Combinatoriek

Frans Leynse

Hogeschool van Amsterdam

2016-2017

Inhoudsopgave

1. Boom- en roosterdiagrammen

Bron: http://wisfaq.nl/pagina.asp?nummer=1761

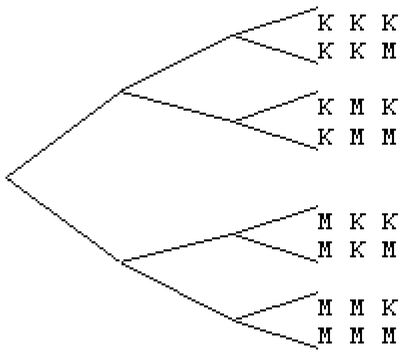
Handig tellen vereist een **systematische aanpak**. Door problemen met elkaar te vergelijken stuit je vaak op allerlei overeenkomsten en regelmatigheden. De kunst is vaak die regelmaat te ontdekken.

1.1 Machtsbomen

Eén manier om handig te kunnen tellen is een **boomdiagram**.

Voorbeeld 1.1
Je gooit 3 keer met een muntstuk (kop of munt). Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er ?

De eerste keer kun je kop of munt gooien, de tweede keer ook en de derde keer ook. Dit kun je aangeven met een boomdiagram, hierbij is naar boven 'kop' en naar beneden 'munt'. Uit elk punt van de boom vertrekken evenveel takken. Uit het boomdiagram leid je af dat er $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ verschillende uitkomsten zijn.



Je kunt het aantal mogelijkheden bij dit probleem uitrekenen met machten. Bij elke extra munt neemt de exponent van de macht met één toe. Men noemt bomen, waarbij uit elk punt evenveel takken vertrekken ook wel **machtsbomen**.

Opgave 1.1
a. Je gooit 3 keer met een dobbelsteen. Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er mogelijk?
b. Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er mogelijk, als geen van de drie worpen de uitkomst 6 heeft opgeleverd?
c. Wat is de kans dat er in drie worpen geen zes wordt gegooid?

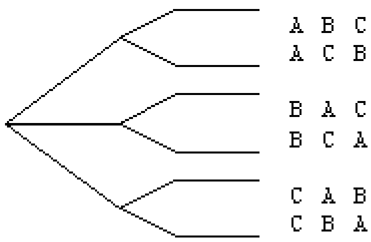
Opgave 1.2
Op een fruitschaal liggen 2 appels, 3 peren en 2 sinaasappels.
a. Op hoeveel manieren kan je van elke soort een nemen?
b. Op hoeveel manieren kan je van elke soort hoogstens een nemen?
Teken een boomdiagram bij dit probleem.

1.2 Faculteitsbomen

Soms vertrekken er van elk punt niet evenveel takken.

Voorbeeld 1.2

a. Bij een vereniging worden 3 mensen (A,B en C) in het bestuur gekozen die de functie van voorzitter, penningmeester en secretaris moeten vervullen. Op hoeveel manieren kan men deze 3 functies over deze 3 mensen verdelen ? Je krijgt nu een ander soort boom. Nu vertrekt er van elk punt steeds een lijn minder (*waarom?)*.



Je maakt hier de vermenigvuldiging 3 · 2 · 1 = 6.

b. Op hoeveel manieren kun je 10 verschillende functies over 10 mensen verdelen?

Op dezelfde manier krijg je hier:
10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 3.628.800

Bovenstaand product noemen we 10 faculteit. We gebruiken daarvoor de notatie 10!.

Algemeen geldt: n! = n · (n-1) · (n-2) ·…… · 2 · 1. Daarnaast is per definitie 0!=1.

We noemen een boom als hierboven wel **faculteitsboom**.

Vaak komen we een stukje van een faculteitsboom tegen. Bijvoorbeeld als je wilt weten op hoeveel manieren je 3 functies over 10 mensen wilt verdelen. Dit kan op 10 x 9 x 8 manieren.

Opgave 1.3

Leg dit uit.

Opgave 1.4

Op hoeveel manieren kunnen 25 leerlingen in een lokaal gaan zitten met 30 stoelen?

Opgave 1.5

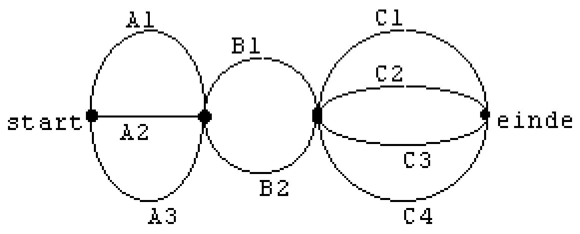
Een vereniging kent een bestuur van 5 personen: 2 mannen (A en B) en 3 vrouwen (C, D en E). Men wil uit dit bestuur een voorzitter, secretaris en penningmeester kiezen.

a. Op hoeveel manieren kunnen 3 personen gekozen worden voor deze 3 functies?

b. Op hoeveel manieren kan dit, als men eist dat de voorzitter van het andere geslacht is als de secretaris en penningmeester? Controleer je antwoord met een boomdiagram.

1.3 Wegendiagrammen

In een **wegendiagram** worden wegen tussen verschillende punten samengevoegd in één diagram.

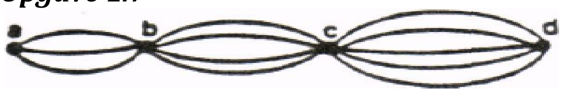


Hierboven staat een voorbeeld van een wegendiagram.

Op hoeveel manieren kun je van START naar EINDE ?

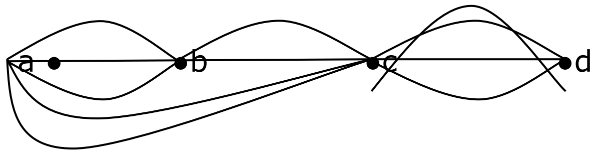
Er zijn in totaal 24 verschillende routes van start naar einde mogelijk.
Dit volgt uit de vermenigvuldiging $3 \cdot 2 \cdot 4$.

Opgave 1.6
Kan je uitleggen waarom je het antwoord krijgt door een vermenigvuldiging, en niet door optellen?

Opgave 1.7


De figuur hierboven toont 4 steden en hun verbindingswegen.
Hoeveel rondreizen abcdcba zijn er waarbij geen enkele weg twee keer wordt aangedaan?

Voorbeeld 1.3



Op hoeveel manieren kan je van a naar d?

Je kunt hier onderscheid maken:
- Een route van a rechtstreeks naar c EN verder naar d; dit kan op 2·4 manieren.
- OF een route van a naar b EN vervolgens naar c EN vervolgens naar d; dit kan op 3·2·4 manieren.

Tezamen kan het op 2·4+3·2·4=32 manieren.

Merk op dat in de formulering van het probleem het woordje OF wordt vertaald in het + teken, en het woordje EN (in de betekenis van vervolgens) in het · teken.

Opgave 1.8
Teken zelf een wegendiagram met punten a,b,c en d; waarbij het antwoord op de vraag "op hoeveel manieren kan je van a naar d?" luidt: 1+2·3+2·2·4.

Opgave 1.9
Hoeveel rondreizen van a naar d en weer terug zijn er in voorbeeld 1.3, waarbij geen enkele weg twee keer wordt aangedaan?

1.4 Roosterdiagrammen

Als je bij een telprobleem steeds een keuze gemaakt moet worden uit **twee alternatieven**, dan ontstaat er een zeer regelmatig wegendiagram. We noemen zo'n wegendiagram een **roosterdiagram**. Het ziet er uit als roosterpapier.

Voorbeelden van een keuze tussen twee alternatieven:

- jongen/meisje
- winnen/verliezen
- noord/oost
- kop/munt

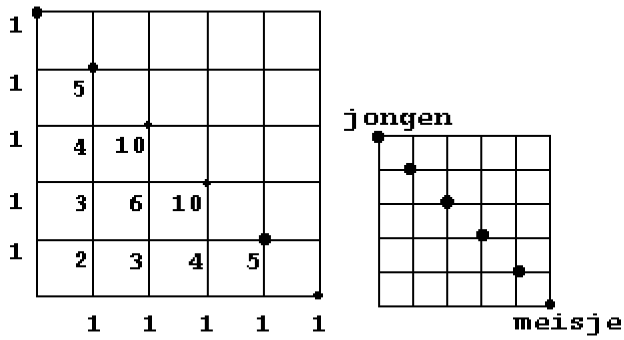
Voorbeeld 1.4

Een gezin heeft 5 kinderen. Op hoeveel verschillende manieren kan het gezin zijn samengesteld?

