur bestaat, een bustocht van 14 uur en een voettocht van 74 uur.

Modulo rekenen 2
In het algemeen geldt:

$a = b \pmod m$ als $a = b + k \cdot m$

Voorbeeld:
$5 = 2 \pmod 3$ want $5 = 2 + 1 \cdot 3$
$7 + 9 = 1 + 0 = 1 \pmod 3$
$35 + 67 = 2 + 1 = 0 \pmod 3$

Voorbeeld:
$10 \pmod 9 = 1$
$100 \pmod 9 = 1$
$1000 \pmod 9 = 1$
…
$3287 = 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \pmod 9$
dus $3287 = 3 + 2 + 8 + 7 = 20 = 2 \pmod 9$

Uit bovenstaande blijkt dat, als een getal deelbaar is door 9, de som van de cijfers ook deelbaar door 9 moet zijn.

Opdracht 6

a. Is 1234 deelbaar door 9 ?
b. Is 12389838989198388199999 deelbaar door 9 ?
c. Is 1234 × 8972 = 11072448 ?
d. En is 12345 × 54321 = 671492745 ?

Vermenigvuldigen

Zoals gezegd kun je ook bij het modulo rekenen dezelfde bewerking uitvoeren als bij 'normaal' rekenen. Je kunt optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen.

Voorbeeld:

Neem aan dat we rekenen in modulo 7.
Hieronder staat de vermenigvuldigingstabel:

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Meer verschillende vermenigvuldigingen zijn er niet.

Twee eigenschappen:

- De tabel is symmetrisch (t.o.v. de hoofddiagonaal)
- De getallen (0 t/m 6) komen precies één keer voor in elke rij en in elke kolom, met uitzondering van de rij en kolom van nul.

Opdracht 7

Je kunt met de tabel van modulo 7 ook gebruiken om terug te rekenen.

- Met welk getal moet je 5 vermenigvuldigen om 3 (modulo 7) te krijgen ?
- Met welk getal moet je 4 vermenigvuldigen om 3 (modulo 7) te krijgen ?

Geef de vermenigvuldigingstabel van modulo 6.

- Kloppen bovengenoemde eigenschappen hier ?
- Met welk getal moet je 5 vermenigvuldigen om 3 (modulo 6) te krijgen ?
- Met welk getal moet je 4 vermenigvuldigen om 3 (modulo 6) te krijgen ?
- Wat valt je op ? Hoe komt dat?

Het kleinst gemene veelvoud

Definitie: Onder het kleinst gemene veelvoud van de gehele getallen a en b verstaan we het kleinste getal waarvan a en b deler zijn.

Notatie: kgv(a,b)

Voorbeeld: kgv(3,4)=12

Voorbeeld:

De delers van 10: 1, 2, 5 en 10
De delers van 15: 1, 3, 5 en 15
Het ggd(10,15)=5
Veelvouden van 10: 10, 20, 30, 40, 50,…
Veelvouden van 15: 15, 30, 45, 60,…
Het **kgv(10,15)=30**

Stelling

Voor de gehele getallen a en b geldt:

- $\text{kgv}(a,b) = \dfrac{a \cdot b}{\text{ggd}(a,b)}$

Voorbeeld

Als a=10 en b=15 dan $\text{kgv}(10,15)=\dfrac{10 \cdot 15}{5}=30$

Opdracht 8

Bereken het kgv van:

a. 12 en 13
b. 8 en 20
c. 198 en 201

Deelbaarheid

Voor het rekenen met hele getallen is het handig als je ‘snel’ kan zien of een getal deelbaar is door 2, 3, 4, 5, 6, 7, … Met name zijn natuurlijk de priemgetallen interessant.

Deelbaar door 2, 4, 8 en 16.

Als het laatste cijfer even is dan is het getal deelbaar door 2.
Als het getal gevormd door de laatste 2 cijfers deelbaar is door 4 dan is het getal deelbaar door 4.
Als het getal gevormd door de laatste 3 cijfers deelbaar is door 8 dan is het getal deelbaar door 8.
Als…

Deelbaar door 3 en 9

Als de som van de cijfers (eventueel herhalen!) deelbaar is door 3 dan is het getal deelbaar door 3.
Als de som van de cijfers (eventueel herhalen!) deelbaar is door 9 dan is het getal deelbaar door 9.

Voorbeeld

De som van de cijfers van 24123 is 2+4+1+2+3=12, dus 24123 is deelbaar door 3 en 24123 is niet deelbaar door 9.

Deelbaar door 5 en 10

Als het laatste cijfer een 0 of een 5 is dan is het getal deelbaar door 5.
Als het laatste cijfer een 0 is dan is het getal deelbaar door 10.

Deelbaar door 6

Als een getal deelbaar is door 2 **en** door 3 dan is het getal deelbaar door 6.

Deelbaar door 7

Een algoritme om te bepalen of een getal deelbaar is door 7:

- Haal het laatste cijfer van het getal af.
- Verdubbel dat getal en trek het af van het nieuwe getal.
- Herhaal dit zo lang mogelijk.
- Is het uiteindelijke getal deelbaar door 7 dan was het begingetal dat ook!

Voorbeeld: Is 3101 deelbaar door 7?

- Haal de laatste 1 weg..
- 310 - 2 = 308
- Haal 8 weg...
- 30 - 16 = 14
- 14 is deelbaar door 7, dus 3101 is deelbaar door 7

Waarom werkt dit? Het laatste cijfer weg halen en dan het dubbele er van af trekken is hetzelfde als veelvouden van 21 er aftrekken. Kijk maar 3101, 1 er af minus 2 is 308 en 3101 - 308 = 2793, maar 2793 is 133 x 21, een veelvoud van 21 is deelbaar door 7. Wel handig omdat het getal snel kleiner wordt.

Deelbaar door 11

- Zet voor alle cijfers om en om een plus en een min.
- Tel daarna alle cijfers op.
- Als de uitkomst deelbaar is door 11 dan is het hele getal deelbaar door 11.

Voorbeeld: Is 71126 deelbaar door 11?

- +7-1+1-2+6=11. Dit is deelbaar door 11 dus is 71126 deelbaar door 11.

Opdracht 9

a. Waarom werkt de som van de cijfers bij deelbaarheid door 9?
b. Waarom werkt het algoritme voor de deelbaarheid door 11?

Hoe bereken je het aantal delers?

Laten we eens naar een voorbeeld kijken. 24 is deelbaar door…!?
Eerst maar 's ontbinden in priemfactoren: $24=2^3\cdot 3$

De delers van 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 en 24.

