Lineaire differentievergelijking van de tweede orde

Een recursieve formule van de vorm:

$u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ met $b \neq 0$

is een lineaire differentievergelijking van de tweede orde. De term u_n is uitgedrukt in de twee voorafgaande termen.

Voor het opstellen van de directe formule van de rij substitueer je $u_n = g^n$ in de differentievergelijking.

Voorbeeld 1

Gegeven:

$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 4$

✔ Geef de directe formule.

Zie **uitwerking voorbeeld 1**

Opstellen van de directe formule

Het opstellen van de directe formule bij de rij

✔ $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$

met startwaarden u_0 en u_1:

1. Substitueren van $u_n = g^n$ geeft de karakterisrieke vergelijking $g^2 - ag - b = 0$ met $D = a^2 + 4b$
2. Is $D > 0$ dan zijn er twee reële oplossingen g_1 en g_2 en is de directe formule van de vorm: $u_n = A \cdot (g_1)^n + B \cdot (g_2)^n$
3. Is $D = 0$ dan is er één reële oplossing g en is de directe formule van de vorm: $u_n = (A + Bn) \cdot g^n$
4. Is $D < 0$ dan zijn er geen reële oplossingen.(*)
5. Je berekent A en B met behulp van de startwaarden u_0 en u_1

Stelsels differentievergelijkingen

Beschouw een stelsel van lineaire differentievergelijkingen van deze vorm:

$$\begin{cases} x_n = a \cdot x_{n-1} + b \cdot y_{n-1} \\ y_n = c \cdot x_{n-1} + d \cdot y_{n-1} \end{cases}$$

Hieruit kan je een lineaire differentievergelijking van de tweede orde afleiden. Met behulp van de startwaarden x_0 en y_0 kan je een directe formule opstellen.

Voorbeeld 2

Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen met $x_0 = 10$ en $y_0 = 20$:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = -x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases}$$

Stel de directe formule op van x_n

✔ Zie **uitwerking voorbeeld 2**

(*) In het geval $D < 0$ zijn de oplossingen complex. In deel 4 leer je hoe je in dit geval de directe formule opstelt.

Voorbeeld 1	**Uitwerking**
Gegeven: ✔ $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ Met $u_0 = 5$ en $u_1 = 4$ ✔ Geef de directe formule.	1. $g^n = g^{n-1} + 2g^{n-2}$ delen door g^{n-2} geeft: $g^2 = g + 2$ $g^2 - g - 2 = 0$ $(g-2)(g+1) = 0$ $g = 2 \vee g = -1$ 2. $u_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n$ 3. Invullen van de startwaarden geeft: $\begin{cases} 5 = A + B \\ 4 = -A + 2B \end{cases}$ $3B = 9$ $\begin{cases} B = 3 \\ A = 2 \end{cases}$ De directe formule is: $u_n = 2 \cdot (-1)^n + 3 \cdot 2^n$

Voorbeeld 2	**Uitwerking**
Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen: $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = -x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases}$ ✔ Stel de directe formule op van x_n	Het plan is om x_n uit te drukken in x_{n-1} en x_{n-2} Omdat het om een tweede orde differentievergelijking gaat neem ik voor x_n eerst maar 's een stapje hoger: Maak van $x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$ eerst: ✔ $x_{n+1} = x_n + 2y_n$ Je hebt dan: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_n = -x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases}$ Als je tweede vergelijking invult in de eerste vergelijking dan krijg je: $x_{n+1} = x_n + 2\left(-x_{n-1} + 4y_{n-1}\right)$ $x_{n+1} = x_n - 2x_{n-1} + 8y_{n-1}$ Nu moet je die term met y_{n-1} wegwerken. Dat kan met de eerste vergelijking uit de opgave. Maak van $x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$ eerst: ✔ $2y_{n-1} = x_n - x_{n-1}$ Je krijgt dan: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 2x_{n-1} + 8y_{n-1} \\ 2y_{n-1} = x_n - x_{n-1} \end{cases}$ Vul de tweede vergelijking in de eerste vergelijking in: $x_{n+1} = x_n - 2x_{n-1} + 4\left(x_n - x_{n-1}\right)$ $x_{n+1} = x_n - 2x_{n-1} + 4x_n - 4x_{n-1}$ $x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1}$ Bijna goed... alleen wel graag uitgedrukt in x_n. Dat kan ook: $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ Dit is een differentievergelijking van de tweede orde en die kan je oplossen op de manier van **voorbeeld 1**. Je weet $x_0 = 10$ en $y_0 = 20$, maar wat is dan x_1? Gebruik de eerste vergelijking in de opgave en je vindt: ✔ $x_0 = 10$ en $x_1 = 10 + 2 \cdot 20 = 50$ Zie **uitwerking bij voorbeeld 2**

uitwerking bij voorbeeld 2

Differentievergelijking	**Uitwerking**
Gegeven: $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ Met $x_0 = 10$ en $x_1 = 50$, geef de directe formule.	De karakteristieke vergelijking oplossen geeft: $g^2 - 5g + 6 = 0$ $(g-2)(g-3) = 0$ $g = 2 \vee g = 3$ Dus $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$ $x_0 = 10$ geeft $A + B = 10$ $x_1 = 50$ geeft $2A + 3B = 50$ $\begin{cases} A + B = 10 \\ 2A + 3B = 50 \end{cases}$ $\begin{cases} 2A + 2B = 20 \\ 2A + 3B = 50 \end{cases}$ $\begin{cases} B = 30 \\ A = -20 \end{cases}$ De directe formule is: ✔ $x_n = -20 \cdot 2^n + 30 \cdot 3^n$

voorbeeld uit WisFaq

Gegeven is de volgende rij: 1, -1, 3, -5, 11, -21, 43, -85, ...

- ✔ Stel een recursieve formule op
- ✔ Stel een directe formule op

Willem

Zie **Recursieve en directe formules**