Als je niet op de volgorde let, zijn er 6 verschillende samenstellingen mogelijk (*waarom?)*.
Als je wel op de volgorde let, kan het op $2^5 = 32$ manieren (*waarom?)*.

Meestal is de volgorde bij dit soort problemen wel interessant.

In onderstaand roosterdiagram is het aantal mogelijke samenstellingen weergegeven. Elke route representeert precies één gezinssamenstelling.
Het startpunt is linksonder. Vanuit elk punt ga je naar boven als er een jongen bijkomt en naar rechts als er een meisje bijkomt.



De getallen in het rooster stellen het aantal mogelijke routes naar het betreffende punt voor. Ze worden als volgt bepaald:
Elk volgend getal kun je uitrekenen door de getallen bij de punten waar je vandaan kan komen (dat zijn de punten links van en onder het nieuwe punt) op te tellen.

Voor een gezin met 5 kinderen met 3 jongens en 2 meisjes zijn er, als je op de volgorde let, 10 verschillende mogelijkheden.
Het totaal aantal mogelijkheden voor een gezin met 5 kinderen komt overeen met de som van de getallen op de aangegeven diagonaal.

Opgave 1.10
Leg uit waarom dit zo is. Controleer ook dat dit daadwerkelijk het geval is.

Opgave 1.11
Voor een gezin met 4 kinderen met 2 jongens en 2 meisjes zijn er als je op de volgorde let, 6 verschillende mogelijkheden.
Welke mogelijkheden zijn dat?

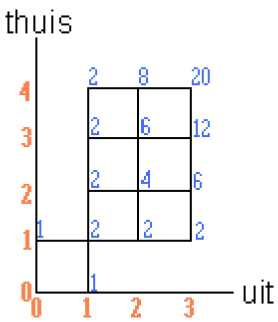
De getallen op de diagonalen in het roosterdiagram kom je ook tegen in de **driehoek van Pascal**.

Opgave 1.12
a. In een kamer zijn 6 lampen, die onafhankelijk van elkaar aangedaan kunnen worden. Hoeveel verlichtingswijzen zijn er?
b. Op hoeveel manieren kan je precies 3 lampen laten branden?

Voorbeeld 1.5

Bij een voetbalwedstrijd was 1-1 de ruststand, en de eindstand was 4-3. Hoeveel verschillende wedstrijdverlopen zijn er mogelijk?

Hieronder zie je alle mogelijke spelverlopen in een roosterdiagram. Je kunt daarin zien hoe je van (0,0) naar (4,3) kan komen met een ruststand van (1,1). De getallen bij de assen geven het aantal doelpunten weer en de getallen in het rooster het aantal manieren om in een bepaald punt te komen.



Het antwoord is dus 20.

Opgave 1.13

Hoeveel verschillende wedstrijdverlopen zijn er mogelijk bij een ruststand van 2-1, en een eindstand 4-3?

2. Rangschikkingen met en zonder herhaling

Bron: http://wisfaq.nl/pagina.asp?nummer=1763

2.1 Rangschikking met herhaling

Voorbeeld 2.1

Hoeveel telefoonnummers van 7 cijfers kun je maken, als je er van uitgaat dat alle 'denkbare' nummers zijn toegestaan.

$$\text{aantal} = 10^7 = 10.000.000$$

Als je **k** elementen kiest uit een verzameling van **n** elementen, waarbij ieder element meerdere keren gekozen mag worden en waarbij **wel** gelet wordt op de volgorde dan heb je te maken met een **rangschikking met herhaling**.

In bovenstaand voorbeeld gaat het om een keuze van k=7 elementen uit een verzameling van n=10.

Het aantal rangschikkingen van **k** elementen uit een verzameling van **n** elementen **met herhaling** kan worden berekend met de volgende formule:

$$\text{aantal} = n^k$$

Je kunt hier gebruik maken van een **machtsboom (zie paragraaf 1.1)** om alle mogelijkheden uit te schrijven. In voorbeeld 2.1 zijn de aantalleen natuurlijk veel te groot om dit daadwerkelijk uit te voeren, maar een denkbeeldig boomdiagram maakt wel duidelijk dat het inderdaad om $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7$ mogelijke nummers gaat.

Opgave 2.1

a. Een autonummer bestaat uit 6 tekens: twee cijfers, gevolgd door twee letters, en dan weer twee cijfers. Hoeveel verschillende autonummers zijn zo te maken?
b. Een autonummer bestaat uit 6 tekens: twee cijfers, gevolgd door twee letters, en dan weer twee cijfers; OF twee letters, gevolgd door twee cijfers, en dan weer twee letters. Hoeveel verschillende autonummers zijn er nu te maken?

2.2 Variaties en permutaties

Bron:

Voorbeeld 2.2

Hoeveel woorden van drie letters kun je maken als je 26 verschillende letters maximaal één maal mag gebruiken en onzin-woorden zijn toegestaan?

Antwoord:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$$

Waarom moeten we hier ook al weer vermenigvuldigen, en waarom worden de getallen waarmee je vermenigvuldigt steeds 1 kleiner?

Het antwoord kan ook met faculteiten worden berekend:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \dots \dots \dots \cdot 1}{23 \cdot 22 \cdot \dots \dots \dots \cdot 1} = \frac{26!}{23!} = 15600$$

Als je **k** elementen kunt kiezen uit een verzameling van **n** elementen, waarbij ieder element hoogstens één maal gekozen wordt en waarbij **wel** gelet wordt op de volgorde van de elementen dan heb je te maken met een **variatie**.
Een variatie is dus een rangschikking zonder herhaling.

Het aantal variaties van k uit n is

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Voorbeeld 2.3

Hoeveel rangschikkingen van 26 verschillende letters kan je maken?

Op dezelfde manier als in voorbeeld 2.2 krijg je:
26·25·24·……·3·2·1, of kortweg 26!.

Een rangschikking van 26 elementen noem je ook wel een **permutatie** van 26 elementen.

Algemeen geldt: het aantal permuaties van n elementen is *n!*.

Een permutatie is dus een variatie, waarbij k=n.

Opgave 2.2

Ga na dat de formule voor het aantal variaties ook klopt voor k=n.

Je kunt bij variaties en permutaties gebruik maken van een **faculteitsboom (zie paragraaf 1.2)** om alle mogelijkheden systematisch uit te schrijven.

Variaties van k uit n, waarbij k<n, worden in sommige boeken ook permutaties genoemd. Wij zullen dat niet doen.

Opgave 2.3

6 hardlopers strijden om 3 medailles (goud, zilver en brons). Op hoeveel manieren kunnen deze worden uitgereikt?

2.3 Rangschikkingen met elementen die dubbel voorkomen

Voorbeeld 2.4

Hoeveel rangschikkingen kan je maken met de letters van het woord PEER?

Let op; de E komt twee keer voor!
Als de twee E's verschillend waren dan was het antwoord $4!$ =24.
Uitschrijven laat de volgende mogelijkheden zien:

PE_1E_2R	PE_2E_1R
PE_1RE_2	PE_2RE_1
PRE_1E_2	PRE_2E_1
E_1PRE_2	E_2PRE_1
E_1PE_2R	E_2RE_1P
E_1E_2PR	E_2E_1PR
E_1E_2RP	E_2E_1RP
E_1RPE_2	E_2RPE_1
E_1RE_2P	E_2RE_1P
RPE_1E_2	RPE_2E_1
RE_1PE_2	RE_2PE_1
RE_1E_2P	RE_2E_1P

Gaan we uit van identieke E's, dan krijgen we als antwoord: $4!/2!$, want E_1E_2 kan op 2! manieren worden gerangschikt.

Opgave 2.4

Schrijf alle rangschikkingen met de letters van het woord ANNA uit. Hoe kan je het aantal afleiden uit het aantal permutaties van 4 (verschillende) letters?

Voorbeeld 2.5

Hoeveel rangschikkingen kan je maken met de letters van KANSREKENING?

De N komt 3 keer voor, de E komt 2 keer voor en de K komt 2 keer voor.
Er zijn

$$\frac{12!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 19.958.400$$

mogelijkheden.