$1 = 1 = 2^0\cdot 3^0$
$2 = 2 = 2^1\cdot 3^0$
$3 = 3 = 2^0\cdot 3^1$
$4 = 2^2 = 2^2\cdot 3^0$
$6 = 2\cdot 3 = 2^1\cdot 3^1$
$8 = 2^3 = 2^3\cdot 3^0$
$12 = 2^2\cdot 3 = 2^2\cdot 3^1$
$24 = 2^3\cdot 3 = 2^3\cdot 3^1$

Maar dat zijn mogelijk combinaties van 3 tweeën en 1 drie.
Bij 3 tweeën heb je 4 mogelijkheden (0, 1, 2 of 3).
Bij 1 drie heb je 2 mogelijkheden (0 of 1)
Er zijn $4 \cdot 2 = 8$ mogelijkheden.
24 heeft 8 delers.

Opdracht 10

Hoeveel delers heeft 768?

Opdracht 11

Wat is het kleinste getal met 15 delers?

Hoofdstuk 4 – Bewijzen

Een domoor, een natuurkundige en een wiskundige maken een wandeling door Schotland. Als ze een zwart schaap zien, zegt de domoor 'Alle schapen in Schotland zijn zwart'. 'Nee', zegt de natuurkundige, 'Er is minstens één zwart schaap in Schotland'. Waarop de wiskundige zegt: 'Welnee, er is minstens één zwart schaap in Schotland dat minstens aan één kant zwart is.'

Stel je voor dat iemand beweert een formule te hebben gevonden om **priemgetallen** te maken. Deze persoon beweert dat de volgende formule voor alle n een priemgetal P_n oplevert: $P_n=n^2 + n + 41$

Zou dat nu ook echt zo zijn?
Even proberen:

n=0 geeft $P_0=41$ Klopt!
n=1 geeft $P_1=43$ Klopt!
n=2 geeft $P_2=47$ Klopt!
n=3 geeft $P_3=53$ Klopt!
...

Maar ja, blijft dit **altijd** goed gaan? Je mag het proberen, maar het gaat best lang goed...

Opdracht 1

a. Bij welke waarde voor n gaat het zeker fout? Waarom?
b. Is dat voor n=1,2,... de eerste keer dat het fout gaat? Weet je dat zeker?

Zo zijn er ook polynomen die juist **geen priemgetallen** opleveren. Zo geeft n^6+1091 alleen maar getallen die **niet priem** zijn... behalve dan voor n=3906, 4620, 5166, 5376, 5460,...

Opdracht 2

Hoe kan je laten zien dat 3906^6+1091 een priemgetal is?

Kortom: voorbeelden zijn geen bewijs!

Veel beroemde **stellingen** in de wiskunde zijn hun bestaan begonnen als **vermoeden**. In de wiskunde is er een groot verschil tussen 'onbewezen vermoedens' en 'bewezen stellingen'.

De laatste stelling van Fermat

door Peter Lanser
[isbn 90 5041 065 0]

"In **1637** schreef de Franse wiskundige Pierre de Fermat in de marge van een Grieks wiskundeboek: 'De vergelijking $x^n + y^n = z^n$, met *x*, *y*, *z* en *n* positieve gehele getallen, heeft geen oplossing als $n > 2$. Ik heb hiervoor een waarlijk spectaculair bewijs, maar helaas is deze kantlijn te smal om het te bevatten'."

"Honderden jaren hebben wiskundigen geprobeerd deze stelling te bewijzen. Alle pogingen bleven tevergeefs tot in 1993 Andrew Wiles de (wiskunde)wereld verbijsterde met de mededeling dat hij het probleem had opgelost. Hij had het bewijs gevonden! In dit boekje wordt de geschiedenis van deze stelling behandeld, beginnend bij Pythagoras en eindigend met de oplossing."

De laatste stelling van Fermat

Opdracht 3

Voor n=2 zijn er wel oplossingen te vinden.

Als a, b en c $\in \mathbb{N}$ waarvoor geldt: $a^2+b^2=c^2$ dan noemen we a, b en c een **Pythagoreïsche tripel**.
Er zijn oneindig veel van deze tripels en er is een manier om ze te maken:

Neem n, m $\in \mathbb{N}$ met n>m.
Als $a=n^2-m^2$, $b=2nm$ en $c=n^2+m^2$, dan zijn a, b en c **altijd** een Pythagoreïsche tripel.

- Bewijs dit.

Wat is zekerheid?

In **opdracht 1 van hoofdstuk 2** kwam je deze reeks tegen:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$$

De vraag is: wat komt er uit deze 'oneindige som'? Met een computerprogramma of je GR zou je een benadering kunnen vinden. Voor n=10 geeft dat:

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k^2}\approx 1{,}549767731.$$

Of met n=1000 nemen en 25 decimalen:

$$\sum_{k=1}^{1000}\frac{1}{k^2}\approx 1{,}643934566681559803139058$$

Je ziet dat de 'totale som' steeds groter wordt als n groter wordt. Dat is wel logisch omdat er steeds **positieve termen** bij komen... dus de som wordt steeds groter en groter... of toch niet?

Eigenschap

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)}$$

Bewijs:

$$2k^2\ge k(k+1)$$

$$\frac{2}{2k^2}\le\frac{2}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k^2}\le\frac{2}{k(k+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)}$$

Bovendien geldt: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)}=2$. Je kunt nu met **zekerheid** stellen dat $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\le 2$

Dat is wel bijzonder: 'iets' **neemt alleen maar toe**, maar dat 'iets' wordt **nooit groter dan 2**. Kan dat eigenlijk wel?

Nog gekker: bij onderstaande som van de **harmonische rij** is de uitkomst juist **wel** oneindig. Terwijl er toch, zo op 't oog, niet veel meer aan de hand is. Er komt wel steeds iets bij maar dat wordt toch snel minder en minder...

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+...$$

Erg 'hard' gaat het trouwens niet:

$$\sum_{k=1}^{1.000}\frac{1}{k}\approx 7,5$$

$$\sum_{k=1}^{1.000.000}\frac{1}{k}\approx 14,4$$

Je kan je misschien voorstellen dat als je de laatste reeks met de hand uit moet rekenen dat je daar dan wel even mee bezig bent...

Stel je voor dat 'iemand' beweert dat deze 'oneindige som' nooit boven de 100 uit komt... en je zou het willen narekenen (met de hand!) tot en met de **miljoenste term**... dan ben je wel even bezig... en, erger nog, dan weet je nog niks. Dat kan niet de bedoeling zijn...

