

Basisvaardigheden algebra



Willem van Ravenstein

Activiteiten

1. Herleiden machten
2. Herleiden breuken
3. Herleiden veeltermen
4. Zelftoets

1. Variabelen

Rekenen is het werken met getallen. Er zijn vier hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Verder ken je de bewerkingen machtsverheffen en worteltrekken.

Algebra is het rekenen met variabelen. Daarbij gelden dezelfde regels als bij het rekenen.

$$a + a = 2a$$

$$4a + 3b + 6a - 2b = 10a + b$$

$$a \cdot a = a^2$$

$$a \cdot b = ab$$

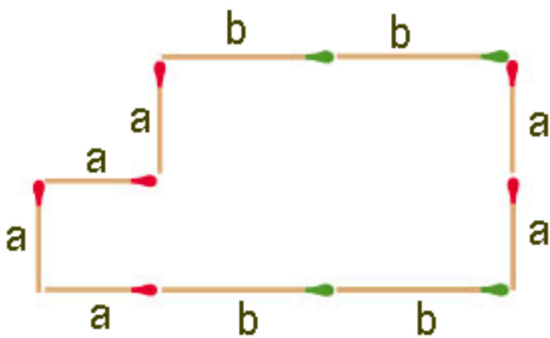
$$2a \cdot 5b = 10ab$$

$$2a^2 \cdot 5b^3 = 10a^2b^3$$

Je kunt alleen gelijksoortige termen optellen.

Voorbeeld

Je ziet hieronder een luciferfiguur. De figuur is gemaakt van rode lucifers met een lengte van a cm en van groene lucifers van b cm.



De **omtrek** van de figuur is gelijk aan $a + a + a + a + a + a + b + b + b + b$. Dat kan je korter schrijven als $6a + 4b$.

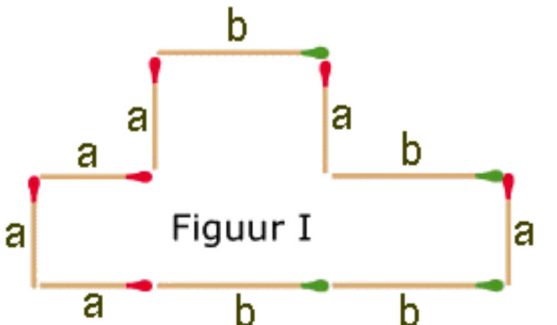
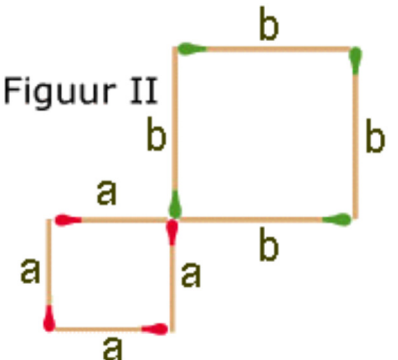
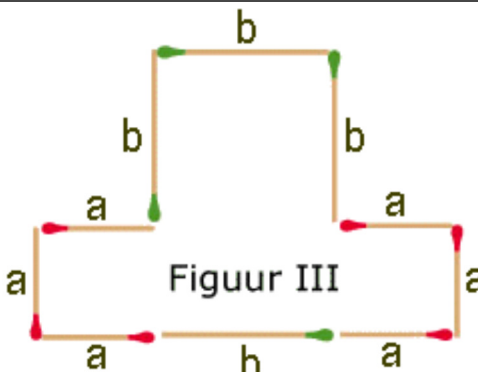
De **oppervlakte** van de figuur is gelijk aan $a \cdot a + ab + ab + ab + ab$. Dat kan je kleiner schrijven als $a^2 + 4ab$.

✓ **Ga na dat dat klopt.**

Opdracht 1

De figuren hieronder zijn gemaakt van rode lucifers met een lengte van a cm en van groene lucifers van b cm.