Opgave 2.5

Op hoeveel manieren kun je de letters rangschikken van het woord MISSISSIPPI?

3. Combinaties

Bron: http://wisfaq.nl/pagina.asp?nummer=1772

Voorbeeld 3.1

Hoeveel **combinaties** van drie letters kun je maken als je 26 verschillende letters maximaal één maal mag gebruiken?

Bij combinaties is de volgorde niet van belang.
We nemen voorbeeld 2.2 als startpunt. Bij 6 drieletterwoorden uit dit voorbeeld hoort precies één combinatie van 3 letters. Zo hoort de combinatie abc bij de volgende 6 drieletterwoorden: abc, acb, bac, bca, cab,cba. Het aantal combinaties is dus

$$\frac{15600}{6} = 2600$$

Het antwoord kan ook met faculteiten worden berekend:

$$\frac{\left(\frac{26!}{23!}\right)}{3!} = \frac{26!}{23! \cdot 3!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{15600}{6} = 2600$$

Het aantal combinaties van 3 elementen uit 26 wordt ook wel als volgt genoteerd: $\binom{26}{3}$

Als je **k** elementen kiest uit een verzameling van **n** elementen, waarbij ieder element hoogstens één maal wordt gekozen en waarbij **niet** gelet wordt op de volgorde dan heb je te maken met een **combinatie**.

Het aantal combinaties van k uit n wordt gegeven door:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

De notatie van de n en k tussen de haakjes wordt uitgesproken als **n boven k**. We spreken hier van **binomiaal-coëfficienten.**
Ook in andere situaties komen we deze binomiaal-coëfficienten tegen. (bijvoorbeeld in de driehoek van Pascal en bij de binomiale kansverdeling).

Voorbeeld 3.2

Bij de lotto worden iedere week zes lottogetallen getrokken, door achter elkaar zes balletjes uit een machine te laten rollen. Op iedere balletje staat een getal. De balletjes die er uit zijn gerold worden niet terug gestopt. De volgorde van de balletjes is niet belangrijk. Er zijn 41 genummerde balletjes en er worden zes balletjes getrokken.
Op hoeveel manieren kan dit?

Het aantal verschillende combinaties van 6 getallen uit 41 is:

$$\binom{41}{6} = \frac{41!}{35! \cdot 6!} = 4.496.388$$

Voorbeeld 3.3

Op hoeveel manieren kan men 22 leerlingen in een eerste en tweede elftal verdelen?

Eerst kiest men 11 leerlingen voor het eerste elftal. Dat kan op $\binom{22}{11}$ manieren. Vervolgens zijn er voor het tweede elftal 11 leerlingen over en kan dat nog maar op 1 manier worden samengesteld. Je kunt ook zeggen: je moet voor het tweede elftal 11 leerlingen uit 11 kiezen. Dat kan op $\binom{11}{11}$ = 1 manier. De verdeling van de twee elftallen kan dus op $\binom{22}{11} \cdot \binom{11}{11} = 705432 \cdot 1 = 705432$ manieren.
We stellen de vraag iets anders: Op hoeveel manieren kan men 22 leerlingen over twee elftallen verdelen?
Eerst was er sprake van een eerste en een tweede elftal, die niet verwisselbaar waren, nu is dat wel het geval. We hebben nu dus de helft van het aantal mogelijkheden uit a., dus 705432:2=352716.

Opgave 3.1

a. Op hoeveel manieren kan men uit 5 personen (A,B,C,D,E) een commissie van 3 kiezen?
b. Schrijf de samenstelling van alle mogelijke commissies uit.
c. Op hoeveel manieren kan men uit 6 vrouwen en 8 mannen een commissie van 3 vrouwen en 4 mannen kiezen?

Opgave 3.2

Aan een tennistoernooi nemen 10 spelers deel. Op hoeveel manieren kunnen we voor de eerste ronde 5 tweetallen kiezen?

Voorbeeld 3.4

Een gezin heeft 5 kinderen. Het gaat om 2 jongens en 3 meisjes. Hoeveel gezinssamenstellingen zijn er dan mogelijk?
Nauwkeuriger geformuleerd: Hoeveel volgordes van 5 kinderen kan je maken, als telkens een keuze gemaakt wordt uit twee alternatieven: j (jongen) of m (meisje), en er in totaal 2 keer de keuze jongen en twee keer de keuze meisje gemaakt wordt.

Dit kan op twee manieren bepaald worden:

- M.b.v. een roosterdiagram, zie paragraaf 1.4.

- M.b.v. combinaties: Het aantal manieren waarop 2 jongens in het rijtje van 5 kinderen passen, komt overeen met het aantal manieren dat je 2 (kinderen) uit het aantal van 5 kunt uitkiezen. Met andere woorden: het is identiek aan het aantal combinaties van 2 uit 5. Er zijn dus $\binom{5}{2}$=10 gezinssamenstellingen mogelijk.

Opgave 3.3
Een binaire code is een rijtje met nullen en enen.
a. Hoeveel binaire codes van lengte 6 zijn er in totaal mogelijk?
b. Hoeveel van deze codes hebben precies 3 nullen?
c. Hoeveel van deze codes hebben minstens 3 nullen?
d. Teken een roosterdiagram, en laat zien hoe de antwoorden af te leiden zijn uit dit diagram.

Opgave 3.4
We maken nu codes, die bestaan uit rijtjes van lengte 8, bestaande uit nullen, enen en tweeen.
a. Hoeveel van deze rijtjes bevatten geen nullen?
b. Hoeveel van deze rijtjes bevatten precies twee nullen?
c. Hoeveel van deze rijtjes bevatten twee nullen, drie enen en drie tweeen?

Opgave3.5
Ik heb 6 verschillende muntstukken.
a. Op hoeveel manieren kan ik ze over twee zakken verdelen?
b. Op hoeveel manieren kan ik 3 munten in de ene zak doen en 3 in de andere?
c. Op hoeveel manieren kan ik iemand een fooi geven?

Opgave 3.6
Een telefoonnummer bestaat uit 6 cijfers; over deze cijfers is het volgende bekend:
- Het eerste cijfer is geen 0;
- Het cijfer 0 komt twee keer voor;
- De andere cijfers komen hoogstens één keer voor.

Hoeveel telefoonnummers zijn er op deze manier mogelijk?

4. Herhalingscombinaties

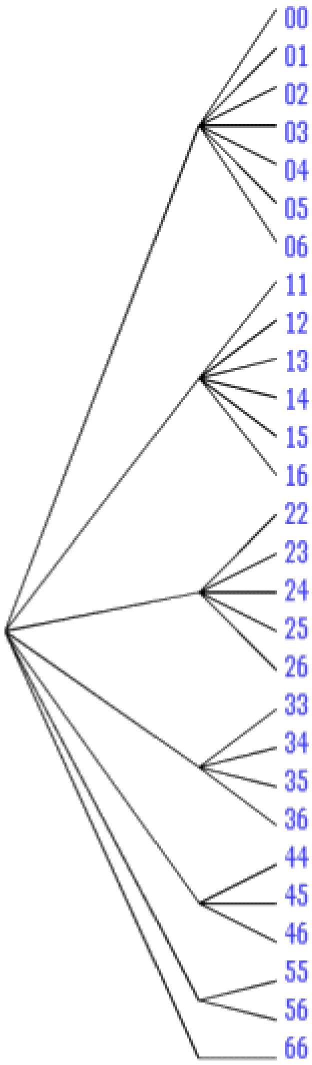
Bron: http://wisfaq.nl/pagina.asp?nummer=1773

Als je **k** elementen kiest uit een verzameling van **n** elementen, waarbij ieder element meerdere keren gekozen mag worden en waarbij **niet** gelet wordt op de volgorde dan heb je te maken met een **herhalingscombinatie**.

Voorbeeld 4.1

Een dominosteen bestaat uit twee gedeeltes. Op ieder gedeelte van een steen stelt het aantal ogen een getal voor. De getallen kunnen 0,1,2,3,4,5 of 6 zijn. Alle mogelijke verschillende stenen komen in het spel voor. Hoeveel verschillende dominostenen zijn er?