In de wiskunde wil je **absolute zekerheid**. Je kunt niet af gaan op voorbeelden, benaderingen, vage ideetjes of op je gevoel. Een **vermoeden** in de wiskunde wordt pas een **stelling** als onomstotelijk is vast te komen staan dat de stelling **waar** is.

Deze **wiskundige zekerheid** is van een hele andere orde dan de andere 'zekerheden' in deze wereld.

In het **burgerlijk wetboek**, bijvoorbeeld, staat dat een huiseigenaar de eerste 3 jaar dat hij eigenaar geworden is de huur niet mag op zeggen op grond van dringend eigen gebruik. Ben je dan als huurder er ook zeker van dat dit niet zal gebeuren? Het staat immers in de wet. Helaas... politiek en rechtspraak zijn geen wiskunde.

Voorstanders van **kernenergie** zeggen altijd dat de kans dat er iets ernstig mis gaat met zo'n kerncentrale zo klein is dat het eigenlijk niet mis kan gaan. Ze weten dat heel zeker, maar 't is geen wiskunde... dus... zou 't zomaar mis kunnen gaan.

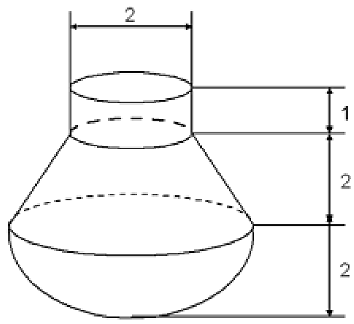
Hoofdstuk 5 – De grafische rekenmachine

De grafische rekenmachine is een handige hulp bij het rekenen, maar je moet je wel realiseren dat er ook beperkingen zijn. De rekenmachine geeft 'slechts' **benaderingen**, geen exacte waarden.

Leerlingen en studenten gebruiken de rekenmachine vaak in situaties waar dat niet nodig is of zelfs contraproductief. Meestal is het veel handiger om met **exacte waarden** door te rekenen. Laat bijvoorbeeld π of wortels gewoon staan. Als er een benadering wordt gevraagd, dan is het vaak veel handiger om met exacte waarden door te rekenen en pas op het allerlaatst een benadering te geven.

Voorbeeld

Hiernaast zie je een tekening van een 'drompel'. Dit lichaam bestaat uit een halve bol, een afgeknotte kegel en een cilinder. De afmetingen in cm staan in de tekening.



De vraag:
Bereken op 1 decimaal nauwkeurig de totale inhoud in cm^3.

Uitwerking

$$\text{cilinder}: \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$$

$$\text{afg. kegel}: \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 2 = \frac{14}{3}\pi$$

$$\text{halve bol}: \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{16}{3}\pi$$

$$\text{totale inhoud} = 11\pi \approx 34{,}6 \text{ cm}^3$$

Voorbeeld

Een uitdrukking als $\dfrac{3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$ is nog een heel gedoe om in te tikken op je GR terwijl je eigenlijk zo kan zien wat er uitkomt, toch?

Opdracht 1

a. Vereenvoudig $\dfrac{3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$

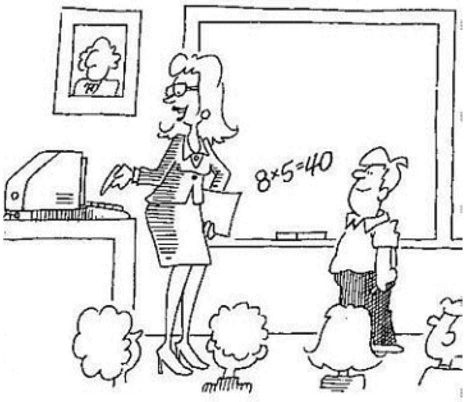
b. Welke 'regel' gebruik je daarbij?

c. Vereenvoudig $\dfrac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$

Mijn conclusie: het gebruik van de grafische rekenmachine kost soms meer tijd, levert niet altijd meer op en leidt niet noodzakelijkerwijs tot een beter inzicht.

Als je (te) veel rekenwerk door de rekenmachine laat doen dan raakt je eigen **rekenvaardigheid** in de vergetelheid. De meest eenvoudige berekeningen kan je dan niet meer zonder rekenmachine.

Dat is ‘op zichzelf’ al erg lastig, maar vooral ook als je les geeft. Je voelt je tijdens een uitleg veel **zekerder** als je de dingen die je uit moet rekenen gemakkelijk uit je hoofd kan en daar geen fouten bij maakt.



"Ik denk dat dat klopt,
maar laat me even controleren..."

Maar ook bij tentamens kan het intikken van allerlei dingen in je GR en van alles uitproberen erg veel tijd kosten terwijl dat eigenlijk niet nodig is en je die tijd misschien beter kan gebruiken. Bovendien kan je je nog 's aardig vergissen als je iets met je GR doet...

Opdracht 2

- Onderzoek $f(x)=\dfrac{\sqrt{64-x^2}}{8x}$ op asymptoten.

Uiteraard kan je je grafische rekenmachine inzetten als controlemiddel. Je kunt (soms) snel even controleren of je antwoord zou kunnen kloppen.

Opdracht 3

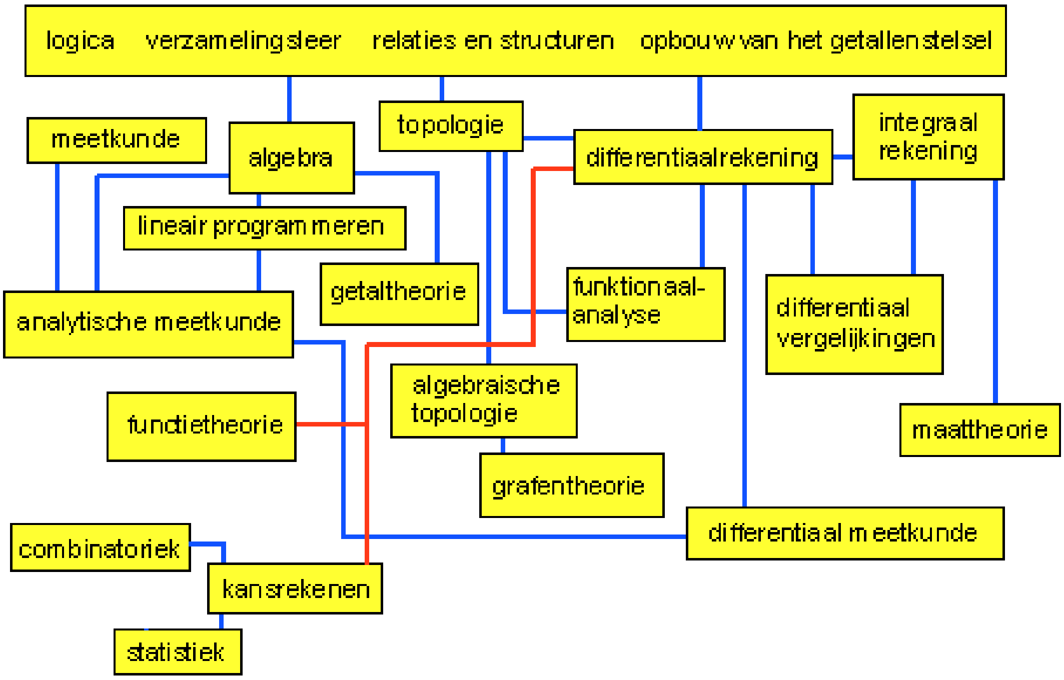
Een leerling lost een logaritmische vergelijking op en controleert het antwoord met de grafische rekenmachine.