1. Bepaal steeds van de luciferfiguur de omtrek. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.
2. Bepaal steeds van de luciferfiguur de oppervlakte. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.

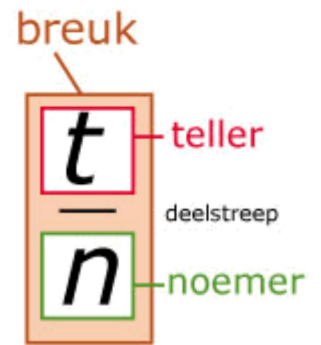
 <p>Figuur I</p>	<p>De omtrek is: _____</p> <p>De oppervlakte is: _____</p>
 <p>Figuur II</p>	<p>De omtrek is: _____</p> <p>De oppervlakte is: _____</p>
 <p>Figuur III</p>	<p>De omtrek is: _____</p> <p>De oppervlakte is: _____</p>

2. Breuken

Als je breuken wilt **vereenvoudigen** kan je teller en noemer door hetzelfde getal **delen**.

Gelijknamig maken

Je kan ook teller en noemer **vermenigvuldigen** met hetzelfde getal. Dat gebruik je als je breuken **gelijknamig** wilt maken.



$$\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{7} + 2\frac{1}{2} = \frac{6}{14} + 2\frac{7}{14} = 2\frac{13}{14}$$

Wat voor het rekenen met getallen geldt geldt ook voor het rekenen met variabelen. Je kunt teller en noemer vermenigvuldigen of delen met hetzelfde getal of variabele.

$$\frac{ab}{a} = b$$

$$\frac{abd}{ac} = \frac{bd}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

Vermenigvuldigen van breuken

Als je breuken wilt vermenigvuldigen dan vermenigvuldig je teller met de teller en noemer met de noemer.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{11} = \frac{10}{77}$$

$$2\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

Hezelfde doe je als je rekt met breuken waarin variabelen voorkomen.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a^2}{bc}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{ab}{cd} \cdot \frac{bc}{ad} = \frac{ab^2c}{acd^2} = \frac{b^2}{d^2}$$

Zoals je ziet kan je door teller en noemer te delen door dezelfde variabele breuken met variabelen vereenvoudigen.

Het delen van breuken

Er zijn twee manieren waarop je breuken kunt delen. De eerste methode is **gelijknamig maken** en de tweede methode is gebruik maken van de regel '**delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde**'.

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{9}{12} : \frac{2}{12} = 9 : 2 = 4\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{1} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$$

Hetzelfde kan je doen bij het delen van breuken waarin variabelen voorkomen.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = ad : bc = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Voorbeelden van herleiden

$$\frac{1}{2a} + \frac{3}{b} = \frac{b}{2ab} + \frac{6a}{2ab} = \frac{6a+b}{2ab}$$

$$\frac{15ab}{3a} - \frac{12b^2}{4b} = 5b - 3b = 2b$$

$$\frac{b}{4a} \cdot \frac{2a^2}{3b} = \frac{2a^2b}{12ab} = \frac{a}{6}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{2}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{2a}{ab} = \frac{-2a+b}{ab}$$

$$\frac{6}{a} : \frac{1}{2a} = \frac{6}{a} \cdot \frac{2a}{1} = \frac{12a}{a} = 12$$

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{2} = \frac{2}{2a} + \frac{a^2}{2a} = \frac{a^2+2}{2a}$$

Soms kan je breuken eerst vereenvoudigen voordat je ze op gaat tellen of vermenigvuldigen. Let goed op het verschil tussen optellen en vermenigvuldigen.