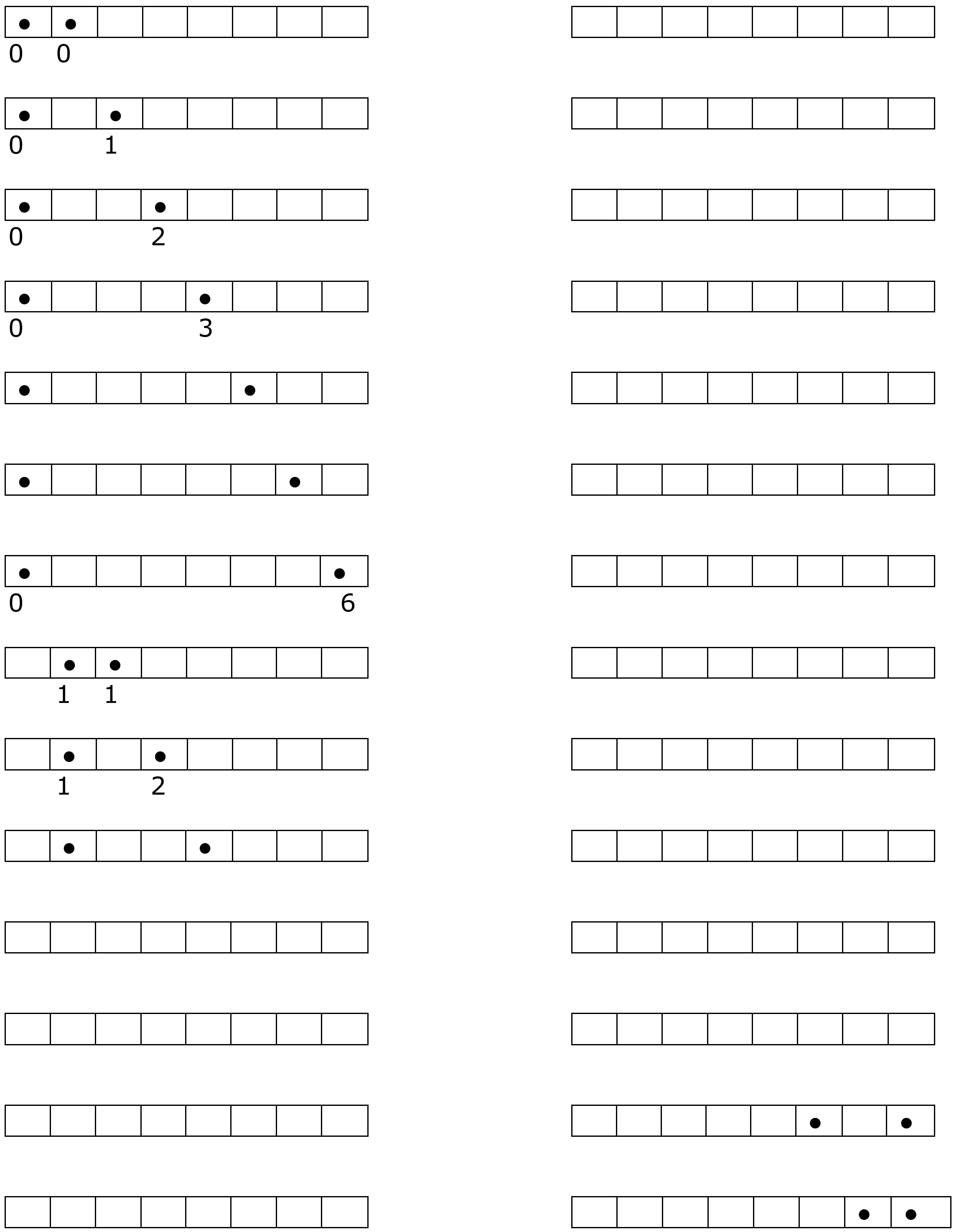
Je kiest hier 2 getallen uit een verzameling van 7 getallen, nl. {0,1,2,3,4,5,6}. Een getal mag twee keer worden gekozen en de volgorde is niet van belang. Er is dus sprake van een herhalingscombinatie.
Omdat het hier om niet zulke grote aantallen gaat, is het boomdiagram handig om de mogelijkheden weer te geven:



7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28

Dit voorbeeld is nog goed uit te werken in een boomdiagram, maar met meer getallen wordt dit al snel lastiger. We kiezen daarom voor een alternatief, het zogenaamde **bakjesmodel**.

In dit model hebben we te maken met een rijtje van 8 bakjes. We kiezen 2 bakjes uit en doen daar een knikker (●) in. Dit kan op 28 manieren (zie ook opgave 4.1.c). We gaan deze allemaal af en schrijven onder elke knikker hoeveel bakjes links van de knikker leeg zijn gebleven:



Opgave 4.1
a) Vul de overige rijtjes met twee knikkers, en geef het aantal lege vakjes links van de knikkers aan.
b) Ga na dat elk rijtje overeenkomt met precies één dominosteen.
c) Leg uit dat het aantal dominostenen $\binom{8}{2}$ is.
d) Leg nu ook uit dat het aantal herhalingscombinaties van 2 uit 7 gelijk is aan $\binom{8}{2}$.

Opgave 4.2

a. We hebben rijtjes van 6 bakjes. We kiezen telkens 3 bakjes uit en doen daar een knikker (●) in. Op hoeveel manieren kan dat?
b. Vul het schema in en schrijf weer onder elke knikker hoeveel vakjes links van de knikker leeg zijn gebleven.
c. Het schema representeert het aantal herhalingscombinaties van k uit n. Wat is k en wat is n? Waarom?

In opgave 4.1 is gebleken: Kies je in het model 8 bakjes en doe je 2 knikkers in verschillende bakjes, dan levert je dat 2 getallen op uit de verzameling {0,1,2,3,4,5,6}.
In opgave 4.2 is gebleken: Kies je in het model 6 bakjes en doe je 3 knikkers in verschillende bakjes, dan levert je dat 3 getallen op uit de verzameling {0,1,2,3}.
Algemeen geldt: Kies je in het model n-1+k bakjes en doe je k knikkers in verschillende bakjes, dan levert je dat k getallen op uit de verzameling {0,1,2,3,….,n-1}. Het aantal herhalingscombinaties van k getallen uit een verzameling van n elementen (de genoemde verzameling {0,1,2,3,….,n-1}) is dus gelijk aan het aantal manieren waarop je k knikkers in n-1+k bakjes

kunt doen.
Voor het **aantal herhalingscombinaties van k uit n** geldt dus de formule:

$$\text{aantal} = \binom{n-1+k}{k}$$

Voorbeeld 4.1
Een leraar moet 3 potloden verdelen in een klas van 12 leerlingen.
a. Op hoeveel manieren kan dit gebeuren als drie verschillende leerlingen een potlood krijgen?
b. Op hoeveel manieren kan dit gebeuren als dit niet noodzakelijk drie verschillende leerlingen hoeven te zijn?

a. Je kiest 3 leerlingen uit 12, waarbij je niet let op de volgorde. Er is hier sprake van combinaties, zonder herhaling. Het antwoord is dus $\binom{12}{3}$.
b. Je kiest ook nu 3 leerlingen uit 12, waarbij je niet let op de volgorde. Maar er is sprake van herhaling, want dezelfde leerling kan vaker uitgekozen worden. Er is hier dus sprake van herhalingscombinaties. Het antwoord is derhalve $\binom{14}{3}$.

c. Het kan ook andersom: Op hoeveel manieren kan de leraar 12 potloden verdelen onder 3 leerlingen?

Ook hier is de volgorde niet van belang, en vanzelfsprekend is er sprake van herhaling bij het verdelen van de potloden. Het antwoord is nu dus $\binom{14}{12}$.

Opgave 4.3
a. Op hoeveel manieren kan men twaalf identieke munten verdelen onder vier personen?
b. Hoe kan je mogelijkheid dat persoon 1 en 2 elk 4 munten krijgen, en persoon 3 en 4 elk 2 munten, representeren in het bakjesmodel, analoog aan opgave 4.1 en 4.2?

Opgave 4.4
We kiezen 3 letters uit de verzameling {a,b,c}. Letters kunnen vaker dan één keer gekozen worden. Hoeveel combinaties zijn er mogelijk? Maak een boomdiagram om de mogelijke combinaties uit te schrijven.