$$3+{}^{3}\log(x-1)={}^{3}\log(2x+4)$$
$${}^{3}\log(27)+{}^{3}\log(x-1)={}^{3}\log(2x+4)$$
$${}^{3}\log(27x-27)={}^{3}\log(2x+4)$$
$$27x-27=2x+4$$
$$25x=31$$
$$x=1\frac{6}{25}$$

Mijn TI-83 geeft hele andere waarden aan, namelijk 1,75. Wat doe ik fout?
Goede vraag! Wat doet hij fout?

Hoofdstuk 6 – Overzicht van de wiskunde

Aan de hand van de 'Atlas van de wiskunde' heb ik onderstaand schema gefabriceerd. Het boekje, uit 1977, heb ik gekocht van de boekenbon die ik kreeg bij 't afscheid van mijn eerste baantje als wiskundedocent. Of het overzicht helemaal volledig is? En of het allemaal klopt? Het schema geeft (hoop ik) wel een idee van de verschillende onderdelen van de wiskunde en de onderlinge samenhang:



Als het goed is kom je een aantal 'herkenbare vakken' tegen... maar waarschijnlijk zie je ook wel een aantal 'nieuwe' onderwerpen.

In het programma van de lerarenopleiding kun je (uiteraard!) veel deelgebieden uit bovenstaand schema terug vinden. Denk maar aan analyse, algebra, meetkunde, lineaire algebra en statistiek. Daarnaast krijg je vakken als vakdidactiek, gecijferdheid, wiskunde en leergebieden, wiskunde en cultuur, taal van de wiskunde en nog zo wat... Uiteindelijk bestaat ongeveer **37%** van de studiepunten van je opleiding uit 'wiskundevakken'.

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs hanteerde we (tot voor kort) voor wiskunde 'grofgezegd' de volgende indeling:

- Rekenen, meten en schatten
- Algebraïsche verbanden
- Meetkunde
- Informatieverwerking en statistiek

Zie **Kerndoelen 'oude' basisvorming** en **nieuwe kerndoelen van de basisvorming**

Waar is wiskunde goed voor?

Het antwoord op de vraag **'waar is wiskunde goed voor?'** is zeer afhankelijk van de persoon die de vraag beantwoord. Laten we volstaan met een citaat:

"Voor veel wetenschappers en technici is de wiskunde vooral **een doos gereedschappen**. Natuurwetenschappers gebruiken deze gereedschappen dermate intensief dat wiskunde gewoonlijk in één adem met de natuurwetenschappen wordt genoemd.

(...)

Bèta's hebben vaak minder inzicht in wiskunde dan men denkt: het **hanteren van gereedschap** is iets anders dan het **begrijpen**, laat staan het **uitvinden** ervan.

(...)

Wiskundigen bestuderen bepaalde **abstracties** - zoals meetkundige figuren en getallen - en daarmee dus de wereld van hun eigen hersenspinsels. Dat lijkt een sterk naar binnen gekeerde activiteit. Dat is het soms ook. De maatschappij is er wel totaal door veranderd. Zonder wiskunde was de **technologische vooruitgang** onmogelijk geweest.

(...)

In de wiskunde beschrijf je een situatie (van objecten met zekere eigenschappen) en kom je tot conclusies op grond van **logische argumenten alleen**. Hierdoor wordt er een absolute graad van **zekerheid** bereikt. Mocht het zo zijn dat de beschreven situatie (precies of bij benadering) in de werkelijkheid voorkomt, dan weet je ook dat de gevonden conclusies (precies of bij benadering) gelden. Dat is de achtergrond van **de toepasbaarheid van de wiskunde**."

Bron: Wiskundig Denken - F.J. Keune
(met hier en daar wat weggelaten, de **vetgedrukte** zinsdelen zijn van mijn hand)

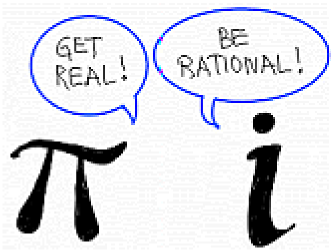
Opdracht 1

Maar wat denk jij daar eigenlijk van? Wat is het beeld van 'wiskunde' van jou tot nu toe? Komt dat overeen met de 'dingen' die je daar in deze reader over gelezen hebt? Of is jouw ervaring toch een beetje anders?

En wat ga jij straks tegen leerlingen zeggen als ze vragen 'waar is wiskunde nu eigenlijk voor nodig?'.

Hoofdstuk 7 – Verzamelingen

"Het wiskundeonderwijs zou als primair doel moeten hebben het logisch denken te leren. Dat heeft een maatschappelijk nut dat ver uit gaat boven alle wiskundegebruik bij elkaar!"
Prof. Dr F.J. Keune in zijn inaugurele rede, 1998



Getalverzamelingen en notaties

$\mathbb{N}$

De verzameling van **natuurlijk getallen** bestaat uit gehele, positieve getallen en nul:

{ 0, 1, 2, 3, ... }

We duiden deze verzameling aan met $\mathbb{N}$. Sommige wiskundigen beginnen trouwens liever met 1, maar dat terzijde...

In de verzameling $\mathbb{N}$ kan je optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen en je hoeft je geen zorgen te maken of je uitkomst wel een element van $\mathbb{N}$ is, want dat zit wel goed.