Opdracht 2

Herleid onderstaande formules. Dat wil zeggen: schrijf de formules zo kort mogelijk.

$$a. \frac{3a^3b^2}{2ab^2} =$$

$$b. \frac{b}{4a} \cdot \frac{2a^2}{3b} =$$

$$c. \frac{3a^7 \cdot 6a^6}{9a^4} =$$

$$d. \frac{2a}{4ab} \cdot \frac{6ab}{3} =$$

$$e. \frac{15ab}{3a} - \frac{12b^2}{4b} =$$

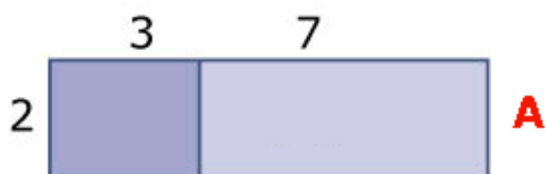
$$f. \frac{9a^2b^3c^4}{3abc} =$$

$$g. \frac{a+1}{a} - \frac{1}{a} =$$

$$h. x + \frac{xy}{y} + \frac{xy^2}{y^2} =$$

3. Haakjes

Hieronder zie je een rechthoek die zelf ook weer verdeeld is in rechthoeken. Je kunt de **totale oppervlakte** van die rechthoek op verschillende manieren berekenen.



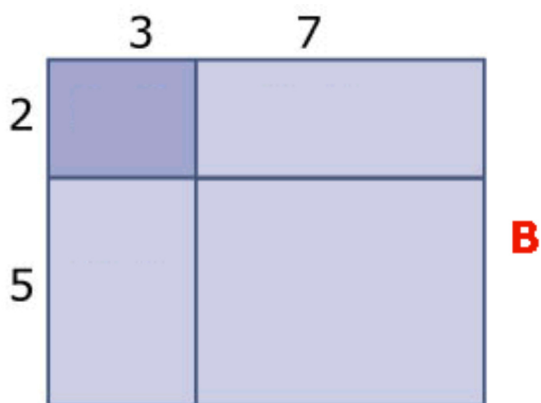
De oppervlakte van A bestaat uit een stuk van 6 en een stuk van 14, dat is samen 20. De oppervlakte is 20.

Je kunt ook eerst de lengte berekenen en dan de oppervlakte. De lengte is $3+7=10$, dus de oppervlakte is $2 \times 10 = 20$.

Als je dat laatste in één keer wilt opschrijven dan moet je **haakjes** schrijven. Als je $2 \times 3 + 7$ zou schrijven, dan vergeet je waarschijnlijk dat die '7' ook keer '2' moet. Dus schrijven we beter $2 \times (3+7)$. Meestal laten we die 'x' weg.

✓ De **oppervlakte van figuur A** is gelijk aan $2(3+7) = 2 \cdot 10 = 20$

Nog meer haakjes



De oppervlakte van B bestaat zelfs uit 4 stukken: een stuk van 6, van 14, van 15 en een stuk van 35. Dat is samen gelijk aan $6+14+15+35=70$.

Je kunt ook eerste de lengte en de breedte van de rechthoek berekenen en dan de oppervlakte. De lengte is $3+7=10$ en de breedte is $2+5=7$, dus de oppervlakte is $10 \cdot 7 = 70$.

Als je dat in één keer wilt opschrijven dan zou je $3+7$ moeten vermenigvuldigen met $2+5$. Je kunt dan niet schrijven $3+7 \cdot 2+5$ want dan gaat het vast niet goed. Je moet **haakjes** gebruiken.

✓ De **oppervlakte van figuur B** is gelijk aan $(3+7)(2+5) = 10 \cdot 7 = 70$

Variabelen

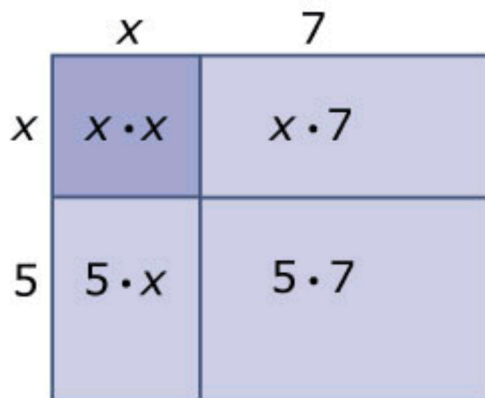
Wat je met getallen kunt, kan je ook met variabelen. Stel je voor dat je een rechthoek hebt van 2 bij $x+7$. De oppervlakte van de driehoek kan je dan schrijven als $2(x+7)$.