5. Aanpak van telproblemen

Bron: http://wisfaq.nl/pagina.asp?nummer=1763

5.1 Een overzicht

Bij de aanpak van veel telproblemen waarbij k elementen uit een verzameling van n elementen moeten worden gekozen is het belangrijk om eerst goed te kijken naar volgende **twee** vragen:

1. **Is het tellen met of zonder herhaling?**
2. **Is de volgorde van belang?**

Dit levert vervolgens 4 verschillende soorten telproblemen op:

		Met herhaling?	
		Nee	**Ja**
Is de volgorde van belang ?	**Ja**	**Variaties of permutaties (rangschikkingen zonder herhaling)** $\frac{n!}{(n-k)!}$ **faculteitsboom**	**Rangschikkingen met herhaling** $\text{aantal} = n^k$ **machtsboom**
	Nee	**Combinaties** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ **roosterdiagram**	**Herhalingscombinaties** $\text{aantal} = \binom{n-1+k}{k}$ **bakjesmodel**

5.2 Het vaasmodel

Een vaas met knikkers gebruiken we als model voor de bovenstaande telproblemen.
We nemen als voorbeeld een vaas met vijf knikkers, genummerd van 1 tm.5.
We pakken drie knikkers uit de vaas. Op hoeveel manieren kan dat?

Er zijn verschillende mogelijkheden:

1. **Is het tellen met of zonder herhaling?**

- Met herhaling: Als we veronderstellen dat de knikkers één voor één uit de vaas worden getrokken, en dat na elke trekking de knikker weer wordt teruggestopt in de vaas. We speken dan van **trekken met terugleggen.**

- Zonder herhaling: Als de knikkers niet worden teruggelegd, of als de knikkers tegelijk uit de vaas worden gepakt, spreken we van **trekken zonder terugleggen**.

2. Is de volgorde van belang?

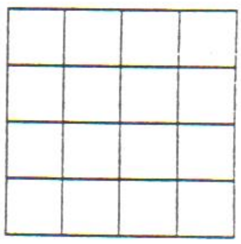
Uit de vraagstelling moet duidelijk worden of de volgorde waarin de knikkers gepakt worden al dan niet van wezenlijk belang is. In andere woorden: of er sprake is van rangschikkingen of combinaties.

Opgave 5.1

a. Bepaal in dit voorbeeld de vier mogelijke antwoorden.
b. We nemen nu een vaas met vier knikkers, waaruit twee knikkers worden gepakt. Ook nu zijn er op de vraag op hoeveel manieren dit kan vier antwoorden mogelijk. Schrijf bij elk van de antwoorden de mogelijke rangschikkingen of combinaties volledig uit.

Bij de vraagstukken in paragraaf 5.2 gaat het elke keer over rangschikkingen of combinaties, al dan niet met herhaling. Deze kunnen worden vertaald naar het vaasmodel. Zo kan opgave 5.2a gelijk worden gesteld aan het trekken van 16 keer een knikker uit een vaas met twee knikkers (een witte en een zwarte). Het betreft dan trekken met terugleggen, waarbij de volgorde van belang is.

Opgave 5.2



Op hoeveel manieren kan men bovenstaand 4x4-bord verven als
a. elk veld naar vrije keus zwart of wit geverfd wordt?
b. 8 velden zwart en 8 velden wit geverfd worden?
c. 2 velden wit, 4 zwart en 10 rood geverfd worden?
d. elk veld met een andere kleur wordt geverfd,

waarbij uit 16 kleuren gekozen mag worden?

Opgave 5.3
Op hoeveel manieren kan men 5 hotelgasten in 10 eenpersoons kamers onderbrengen?

Opgave 5.4
Aan twee tafels zijn resp. 3 en 4 vrije plaatsen. Op hoeveel manieren kan men 7 gasten over beide tafels verdelen?

Opgave 5.5
Bij een beurs worden 2 (identieke) prijzen verdeeld onder een publiek van 100 man. Op hoeveel manieren kunnen de prijzen worden verdeeld

a. Als het niet mogelijk is dat een persoon beide prijzen krijgt.
b. Als dat wel mogelijk is.

Opgave 5.6
In een kamer zijn 8 lampen die onafhankelijk van elkaar aangedaan kunnen worden. Hoeveel verlichtingsmanieren zijn er als

a. precies 5 lampen branden?
b. minstens 5 lampen branden?

Opgave 5.7
Een handelaar verkoopt appels, peren en sinaasappels. Appels, peren en sinaasappels zijn even duur. Voor 12 vruchten vraagt hij 1 euro. Hoeveel combinaties zijn mogelijk voor 1 euro?

5.3 Gemengde problemen

Opgave 5.8
4 wiskundeboeken, 5 natuurkundeboeken en 6 scheikundeboeken moeten op een plank worden gezet. Op hoeveel manieren gaat dat, als boeken op hetzelfde vakgebied naast elkaar moeten staan? Alle boeken zijn verschillend.

Opgave 5.9
Op hoeveel manieren kun je de letters rangschikken van het woord

a. ANANAS
b. STATISTIEK

Opgave 5.10
9 toeristen moeten over 3 boten, nr. 1, 2 en 3 worden verdeeld. Op hoeveel manieren gaat dat als geëist wordt dat
a. in elke boot 3 personen komen?
b. in elke boot minstens 2 en hoogstens 4 personen komen?
c. Op welke manier maakt het verschil voor het antwoord of de boten al dan niet als verschillend worden gezien?

Opgave 5.11
a. In een vlak zijn 6 rechten gegeven, waarvan geen tweetal evenwijdig is en geen drietal door een punt gaat.
Hoeveel snijpunten zijn er?
b. In een vlak zijn n rechten gegeven, waarvan geen tweetal evenwijdig is en geen drietal door een punt gaat.
Hoeveel snijpunten zijn er nu?

Opgave 5.12
Uit 5 Fransen, 10 Engelsen en 6 Duitsers moeten twee personen van verschillende nationaliteit gekozen worden. Op hoeveel manieren gaat dat?

6. Telproblemen en kansrekening

In veel boeken, ook in het boek van Buijs, kom je de kansdefinitie van Laplace tegen:

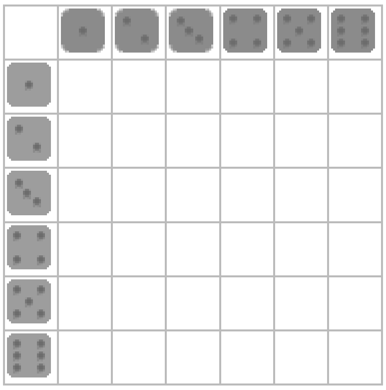
$$\textbf{De kans op een gebeurtenis} = \frac{\textbf{aantal gunstige uitkomsten}}{\textbf{aantal mogelijke uitkomsten}}$$

Hierbij ga je er vanuit dat alle uitkomsten gelijkwaardig zijn.
De gebeurtenis geeft aan welke uitkomsten gunstig zijn. Voor de bepaling van het aantal gunstige of mogelijke uitkomsten is het noodzakelijk dat je weet hoe je handig kunt **tellen**.

Voorbeeld 6.1

We gooien met twee dobbelstenen.
Wat is de kans dat de som van het aantal ogen meer dan 10 is?

Een diagram geeft de mogelijke uitkomsten:



Het aantal mogelijke uitkomsten is $6^2=36$.
Het aantal gunstige uitkomsten is 3, nl. (5,6), (6,5) en (6,6).
De gevraagde kans is dus 3/36.

Merk op dat de kansdefinitie van Laplace niet gebruikt had kunnen worden wanneer we als mogelijke uitkomsten 2,3,4,…11,12 hadden aangemerkt. Deze uitkomsten zijn immers niet gelijkwaardig.

Opgave 6.1

Bepaal de kans dat bij het gooien van twee dobbelstenen *het verschil* van de aantallen ogen minder dan twee is.

Opgave 6.2
We gooien met drie dobbelstenen.
a. Bepaal de kans dat de som van het aantal ogen groter dan 16 is.
b. Bepaal de kans dat de som van het aantal ogen precies 16 is.
c. Bepaal de kans dat de som van het aantal ogen precies 15 is.

Opgave 6.3
a. Bepaal de kans dat bij je bij drie keer gooien met een muntstuk precies twee keer kop gooit.
b. Bepaal de kans dat bij je bij vier keer gooien met een muntstuk precies twee keer kop gooit.
Teken een boomdiagram bij dit probleem. Teken ook een roosterdiagram.