$\mathbb{Z}$

Nu is het alleen jammer dat niet altijd alles kan. Zo kan je in $\mathbb{N}$ geen getal m vinden waarvoor geldt:

m + 6 = 2

Dat is jammer... Als je $\mathbb{N}$ uitbreidt met de negatieve getallen dan zou het wel kunnen. Die verzameling noemen we de verzameling van **gehele getallen** en wordt aangeduid met $\mathbb{Z}$. Naast de natuurlijke getallen bevat $\mathbb{Z}$ de negatieve getallen:

{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

$\mathbb{Q}$

Het is alleen jammer dat niet alles kan. Je kunt in $\mathbb{Z}$ geen getal m vinden waarvoor geldt:

m × 6 = 2

Dat is jammer... Als je $\mathbb{Z}$ uitbreidt met breuken dan zou het wel kunnen. Die verzameling noemen we de verzameling van **rationale getallen** en wordt aangeduid met $\mathbb{Q}$. Naast de gehele getallen bevat $\mathbb{Q}$ de gebroken getallen.

$\mathbb{R}$

Maar in ook $\mathbb{Q}$ kan nog niet alles. Je kunt in $\mathbb{Q}$ geen getal m vinden zodat:

$m^2 = 2$

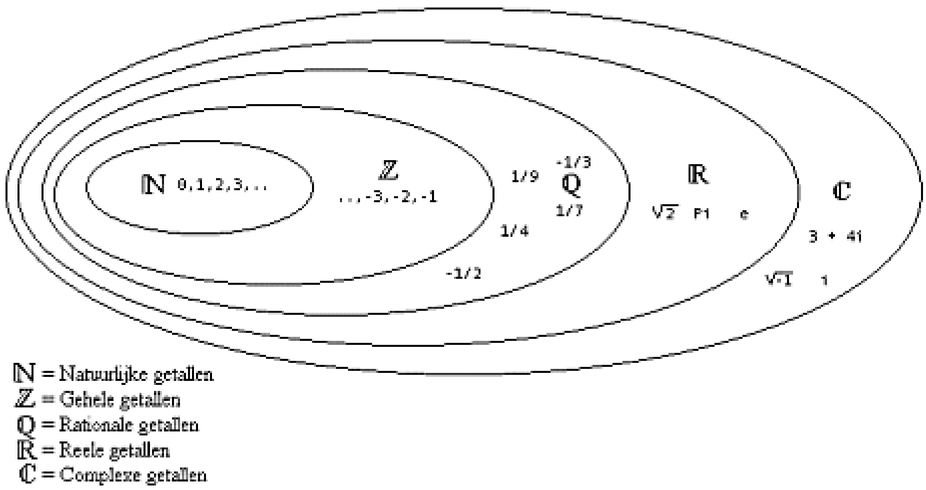
Dat is jammer... Als je $\mathbb{Q}$ uitbreidt met de irrationale getallen (dat zijn getallen die je **niet** als breuk kan schrijven) dan kan het wel. Die verzameling noemen de verzameling van **reële getallen** en wordt aangeduid met $\mathbb{R}$. Naast de rationale getallen bevat $\mathbb{R}$ ook de irrationale getallen. Je kunt daarbij denken aan $\sqrt{2}$, maar ook aan π, e en ϕ.

$\mathbb{C}$

Nog steeds niet tevreden? Nou nee... Het zou ook wel 'aardig' zijn als er een getal m te vinden zou zijn waarvoor geldt:

$m^2 = -1$

In $\mathbb{R}$ zeg je dan 'dat kan niet' of 'geen oplossing'. Als je $\mathbb{R}$ uitbreidt met de **imaginaire getallen** dan kan het wel. Die verzameling noemen we de verzameling van **complexe getallen** en wordt aangeduid met $\mathbb{C}$. Naast de reële getallen bevat $\mathbb{C}$ de imaginaire getallen.



Verzamelingen en bewerkingen hebben iets met elkaar te maken. Je zou bijvoorbeeld kunnen zeggen dat de verzameling $\mathbb{N}$ **gesloten** is ten opzichte van **optellen** maar niet voor **aftrekken**. Bij het oplossen van vergelijkingen heb je (waarschijnlijk) geleerd dat de wortel uit een negatief getal niet bestaat, maar dat hangt er dan nog maar af. In het voortgezet onderwijs gaat het (meestal) alleen om $\mathbb{R}$.

Verzamelingen

$\mathbb{N}$	verzameling van de **natuurlijke getallen**: {0, 1, 2, 3, 4, 5,...}
$\mathbb{Z}$	verzameling van de **gehele getallen**: {..., -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}
$\mathbb{Q}$	verzameling van de **rationale getallen**, dat wil zeggen alle getallen die als een breuk (verhouding, ration) zijn te schrijven
$\mathbb{R}$	verzameling van alle **reële getallen** (rationale én irrationale getallen, zoals alle wortels, π, e, enz.
$\mathbb{N}'$	de verzameling van de **natuurlijke getallen zonder 0**. Evenzo worden soms de andere verzamelingen met een accent gebruikt
$\mathbb{Z}^+$	is de verzameling van **positieve gehele getallen**. Evenzo worden de andere verzamelingen met een plusje gebruikt
$\{x \in A \mid x>2\}$	deze vorm van een verzameling schrijven heet de verzamelingenbouwer; lees dit als: de verzameling van alle x uit verzameling A waarvoor geldt: x is groter dan 2.
$\varnothing$	de lege verzameling

Notaties

$\subset$	$A \subset B$	verzameling A is **deelverzameling** van verzameling B
$\in$	$a \in X$	a **is element van** verzameling X of a zit in X
$\notin$	$a \notin A$	a **is geen element van** A ofwel a zit niet in A
$\cap$	$A \cap B$	de **doorsnede** van A en B of A doorsnede B is de verzameling van alle elementen die A en B gemeenschappelijk hebben
$\cup$	$A \cup B$	de **vereniging** van A en B of A verenigd met B is de verzameling van alle elementen die in A of B zitten: $A \cup B$ bestaat dus uit alle elementen van zowel A als B met eventueel dubbel slechts één keer opgenomen
$\backslash$	$A \backslash \{2,3\}$	de verzameling A met **daar uit weggelaten** de elementen van de verzameling {2,3}
$\neg$	$\neg A$	de verzameling van elementen die **niet** in A zitten

Opdracht 1

Wat staat hier?

a. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x + 6 = 2\}$
b. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \cdot 6 = 2\}$
c. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = x\}$
d. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$
e. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Opdracht 2

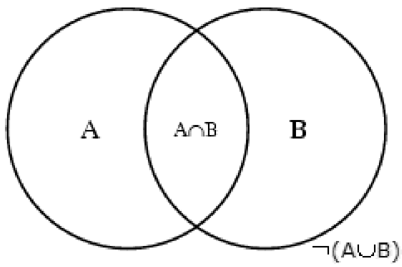
Waarom is $\sqrt{2}$ geen rationaal getal?
Zoek dat bewijs op! (bijvoorbeeld op Internet).