Als je naar de kleinere rechthoeken kijkt kan je ook zeggen dat de oppervlakte gelijk is aan $2x+14$.

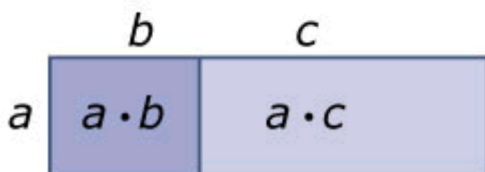
✓ $2(x+7)=2x+14$

Dubbele haakjes

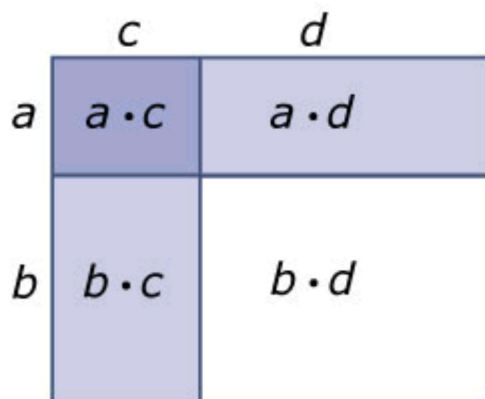


✓ $(x+7)(x+5)=x^2+7x+5x+35=x^2+12x+35$

Nog meer variabelen



✓ $a(b+c)=ab+ac$



✓ $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Theorie

In de wiskunde noemen we 'dingen' die je optelt **termen**. Het resultaat van een optelling noemen we **som**. Iets als 'p+1' noemen we een **tweeterm** omdat het uit twee termen bestaat.

'Dingen' die je vermenigvuldigt noemen we **factoren**. Een uitdrukking kan uit meerdere factoren bestaan. Zo bestaat $p(p+2)$ uit de factoren 'p' en 'p+2'. De uitkomst van een vermenigvuldiging noemen we het **product**.

De uitdrukking $(p+1)(p+8)$ bestaat dus uit de factoren 'p+1' en 'p+8'. Die 'p+1' en 'p+8' zijn tweetermen. Dus je kunt zelfs zeggen dat $(p+1)(p+8)$ het product is van twee tweetermen.

$$(p+1)(p+8) = p^2 + 8p + p + 8$$

De som van termen en het product van factoren

In plaats van $p^2+8p+p+8$ schrijf je p^2+9p+8 . Die '8p' en 'p' zijn gelijksoortigetermen. Dat betekent dat ze dezelfde variabelen hebben en gelijke exponenten. Het product van twee tweetermen kan een drieterm zijn.

Maar dat is niet altijd zo:

- ✓ Het product van $a+b$ en $c+d$ is een vierterm.
 $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- ✓ Het product van $(a-3)(a+3)$ is een tweeterm.
 $(a - 3)(a + 3) = a^2 + 3a - 3a - 9 = a^2 - 9$
- ✓ Het kwadraat van een tweeterm is een drieterm.
 $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$

Opdracht 3

Herleid onderstaande formules. Dat wil zeggen: schrijf de formules zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a. $8(h + 8) - 17 =$

b. $-\frac{1}{4}(12q + 28) + 7 =$

c. $4k - 6\left(\frac{1}{2}k - 3\right) =$

d. $6(a + 2b) + 2a =$

e. $a(2a + c) + a(3b - 2c) =$

f. $-(3p - 5q) + (p + q)^2 =$

g. $(x - y)^2 + 4xy =$

h. $(a - 3)(a + 5) - a^2 - 3 =$

i. $(3x + y)^2 + (3x - y)^2 =$

4. Machten

Een macht is **herhaald** vermenigvuldigen.