Voorbeeld 6.2

In een vaas zitten 4 witte knikkers en 2 zwarte.
We pakken zonder terugleggen drie knikkers uit de vaas.
Wat is de kans dat twee van de drie knikkers wit zijn?

Er is sprake van combinaties, want de volgorde waarin de knikkers worden gepakt zijn niet van belang.
Het aantal gunstige combinaties, dus combinaties met twee witte en één zwarte knikker, is
$\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = 6 \cdot 2 = 12$.
Het aantal mogelijke combinaties, combinaties van 3 uit 6, is $\binom{6}{3} = 20$.
De gevraagde kans is dus 12/20.

Opgave 6.4
Nummer de witte knikkers uit het voorbeeld van 1, 2, 3 en 4; en de zwarte 5 en 6. Schrijf de 20 mogelijke combinaties uit, en geef aan welke 12 combinaties de gunstige zijn.

Voorbeeld 6.3

Een HBO-opleiding kent de volgende studentenaantallen , verdeeld over de 4 studiejaren: 20 eerstejaars, 16 tweedejaars, 13 derdejaars en 11 vierdejaars.
Voor de opleidingscommissie worden willekeurig 4 studenten aangewezen.

a. Wat is de kans dat elk studiejaar vertegenwoordigd is?
b. Wat is de kans dat studiejaar 1 en 2 elk met twee studenten is vertegenwoordigd?

Omdat een student niet vaker dan één keer wordt aangewezen, betreft het ook hier een trekking zonder terugleggen. Met combinaties levert dit:

a.

$$\frac{\binom{20}{1}\binom{16}{1}\binom{13}{1}\binom{11}{1}}{\binom{60}{4}} \approx 0{,}094$$

b.

$$\frac{\binom{20}{2}\cdot\binom{16}{2}}{\binom{60}{4}} \approx 0{,}047$$

Opmerking: eventueel kan dit ook met variaties (rangschikkingen) worden aangepakt:
vraagstuk a. geeft dan

$$\frac{4!\cdot 20\cdot 16\cdot 13\cdot 11}{60\cdot 59\cdot 58\cdot 57}$$

Opgave 6.5
Leg dit uit.

Opgave 6.6
Wat is in voorbeeld 6.3 de kans dat studiejaar 1 met 4 studenten is vertegenwoordigd?

Opgave 6.7
Zie ook voorbeeld 3.2.
Bij de lotto worden iedere week zes lottogetallen getrokken, door achter elkaar zes balletjes uit een machine te laten rollen. Op iedere balletje staat een getal. De balletjes die er uit zijn gerold worden niet terug gestopt. De volgorde van de balletjes is niet belangrijk. Er zijn 41 genummerde balletjes en er worden zes balletjes getrokken.
Deelnemers aan de lotto moeten op een formulier 6 verschillende getallen tussen 1 en 41 aankruisen.
a. Bepaal de kans dat de 6 aangekruiste getallen overeenkomen met de nummers van de 6 getrokken balletjes.
b. Bepaal de kans dat 5 van de 6 aangekruiste getallen hiermee overeenkomen.

Opgave 6.8
Uit 5 Fransen, 10 Engelsen en 6 Duitsers worden willekeurig twee personen gekozen. Wat is de kans dat twee personen van verschillende nationaliteit gekozen worden?

Opgave 6.9
4 wiskundeboeken, 5 natuurkundeboeken en 6 scheikundeboeken worden lukraak op een plank gezet. Wat is de kans dat de boeken van hetzelfde vakgebied naast elkaar staan?

Opgave 6.10
Drie echtparen maken een uitstapje en nemen plaats in drie tweepersoonskano's.
De indeling van de kano's wordt door loting bepaald.
Wat is de kans dat elk van de drie echtparen bij elkaar in de kano's worden ingedeeld?

Bijlage 1: Onderzoeksopdrachten

Week 2

A) Driehoek van Pascal (1)
Vertel iets over de geschiedenis van de driehoek van Pascal en leg uit hoe de driehoek is opgebouwd (bijvoorbeeld het verband met roosterdiagrammen, combinaties).

B) **Driehoek van Pascal (2)**
Leg het verband uit tussen de driehoek van Pascal en het binomium van Newton, via binomiaalcoëfficiënten.

Week 3

A) Herhalingscombinaties
Leg uit waarom je herhalingscombinaties kunt uitrekenen met de formule $\binom{n-1+k}{k}$. Je kunt hiervoor gebruik maken van het bakjesmodel uit hoofdstuk 4 van de syllabus, of op zoek gaan naar een andere manier.

B) Geschiedenis van de kansrekening
Het vakgebied kansrekenen is ooit ontstaan in de zeventiende eeuw vanuit een probleem over het verdelen van een pot met geld bij een onafgemaakt spelletje. Zoek uit hoe dat zit.

Week 4

A) Sinterklaasprobleem
Wat is de kans dat met lootjes trekken voor Sinterklaas niemand zichzelf krijgt? Werk dat uit voor 3, 4 en 5 deelnemers en probeer daarna naar een willekeurig aantal te kijken.

B) Verjaardagsparadox
Wat is de kans dat je op een feestje iemand tegenkomt die op dezelfde dag jarig is als jij? Wat is hier de paradox? Leg uit.

Week 5

A) Drie-deuren-probleem (ook wel “Monty Hall”)
Je staat in de finale van een quiz en hebt de keuze uit drie deuren. Achter een van de drie staat een prachtige auto. Dit is het begin van een klassiek probleem uit de kansrekening. Zoek uit hoe het afloopt.

B) Testuitslag
Lees de openingscasus van hoofdstuk 3 over de ziekte Probabilitis (blz 99). Laat zien met behulp van percentages en kansen dat de genoemde student gelijk heeft.

Week 6

A) **Partner-keuze-probleem (ook wel “grootste taart-probleem”)**
Je krijgt achter elkaar in willekeurige volgorde zes personen te zien. Na elke persoon moet je beslissen of je met deze persoon wilt trouwen of niet. Je mag maar één keer ja zeggen en je kunt niet meer terug als je iemand eenmaal hebt afgewezen. Er is een wiskundige strategie om dit soort problemen aan te pakken. Zoek dat uit.

B) **Kansrekenen in de rechtspraak**
Lucia de Berk is uiteindelijk vrijgesproken voor meervoudige moord, omdat het statistisch bewijs tegen haar geen stand hield bij de Hoge Raad. Kansrekenen speelt regelmatig een rol bij bewijsvoering (en rechterlijke dwaling). Ga op zoek naar drie voorbeelden die je (versimpeld) kunt uitleggen. Het gaat hier niet om de precieze wiskundige achtergrond, maar om voorbeelden.

Week 7

A) **Bord van Galton**
Wat is het Bord van Galton, zoek een simulatie/applet, leg verbanden met de driehoek van Pascal (week 2) en de normale verdeling.

B) **Naald van Buffon**
Door middel van een kansexperiment met naalden kun je een benadering van pi geven. Zoek een simulatie/applet en ontdek hoe dit werkt.

Suggesties voor bronnen:

1) www.wiskundemeisjes.nl
2) www.kennislink.nl
3) wikipedia, wisfaq, enz

Tip: probeer door zoektermen bij te stellen een of twee hele goede bronnen te vinden (Nederlandstalig, toegankelijk geschreven) in plaats van een heleboel onduidelijke bronnen door te ploeteren na de eerste de beste zoekterm.

