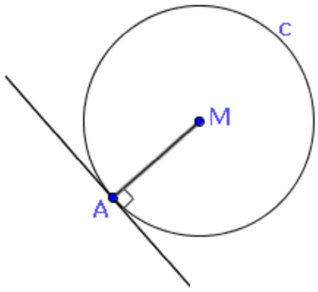
lijnen en cirkels



opdrachten bij hoofdstuk 7

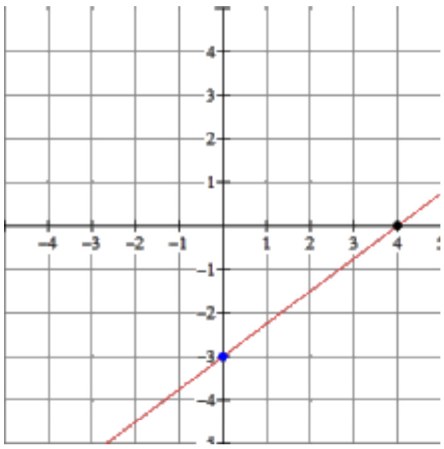
Lijnen cirkels als PDF

0. voorkennis

De vergelijking ax+by=c

De algemene vorm van een lineaire vergelijkingen met de variabele x en y is $ax + by = c$. De bijgehorende grafiek is een rechte lijn.

Om de lijn $3x - 4y = 12$ tekenen is het handig om te kijken naar de snijpunten met de x- en y-as. Je krijgt dan $(0, -3)$ en $(4, 0)$.



Je kunt dan snel de grafiek tekenen. Jammer genoeg werkt dat niet altijd zo makkelijk... Je kunt niet alles hebben.

Stelsels lineaire vergelijkingen

Je kunt stelsels van twee vergelijkingen en twee onbekenden oplossen met elimineren door:

- optellen en aftrekken
- substitutie

Voorbeeld

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 9y = 36 \\ 6x + 14y = 16 \end{cases}$$

Trek (1) van (2) af:

$$5y = -20$$

$$\begin{cases} y = -4 \\ x = 12 \end{cases}$$

- **voorbeelden stelsels oplossen**

1. lijnen en hoeken

De assenvergelijking van een lijn

De lijn door de punten $(a, 0)$ en $(0, b)$ heeft de vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ met $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

Voorbeeld

De lijn l gaat door de punten $(4, 0)$ en $(0, -5)$. Geef een vergelijking voor de lijn l.

Uitwerking

Invullen geeft $\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$.
Vermenigvuldigen met 20 geeft:

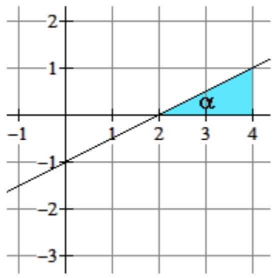
- ✔ $l : 5x - 4y = 20$

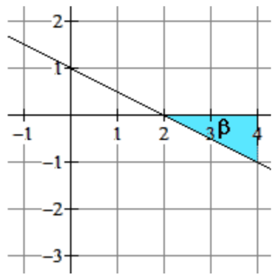
De hoek tussen twee lijnen

De **richtingshoek** van een lijn is de hoek die de lijn maakt met het positieve deel van de x-as.

Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt:

- ✔ $\tan\alpha = rc_k$
- ✔ $-90° < \alpha \leq 90°$





Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β, waarbij $\alpha > \beta$, geldt:

- ✔ $\varphi = \alpha - \beta$ als $\alpha - \beta \leq 90°$
- ✔ $\varphi = 180° - (\alpha - \beta)$ als $\alpha - \beta > 90°$

De hoek tussen twee krommen

De hoek tussen twee krommen in een snijpunt A is gelijk aan de hoek tussen de raaklijnen in A.

Voorbeeld

Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de grafieken van $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = -2x + 6$ elkaar snijden.

- ✔ Zie **uitgewerkt**

Voorbeeld

- ✔ Bereken op 1 decimaal nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $k : 3x - 2y = 5$ en $l : 4x - 3y = 6$.

Zie **uitgewerkt 2**

2. afstanden bij punten en lijnen

De afstand tussen twee punten

De afstand tussen twee meetkundige figuren is de lengte van het **kortste verbindingslijnstuk** tussen die figuren.

De afstand tussen de punten A en B is de lengte van het lijnstuk AB. Je kunt de afstand noteren als $d(A, B)$ met de d van **afstand**.