Opdracht 3

Waar of niet waar?

a. $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$
b. $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N}$
c. $-4 \notin \mathbb{N}$
d. $\{0,1,2,3\} \cap \{3,6,9,12\} = 3$
e. $\sqrt{207936} \in \mathbb{N}$
f. $\varnothing \subset \mathbb{R}$
g. $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}' = \{0\}$

Wat is een Venn-diagram?

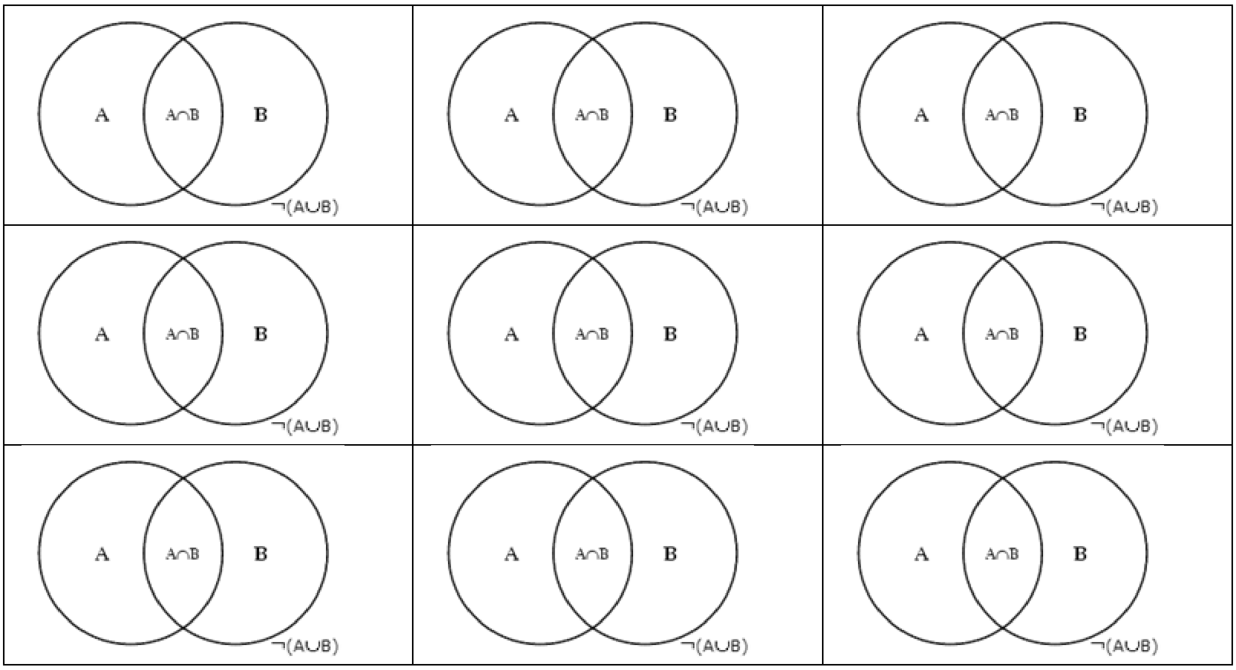


Een **Venn-diagram** is een methode om verzamelingen weer te geven. Hiernaast zie je een Venn-diagram van twee verzamelingen.

Het diagram bestaat uit twee snijdende cirkels, hierdoor ontstaan 4 gebieden:

1. A
2. B
3. $A \cap B$
4. $\neg(A \cup B)$

Opdracht 4

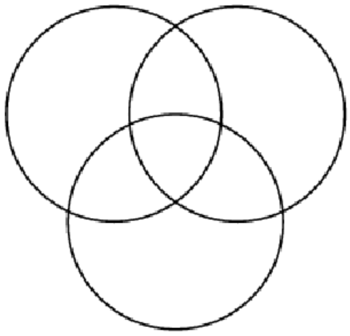


Kleur de verzameling:

1. $\neg(A \cap B)$
2. $\neg(A \cup B)$
3. $\neg A \cap B$
4. $\neg A \cup B$
5. $\neg A \cap \neg B$
6. $\neg A \cup \neg B$
7. $(A \cap B) \cup (\neg A \cap \neg B)$
8. $(A \cup B) \cap (\neg A \cup \neg B)$
9. $(A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B)$

Opdracht 5

Uit een onderzoek in het kader van statistiek zijn de volgende gegevens bekend: Er komen 78 leerlingen met de fiets naar school, 50 met de trein en 28 met de bus. Verder is vastgesteld dat 6 leerlingen met de fiets en de trein komen, 18 leerlingen met de trein en de bus en 8 met de bus en de fiets. Geen enkele leerling gebruikt de trein, bus en fiets.



a. Verwerk de gegevens in een Venndiagram.
b. Hoeveel leerlingen nemen alleen de fiets?

Hoofdstuk 8 – Waarheidstabellen en omkeerbare stellingen

Waarheidstabellen worden gebruikt in de (propositie-)logica om te beslissen of een logische uitdrukking al dan niet waar is. Neem aan dat A en B twee 'beweringen' zijn. Als A **niet waar** is geven we A de waarde **0** en als A **waar** is dan de waarde **1**. We spreken af dat $A \wedge B$ (spreek uit als A **en** B) waar is als zowel A als B waar is en we spreken af dat $A \vee B$ (spreek uit als A **of** B) waar is als A waar is of B waar is of beiden.

Hieronder vind je daarvan een overzicht:

A	B	A en B	A of B	A ⇒ B	niet A	niet B
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0

De **logische implicatie** is in de logica een bewering van de vorm 'Als A dan B'. Deze bewering is alleen **niet waar** als A **waar** is en B **onwaar**. Meestal wordt de implicatie weergegeven met een pijl.

$A \Rightarrow B$ betekent 'Als A dan B'.

Dat zijn lastige dingen. De implicatie geeft vaak aanleiding tot allerlei verwarring. In veel stellingen kan je de implicatie tegen komen. Vaak gaat de implicatie slechts één kant uit. Soms ook niet... Je komt vaak de formulering '**Dan en slechts dan als...'** tegen. Soms wordt dat afgekort tot 'd.e.s.d.a'. Als symbool gebruik je daarvoor '⇔'. We spreken in dat verband dan van een **equivalentie** (ook wel bi-implicatie) van twee uitspraken.