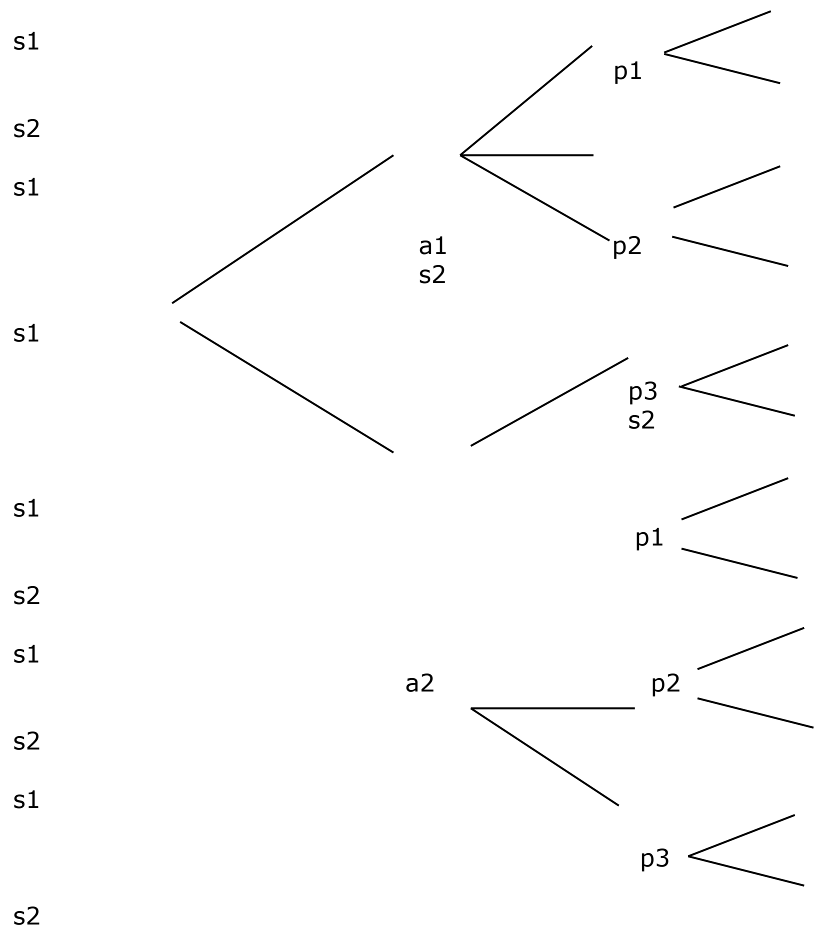
Bijlage 2: Antwoorden

Opgave 1. 1

a. $6^3=216$
b. $5^3=125$
c. 125/216

Opgave 1. 2

a. Eerst keuze uit 2 appels (noem ze a1 en a2), dat kan op 2 manieren, vervolgens kan je op 3 manieren een peer kiezen, en vervolgens op 2 manieren een sinaasappel, dus totaal $2 \cdot 3 \cdot 2=12$ manieren.



b. Eerst de appels: keuze uit 2 appels of je kiest helemaal geen appel, dat geeft 3 mogelijkheden (keuze uit a1, a2 en x); daarna de peren: 4 mogelijkheden; daarna de sinaasappels: 3 mogelijkheden. Totaal:$3 \cdot 4 \cdot 3=36$.
In de boom geeft dat vanaf de start eerst 3 vertakkingen (naar a1, a2 en x), dan telkens 4 vertakkingen (naar p1, p2, p3 en x), en dan telkens weer 3 (naar s1, s2 en x).

Opgave 1.3
Door een kansboom te tekenen kan je zoiets laten zien (het tekent natuurlijk makkelijker als je kleinere getallen neemt).

Opgave 1.4
Voor leerling 1 zijn 30 stoelen beschikbaar, daarna kan leerling 2 nog kiezen uit 29 stoelen, etc., dus totaal op $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 6 \approx 2{,}21 \cdot 10^{30}$ manieren.

Opgave 1.5
a. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
b. voorzitter een man: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$; voorzitter een vrouw: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Totaal: $12 + 6 = 18$.

Opgave 1.7
$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1440$

Opgave 1.8
Kies 4 punten, a, b, c en d. Van a naar d is er 1 rechtstreekse verbinding; van a naar b 2; van b naar d 3; van b naar c 2; van c naar d 4.

Opgave 1.9
Maak onderscheid tussen 4 routes:
acdca: $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$ manieren.
acdcba: $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$ manieren.
abcdcba: $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2$ manieren.
abcdca: $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ manieren.
Alles optellen geeft in totaal:
$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (1 + 2 \cdot 3) + 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2 + 2) = 456$

Opgave 1.11
jjmm, jmjm, jmmj, mjjm, mjmj, mmjj.

Opgave 1.12
a. $2^6 = 64$
b. 20; in het roosterpunt dat hoort bij 3 keer een lamp aan en 3 keer een lamp uit (3 stappen naar rechts en 3 naar boven) komt het aantal van $10+10=20$ te staan.

Opgave 1.13
18

thuis

	3	9	18
	3	6	9
1	3	3	3
1	2		
	1		

0 1 2 3 uit

Opgave 2.1
a. $10^2 \cdot 26^2 \cdot 10^2 = 6760000$

b. $26^2 \cdot 10^2 \cdot 26^2 + 10^2 \cdot 26^2 \cdot 10^2$

Opgave 2.2
Stel n=k, dan $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{0!} = n!$, want 0!=1 (zie paragraaf 1.2).

Opgave 2.3
6·5·4=120 of 6!/3!

Opgave 2. 4
AANN, ANAN, ANNA, NAAN, NANA, NNAA. 4!/(2!·2!)=6

Opgave 2. 5
11 letters, waarvan 4 keer de s, 4 keer de i en 2 keer de p. Dat geeft
11!/(4!·4!·2!)=34650 rangschikkingen.

Opgave 3. 1

a. $\binom{5}{3} = 10$
b. Aanwijzing: maak een boomdiagram om ze systematisch op te sporen.
   ABC,ABD,ABE,ACD,ACE,ADE,BCD,BCE,BDE,CDE.
c. $\binom{6}{3} \cdot \binom{8}{4} = 1400$

Opgave 3. 2

Eerst kies je een eerste tweetal, dat kan op $\binom{\mathbf{10}}{\mathbf{2}}$ manieren. Vervolgens zijn er nog 8 over voor het volgende tweetal, dus dat kan op $\binom{\mathbf{8}}{\mathbf{2}}$ manieren, etc. Dus kan je op $\binom{\mathbf{10}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{8}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{2}}{\mathbf{2}}$ manieren 5 tweetallen kiezen. De volgorde waarin je de spelers per tweetal aanwijst was hier niet van belang. Van de tweetallen zelf is het aantal rangschikkingen berekend. In de vraagstelling gaat het echter niet om het aantal rangschikkingen, maar om het aantal combinaties van 5 tweetallen. Dus nog delen door 5!. Dit geeft
$\frac{\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{5!} = \mathbf{945}$

Opgave 3.3

a. $2^6=64$
b. $\binom{6}{3} = 20$
c. $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 42$
d. Vergelijk par. 1.4 en opgave 1.12

Opgave 3.4

a. Geen nullen betekent alleen enen of tweeën, dus rijtjes van 8 met telkens 2 mogelijkheden. Dit geeft 2^8=256 rijtjes.

b. Eerst 2 posities voor de nullen, dat kan op $\binom{8}{2}$ manieren. Daarna op de overige 6 posities een 1 of een 2. Dat kan op 2^6 manieren. Dus totaal $\binom{8}{2} \cdot 2^6 = 28 \cdot 64 = 1792$ manieren.

c. Eerst 2 posities (uit 8) voor de nullen kiezen. Daarna zijn er nog 6 posities voor de enen over, daar worden er 3 uit gekozen. Tot slot komen de 3 tweeën op de 3 overgebleven posities. Dit geeft $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 28 \cdot 20 \cdot 1 = 560$ mogelijkheden.

Opgave 3. 5

a. 2^6=64 manieren als je de twee zakken als verschillend ziet. 64:2=32 manieren als de zakken onderling verwisselbaar zijn. Als hier niets over vermeld is, mag je ervan uitgaan dat de zakken onderling verwisselbaar zijn.

b. $\binom{6}{3} = 20$ manieren als de zakken verschillend zijn, 20:2=10 als dat niet zo is.

c. 64-1=63. In één van de twee zakken komt de fooi. Nu zijn de zakken niet verwisselbaar. Stel dat in de zak van de fooi geen enkele munt wordt gedaan, dan is er eigenlijk geen sprake van een fooi, dus deze mogelijkheid kan worden weggestreept.

Opgave 3.6

Eerst 2 posities voor de 0 kiezen uit 5 mogelijke posities; dat kan op
$\binom{5}{2}$ manieren. Dan zijn er 9 cijfers beschikbaar voor de 4 overgebleven posities. Hierbij gaat het om rangschikkingen zonder herhaling. Dat kan op 9·8·7·6 manieren. Totaal dus op $\binom{5}{2}$·9·8·7·6=30240 manieren.