Voor de punten $A(x_A, y_B)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt is de afstand tussen A en B gelijk aan:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

De coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB zijn:

$$x_M = \tfrac{1}{2}(x_A + x_B)$$
$$y_M = \tfrac{1}{2}(y_A + y_B)$$

Onderlinge loodrechte lijnen

Als voor de lijnen k en l geldt $rc_k \cdot rc_l = -1$ dan staan de lijnen loodrecht op elkaar.

Voorbeeld

De lijn k staat loodrecht op de lijn $l : y = 3x - 2$ en gaat door het punt $A(6, 7)$.

- ✔ Stel een vergelijking op voor de lijn k

Uitwerking

Als $rc_l = 3$ dan $rc_k = -\frac{1}{3}$. De vergelijking voor k wordt:

$y = -\frac{1}{3}x + b$.

Vul $(6, 7)$ in om de waarde van b te berekenen:

$$7 = -\tfrac{1}{3} \cdot 6 + b$$
$$7 = -2 + b$$
$$b = 9$$

$$k : y = -\tfrac{1}{3}x + 9$$

<table>
<tr>
<td>

De afstand van een punt tot een lijn

De afstand van een punt P tot een lijn l is de afstand van P tot zijn loodrechte projectie P' op l.

Werkschema: het berekenen van de afstand van een punt A tot de lijn k:

1. Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht staat op k.
2. Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l.
3. Gebruik $d(A,k) = d(A,B)$

</td>
<td>

Voorbeeld

✔ Bereken exact de afstand van het punt $A(5,5)$ tot de lijn $k : 3x + 2y = 12$.

Uitwerking

Stel een vergelijking op voor de lijn l door $A(5,5)$ loodrecht op k. Dat zal iets zijn als $l : 2x - 3y = c$. Vul $A(5,5)$ in en je krijgt $c = -5$. Je krijgt:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$$

...

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Het snijpunt van l en k is $B(2,3)$, dus

$$d(A,k) = d(A,B) = \sqrt{(2-5)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{13}$$

</td>
</tr>
</table>

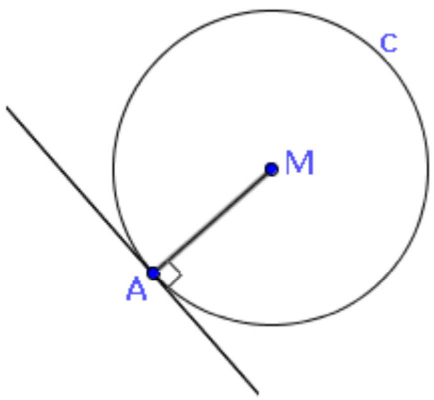
3. cirkelvergelijkingen

De cirkelvergelijking (x-a)^2+(y-b)^2=r^2

De cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r heeft als vergelijking:

- ✔ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Omdat een raaklijn van een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is de straal van de cirkel gelijk aan de afstand van M tot k, dus $r=d(M,k)$



Voorbeeld

- ✔ Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(3,4)$ die de lijn $k: y=\frac{1}{2}x$ raakt.

Aanpak

- ✔ Stel een vergelijking op voor de lijn l die door M gaat en loodrecht staat op k.
- ✔ Bereken het snijpunt A van l en k.
- ✔ $r=d(M,k)=d(M,A)$
- ✔ De vergelijking wordt $c:(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$

De **uitwerking** staat in je boek op **bladzijde 108**.

Kwadraatafsplitsen

Voor het herleiden van de vergelijking $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ tot de vorm $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ gebruik je de techniek van het **kwadraatafsplitsen**.

Voorbeeld

Wat is het middelpunt en de straal van de cirkel met vergelijking $x^2+y^2+8x-2y+6=0$?

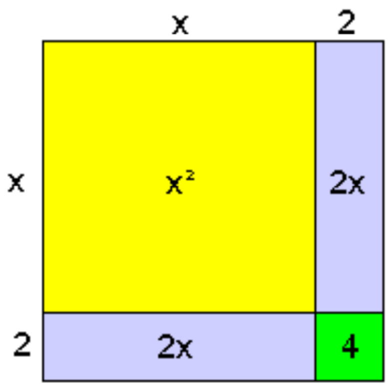
Uitwerking

$$x^2+y^2+8x-2y+6=0$$
$$x^2+8x+y^2-2y+6=0$$
$$(x+4)^2-16+(y-1)^2-1+6=0$$
$$(x+4)^2+(y-1)^2-11=0$$
$$(x+4)^2+(y-1)^2=11$$