Voorbeeld

Je wilt aantonen: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Met twee waarheidstabellen kan je laten zien dat het juist is:

A	B	A of B	Niet A of B
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

A	B	Niet A	Niet B	Niet A en Niet B
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Zoals je ziet is de 'rechter kolom' hetzelfde.

Conclusie: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Opdracht 1

Toon aan: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

A	B	A en B	Niet A en B
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

A	B	Niet A	Niet B	Niet A of Niet B
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Opdracht 2

a. Is '$A \Rightarrow B$' hetzelfde als '$\neg A \Rightarrow \neg B$'?

b. Is '$A \Rightarrow B$' hetzelfde als '$B \Rightarrow A$'?

c. Is '$A \Rightarrow B$' hetzelfde als '$\neg B \Rightarrow \neg A$'?

Opdracht 3

Waar of niet waar?

a. $x=3 \Leftrightarrow x^2=9$

b. $a>10 \wedge b>5 \Leftrightarrow ab>50$

c. $(a+b=3) \wedge a \cdot b=2 \Leftrightarrow (a=1 \wedge b=2) \vee (a=2 \wedge b=1)$

Omkeerbare stellingen

De **stelling** van Pythagoras:

> "In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de lengte van de hypotenusa gelijk aan de som van de kwadraten van de lengtes van de rechthoekszijden".

De **omgekeerde stelling** van Pythagoras:

> "Als in driehoek ABC geldt dat het kwadraat van de langste zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de andere zijden, dan is driehoek ABC rechthoekig."

In de omgekeerde stelling kan je de woorden 'hypotenusa' en 'rechthoekszijde' natuurlijk niet gebruiken. Niet alle stellingen zijn 'zondermeer' omkeerbaar.

Opdracht 4

Omkeerbare stelling of niet?

a. "Een goed wiskundige is van nature lui"

b. "Roken brengt u en anderen rondom u ernstige schade toe"

c. "Een vierkant is een ruit"

Opdracht 5

Als je zegt 'als je goed oplet dan haal je het tentamen' dan zeg je 'formeel' gesproken:

A: je let goed op
B: je haalt het tentamen

A ⇒ B is een ware bewering.

a. Vraag: als je goed oplet haal je dan het tentamen?
b. Vraag: als je **niet** goed oplet haal je dan het tentamen?
c. Vraag: als je het tentamen **niet** haalt heb je dan goed opgelet?
d. Vraag: als je het tentamen haalt heb je dan goed opgelet?

Voorbeelden waarheidstabellen

Met **A** en **B** beweringen en **0=niet waar** en **1=waar** geeft dit:

A	B	A en B	A of B	A ⇒ B	niet A	niet B
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0

Voorbeeld 1:

Is $((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$ nu waar of niet waar?

A	B	A of B	niet A	A of B en niet A	B	A of B en niet A ⇒ B
0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

✔ Dit is waar want in de laatste kolom staan allemaal enen.

Voorbeeld 2:

$(\neg(A \wedge B) \wedge A) \Rightarrow \neg B$

A	B	A en B	niet (A en B)	A	niet (A en B) en A	niet B	niet(A en B) en A ⇒ niet B
0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1

✔ Klopt!

Enzovoort... ☺

Als het niet klopt!?

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

✘ Klopt niet, want er staat een nul in de laatste kolom.

Hoe gaat dan met de equivalentie?

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

A	B	A of B	niet(A of B)	niet A	niet B	niet A en niet B	niet (A of B) $\Leftrightarrow$ niet A en niet B
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

✔ Klopt!

Opdracht 6

Waar of niet waar?

a. $\left((A \Rightarrow B) \wedge A\right) \Rightarrow B$

b. $\left((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\right) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

c. $\left((A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow B)\right) \Rightarrow \left((A \vee C) \Rightarrow B\right)$

d. $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

e. $\left((A \wedge B) \Rightarrow C\right) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

f. $\left(A \wedge (B \vee C)\right) \Leftrightarrow \left((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\right)$

Hoofdstuk 9 – Logica, bewijzen en valkuilen

lo·gi·ca (de ~ (v.))

> **1** juiste, rationele opeenvolging van oorzaak en gevolg
> **2** wetenschap die zich met de formele regels van het denken bezighoudt ⇒ *redeneerkunde*

bron: **Van Dale**

... ook in de wiskunde zullen alle redeneringen moeten voldoen aan de formele regels van de logica. We zagen al eerder dat dit noodzakelijk is, maar dat is niet alles!

Het is goed je te realiseren dat het voldoen aan de formele regels van de logica niet betekent dat je 'de waarheid spreekt'. Als de vooronderstellingen fout zijn kan je een volkomen correcte redenering houden die leidt tot onzin.

Voorbeeld

Iedereen zal het eens kunnen zijn met de uitspraak dat 'goede leraren zorgen voor goed onderwijs'. Het blijkt dat er in het onderwijs niet alles goed gaat, we noemde al eerder een aantal problemen: "HBO's en universiteiten klagen steen en been.... PABO-studenten kunnen niet rekenen... Studenten brengen zonder GR en formulekaart weinig terecht van de instaptoetsen..."

We stellen vast:

> **A**: goede leraren
> **B**: goed onderwijs

De 'uitspraak': $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$

Dit leidt tot de volgende conclusie: het gaat niet goed in het onderwijs dus zullen de leraren wel niet goed zijn.

We zagen al eerder dat '$A \Rightarrow B$' en '$\neg B \Rightarrow \neg A$' gelijkwaardig zijn. Strikt formeel gesproken is er met de bovenstaande redenering niets mis. Toch klopt het niet. Maar op grond van de logica zullen we deze misopvatting niet kunnen bestrijden.

Bewijzen

"Onder een bewijs in de wiskunde verstaan we een redenatie die, met in achtneming van de regels van de logica, anderen ervan moet overtuigen dat een bepaalde bewering te allentijde waar is. Het is duidelijk dat een bewijs aan de regels van de logica moet voldoen. Anders krijgen we onzin. Maar bovenal bevat een bewijs ook een creatief element, namelijk het inzicht in het waaròm van een bewering."
Uit: Weg van getallen - Frits Beukers

Verschillende soorten bewijzen:

- Tegenvoorbeeld
- Rechtstreeks bewijs
- Volledige inductie
- Bewijs uit het ongerijmde

Tegenvoorbeeld

In het algemeen is het makkelijker om te bewijzen dat iets **niet waar** is dan te bewijzen dat iets **wel waar** is. In het laatste geval moet je laten zien dat het **in alle gevallen** klopt. Bij het eerste is één tegenvoorbeeld voldoende.