$$\checkmark 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Een **belangrijke regel** is dat als je twee machten met dezelfde grondtal vermenigvuldigt dan kan je de exponenten optellen.

$$\checkmark p^4 \cdot p^5 = p^{4+5} = p^9$$

Als je de **macht van een macht** uitrekent dan vermenigvuldigt je de exponenten.

$$\checkmark (p^3)^4 = p^{3 \times 4} = p^{12}$$

Machten en negatieve getallen

Er is een groot verschil tussen -3^2 en $(-3)^2$:

$$\checkmark -3^2 \text{ is het getal } 3 \text{ in het kwadraat met een min ervoor. Dat is dan } -9.$$

$$\checkmark (-3)^2 \text{ is het getal } -3 \text{ in het kwadraat en dat is } 9.$$

Als je $(-2)^3$ uitrekent dan komt daar -8 uit en als je $(-2)^4$ uitrekent dan komt daar 16 uit. Als je de **macht van een negatief getal** uitrekent dan hangt het 'teken' af of de exponent 'even' of 'oneven' is.

$$\checkmark (-2)^3 = -8$$

$$\checkmark (-2)^4 = 16$$

$$\checkmark (-2)^5 = -32$$

$$\checkmark \dots$$

Je kunt ook de macht van producten uitrekenen.

$$\checkmark (-2ab)^2 = 4a^2b^2$$

$$\checkmark (3a^2b)^3 = 27a^6b^3$$

$$\checkmark (-ab^2c^3)^5 = -a^5b^{10}c^{15}$$

Herleiden

Daarmee kun je al heel veel uitdrukkingen herleiden. Hieronder zie je daar een aantal voorbeelden van. Controleer de antwoorden en ga na welke regels je daarvoor gebruikt:

$$a^6 \cdot a^5 + a^4 = a^{11} + a^4$$

$$-(-3x^2)^3 \cdot 2y^4 = 54x^6y^4$$

$$(-2x)^3 \cdot (2y)^3 - (xy)^3 = -65x^3y^3$$

$$\frac{(-p^2q)^3}{-p^3q^2} = p^3q$$



Opdracht 4

Herleid onderstaande formules. Dat wil zeggen: schrijf de formules zonder haakjes en zo kort mogelijk.

$$a. 2p^6 \cdot 3p^8 =$$

$$b. 7x^2 \cdot (-x)^7 =$$

$$c. (-3a)^2 \cdot (-2a)^3 =$$

$$d. (3a^2b^3)^2 =$$

$$e. (-abc)^4 \cdot (abc)^4 =$$

$$f. (3x^2y^4 \cdot 2xy^5)^2 =$$

$$g. \frac{(2p)^2}{p^2} =$$

$$h. \frac{4a^2b}{(2ab)^2} =$$

$$i. \frac{(-pq^2)^3}{(pq)^2} =$$

E. Eindtoets



Je hebt nu van alles geleerd over het rekenen met:

- ✓ variabelen
- ✓ breuken
- ✓ haakjes
- ✓ machten

Allemaal gelukt? Begrepen? Dan mag de toets geen probleem zijn...

Willems

Eindtoets

Herleid onderstaande formules. Dat wil zeggen: schrijf de formules zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a. $2a + 5b + 4a - 3b =$

b. $(2a + 3)(a - 2) =$

c. $a^2b^2ab^3 =$

d. $\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{a} =$

e. $a^2 + (a-1)^2 - 1 =$

f. $a(a-2)^2 - (a+2)^2 =$

g. $\left(\frac{x^5}{x^3}\right)^2 =$

h. $3abc - \frac{4a^2b^3c^4}{2ab^2c^3} =$

i. $\frac{3a^5 \cdot 6a^6}{9a^4} =$