Het middelpunt is $M(-4,1)$ en de straal is $r=\sqrt{11}$

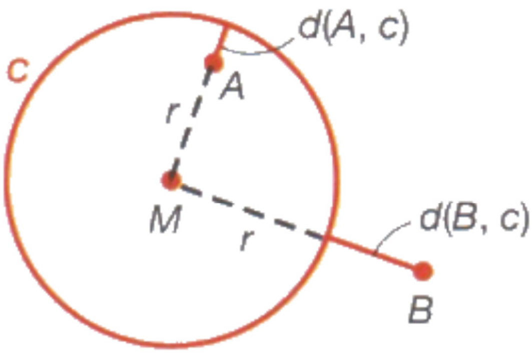
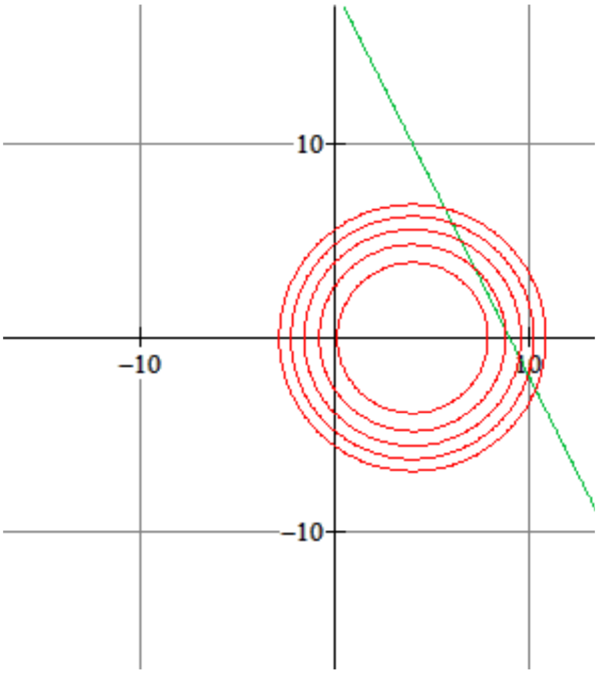
Kwadraatafsplitsen

Kwadraatafsplitsen is een tweedegraads formule schrijven als een kwadraat.



Op **kwadraatafsplitsen** staat uitleg... Je kunt **HIER** oefenen....

[KC] filmpje!

De cirkelvergelijking $x^2+y^2+ax+by+c=0$ Door de vergelijking $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ te schrijven in de vorm $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ kun je zien dat je met een cirkel met middelpunt (a, b) en straal r te maken hebt. Je gebruikt daarbij kwadraatafsplitsen. ✔ De afstand van een punt tot een kromme is de lengte van het korste verbindingslijnstuk tussen het punt en de kromme. **Afstand van punt tot cirkel c met middelpunt M en straal r** ✔ Voor punt A binnen c geldt $d(A,c) = r - d(M,A)$ ✔ Voor punt B buiten c geldt $d(B,c) = d(M,B) - r$  	**Denkactiviteit** Bereken voor welke waarde van a de lijn $k: 2x + y = 18$ raakt aan de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x + a = 0$  **Antwoord** ✔ $a = -4$ ✔ Zie **uitwerking**

4. raaklijnen en snijpunten bij cirkels

<table>
<tr>
<td>

Raaklijnen aan cirkels

Werkschema voor het opstellen van een vergelijking van een raaklijn k aan de cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c.

1. Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A
2. Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
3. Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.

Voorbeeld

Gegeven is de cirkel $c : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$. De punten A en B met $x_A = x_B = 2$ en $y_A > y_B$ liggen op c. De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B.

- ✔ Stel van k en van l een vergelijking op.

Uitwerking

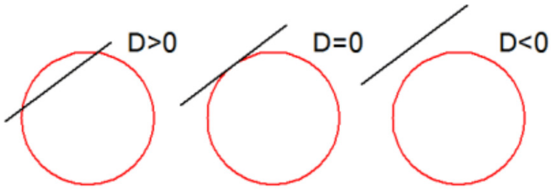
- ✔ Zie je boek op **bladzijde 115**

</td>
<td>

Snijpunten van lijnen met cirkels

Ontstaat na substitutie van $y = ax + b$ in de cirkelvergelijking een tweedegraadsvergelijking waarvan de discriminant

- ✔ groter dan nul, dan zijn er twee snijpunten
- ✔ kleiner dan nul, dan zijn er geen snijpunten
- ✔ gelijk aan nul, dan raakt de lijn de cirkel



Voorbeeld

Gegeven is de cirkel $c : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 17$.

- ✔ Bereken voor welke waarde van q de lijn $y = 4x + q$ de cirkel raakt.

Uitwerking

- ✔ Zie je boek op **bladzijde 118**

</td>
</tr>
<tr>
<td>

raaklijnen en snijpunten bij cirkels

</td>
<td>

- ✔ Of bekijk **een eenvoudig voorbeeld**

</td>
</tr>
</table>