Opdracht 1

Stelling: De som van de echte delers van een getal is altijd kleiner of gelijk aan het getal zelf. Waar of niet waar?

Rechtstreeks bewijs

Sommige stellingen kan je bewijzen door een rechtstreeks of direct bewijs.

Opdracht 2

Stelling: als je 2 getallen, die 2 van elkaar verschillen, met elkaar vermenigvuldigt en je telt daar 1 bij op, dan krijg je een kwadraat. Bewijs!

Volledige inductie

In hoofdstuk 2 heb je al kennis gemaakt met bewijzen met volledige inductie.

Bewijs uit het ongerijmde

Dit soort bewijzen wordt ook wel 'indirect bewijs' of 'reductio ad absurdum' genoemd. Dit soort bewijzen berust op de contrapositie (=logische omkering):

Voor A en B geldt '$A \Rightarrow B$' is gelijkwaardig met '$\neg B \Rightarrow \neg A$'.

De werkwijze is dat aan neemt dat de stelling **niet waar** is en je laat zien dat dit tot een tegenspraak of onware bewering leidt. Dat kan niet kloppen dus moet de stelling wel waar zijn...

Voorbeeld

Stelling:
$\sqrt{2}$ is irrationaal.

Bewijs:

Stel $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (met $p, q \in \mathbb{N}$), waarbij de breuk niet meer vereenvoudigd kan worden. Dan geldt:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2$$

Hieruit volgt dat p^2 even is. Maar dan moet p zelf even zijn (het kwadraat van een oneven getal is immers oneven (ga na)). Dus is p te schrijven als $2 \cdot a$ (a is de helft van p). Dan is p^2 gelijk aan $4 \cdot a^2$.

$$2q^2 = 4a^2$$

$$q^2 = 2a^2$$

Dus is q^2 even en dus is q zelf ook even.

Maar nu hebben we gevonden dat zowel p als q even zijn, en dus dat je beide kunt delen door 2. Dit is echter in strijdt met de aanname dat de breuk $\frac{p}{q}$ niet verder vereenvoudigd kan worden.

Conclusie:
Uit de aanname dat je $\sqrt{2}$ kunt schrijven als breuk volgt een tegenspraak. Dat betekent dat de aanname fout is, oftewel dat $\sqrt{2}$ niet als breuk te schrijven is. $\sqrt{2}$ is dus een irrationaal getal.

BRON: Pythagoras - wiskundetijdschrift

Opdracht 3
Bewijs dat $^{10}\log 3$ irrationaal is.
Uit de reader Algebra blz. 86

Valkuilen, zelfverwijzing en paradoxen

Waar of niet waar?

> Amsterdam begint met een 'a' en eindigt met een 'e'.

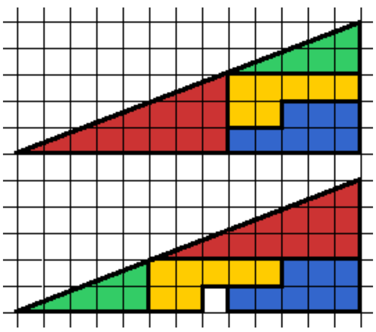
Flauw? Een beetje wel... 'op het verkeerde been' zullen we maar zeggen. Maar 't kan allemaal nog veel erger...

Paradoxen
Een **paradox** is (volgens het woordenboek) een schijnbare tegenspraak. Dit vind ik wel mooi:

DEZE BEWERING IS NIET WAAR…

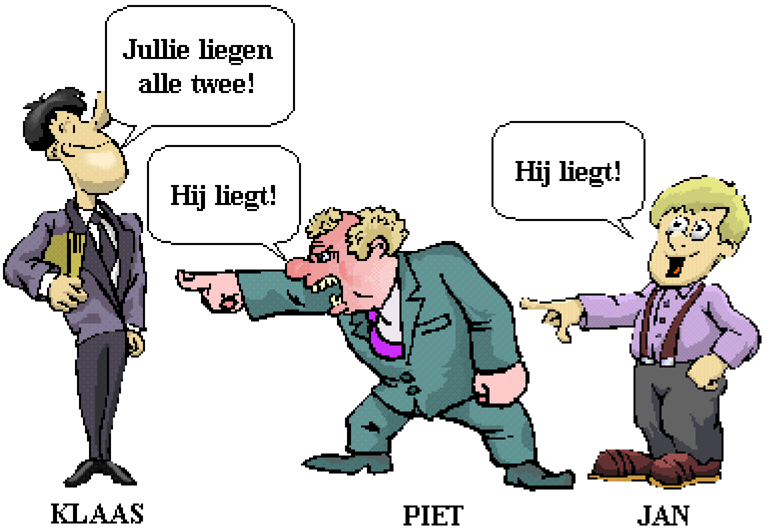
Lekker is dat!

Opdracht 4
Wat klopt hier niet?



Opdracht 5

Jan zegt dat Piet liegt.
Piet zegt dat Klaas liegt.
Klaas zegt dat Jan én Piet liegen.



- Wie spreekt de waarheid?

Opdracht 6

Waar of niet waar?

"In deze zin zitten 2 vouten"

Een non-bewijs

Te bewijzen:

a=b $\Rightarrow$ 3=2

Bewijs:

Als a=b dan is 3a+2b=2a+3b
Gevolg:
3a-3b=2a-2b
3(a-b)=2(a-b)
3=2

Dat kan niet kloppen natuurlijk... maar waar zit de fout?

Antwoord: in de voorlaatste regel. Als a=b dan is a-b=0 en dan delen door nul? Nee, ik geloof niet dat je dat moet willen. Waarom ook alweer?

Opdracht 7

Wat deugt er niet aan 'mijn bewijs'?

Stelling:

a,b,c $\in \mathbb{R}$ en a+b=2c $\Rightarrow$ a=b

Bewijs:

$a+b=2c$

$(a+b)(a-b)=2c(a-b)$

$a^2-b^2=2ac-2bc$

$a^2-b^2+b^2-2ac+c^2=2ac-2bc+b^2-2ac+c^2$

$a^2-2ac+c^2=b^2-2bc+c^2$

$(a-c)^2=(b-c)^2$

$a-c=b-c$

$a=b$

EINDE

Als je 5 willekeurige mensen bij elkaar zet, zit er altijd wel één onbetamelijke hufter tussen.

Scott Adams