Opgave 4.1

c. Het aantal manieren om 2 bakjes uit een rij van 8 te kiezen is $\binom{8}{2}$.Bij elke keuze hoort één dominosteen (en omgekeerd). Het aantal dominostenen is dus ook $\binom{8}{2}$.

d. Het aantal dominostenen is gelijk aan het aantal herhaliingscombinaties van 2 getallen uit de verzameling {0,1,2,3,4,5,6}, of kortweg het aantal herhalingscombinaties van 2 uit 7. Dit is dus ook $\binom{8}{2}$.

Opgave 4.2

a. $\binom{6}{3} = 20$

b.
000,001,002,003,011,012,013,022,023,033,111,112, 113,122,123,133,222,223,233,333

c. Het gaat om het aantal herhalingscombinaties van 3 uit 4. k=3 (het aantal knikkers). n geeft aan uit hoeveel verschillende getallen kan worden gekozen. Deze getallen betreffen het aantal lege bakjes links naast een knikker en kunnen varieren van 0 tm. 3. n is dus 4.

Opgave 4.3

a. $\binom{15}{12} = 455$

b. Het gaat om het aantal herhalingscombinaties van 12 uit 4. Vier keer persoon 1, 4 keer persoon 2, 2 keer persoon 3 en 2 keer persoon 4 levert de volgende herhalingscombinatie:
1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 4 4 .
Dit vertalen we voor het bakjesmodel naar
0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 3 3 , dus naar

●	●	●	●		●	●	●	●		●	●		●	●

Opgave 4.4

10
aaa,aab,aac,abb,abc,acc,bbb,bbc,bcc,ccc

Opgave 5.1

a. Rangschikking zonder herhaling: 5·4·3=60
   Rangschikking met herhaling: 5·5·5=5^3=125
   Combinaties: $\binom{5}{3} = 10$
   Combinaties met herhaling: $\binom{7}{3} = 35$

b. We pakken twee keer een knikker die genummerd is met 1,2,3 of 4 en zetten de uitkomsten in schema:

1e knikker: 2e knikker:	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

In totaal kan je op 4 · 4 = 16 manieren twee keer een knikker pakken (rangschikking met herhaling, ofwel: trekken met terugleggen, volgorde wel van belang).
Er zijn 4·3=12 rangschikkingen zonder herhaling (trekken zonder terugleggen, volgorde wel van

belang). In het schema vervallen de uitkomsten op de diagonaal (1,1), (2,2), (3,3), (4,4).
Er zijn $\binom{4}{2} = 6$ combinaties (trekken zonder terugleggen, volgorde niet van belang). In het schema houd je alleen de uitkomsten onder (of zo je wilt boven) de diagonaal over.
Er zijn $\binom{5}{2} = 10$ herhalingscombinaties (trekken met terugleggen, volgorde niet van belang). In het schema zijnn dit de uitkomsten oop en onder de diagonaal.

Opgave 5.2

a. 2^{16}=65536
b. Kies eerst 8 velden voor wit: aantal combinaties van 8 uit 16 is $\binom{16}{8}$=12870
c. $\binom{16}{2}\cdot\binom{14}{4}\cdot\binom{10}{10}$=120120
d. 16!

Opgave 5.3

10·9·8·7·6=30240 (of 10!/5!); vergelijk opgave 1.4.

Opgave 5.4

$\binom{7}{3} = 35$. De rangschikking per tafel is hier niet van belang.

Opgave 5. 5

a. $\binom{100}{2} = 4950$; je kiest 2 keer een persoon uit 100, volgorde niet van belang, want prijzen zijn identiek. Verschillende personen, herhaling is niet toegestaan. Dus combinaties.
b. $\binom{101}{2} = 5050$; je kiest 2 keer een persoon uit 100, volgorde niet van belang, herhaling wel toegestaan. Dus herhalingscombinaties.

Opgave 5. 6

a. $\binom{8}{5} = 56$
b. Minstens 5: 5 of 6 of 7 of 8 lampen branden. 56+28+8+1=93

Opgave 5. 7

$\binom{14}{12}$ =91. Je kiest 12 vruchten uit 3. Herhaling toegestaan, volgorde niet van belang. Dus herhalingscombinaties.
Andere methode: Je koopt of 12, of 11, of 10, …..of 1, of 0 appels. Per mogelijkheid ga je na met welke aantallen peren en sinaasappels op een totaal van 12 komt.

Bij 12 appels passen alleen 0 peren en 0 sinaasappels; dus dit geeft 1 mogelijkheid.
Bij 11 appels passen 1 peer en 0 sinaasappels, of 0 peren en 1 sinaasappel; dus dit geeft 2 mogelijkheden.
Etc., etc.
Bij elkaar geeft dit 1+2+3+…….+12+13=91 mogelijkheden.

Opgave 5. 8
$3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! = 12.441.600$. Er zijn 3! volgordes van de 3 vakken. Per vak kan je de boeken op resp. 4!, 5! en 6! manieren rangschikken.

Opgave 5. 9
a. 6!/(3!·2!)=60 (zie voorbeeld 2.4 en 2.5)
b. 10!/(2!·2!·3!)=151200

Opgave 5. 10
a. $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}$ =1680
b. $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} + \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} + \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} + \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3} + \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2}$ =9240
c. Als de boten niet als verschillend worden gezien, dan is het aantal mogelijke verdelingen 6 keer zo klein.

Opgave 5. 11
a. $\binom{6}{2} = 15$. Elke combinatie van 2 rechten levert precies één snijpunt. Dus de vraag kan worden teruggebracht tot het aantal combinaties van 2 rechte lijnen uit 6.
b. $\binom{n}{2}$

Opgave 5.12
5·10+5·6+10·6=140

Opgave 6.1
16/36

Opgave 6.2
a. 4/216
b. 6/216
c. Tel het aantal gunstige uitkomsten (dit zijn rangschikkingen met als som 15):
3 keer een 5: 1 rangschikking.
2 keer een 6 en 1 keer een 3: 3 rangschikkingen.
1 keer een 4, 1 keer een 5 en 1 keer een 6: 6 rangschikkingen.
Dit geeft in totaal 10 gunstige uitkomsten. Dus de

kans is 10/216.

Opgave 6.3
a. 3/8 (zie paragraaf 1.1)
b. 6/16 (zie ook paragraaf 1.4)

Opgave 6.4
123, 124, **125, 126**, 134, **135, 136, 145, 146,** 156, 234, **235, 236, 245, 246**, 256, **345, 346**, 356, 456.

Opgave 6.5
Het aantal gunstige rangschikkingen, van 4 studenten uit de 4 verschillende studiejaren is 4!·20·16·13·11.
Het aantal mogelijke rangschikkingen van 4 studenten uit 60 is 60·59·58·57.

Opgave 6.6

$$\frac{\binom{20}{4}}{\binom{60}{4}} \approx 0{,}0099$$

Opgave 6.7
a.

$$\frac{\binom{6}{6}}{\binom{41}{6}} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-7}$$

b.

$$\frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{35}{1}}{\binom{41}{6}} \approx 4{,}7 \cdot 10^{-5}$$

Opgave 6.8
aantal mogelijke combinaties: $\binom{21}{2} = 210$.
aantal gunstige combinaties:
F en D, of F en E, of D en E. Dus 5·10+5·6+10·6=140, of zo je wilt $\binom{5}{1}.\binom{10}{1} + \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{1} + \binom{10}{1} \cdot \binom{6}{1} = 140$. (zie ook opg. 5.12)
Dus de kans is 140/210

Opgave 6.9
$\frac{3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 6!}{15!} \approx 9{,}5 \cdot 10^{-6}$ (zie ook opg. 5.8)

Opgave 6.10
Begin met het vaststellen van het aantal mogelijke uitkomsten. Ook hier is het handig om te kiezen voor combinaties. Voor bootje 1 kunnen 2 personen uit 6 gekozen worden, voor bootje 2 daarna nog 2 uit 4 en voor bootje 3 nog 2 uit 2. Dus dat geeft $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ mogelijke combinaties. Dit lijkt overigens op opgave 5.10a.

Het aantal gunstige combinaties zijn die combinaties waarbij de echtgenoten bij elkaar in één bootje zitten. Echtpaar 1 kan in bootje 1, 2 of 3 bij elkaar zitten, echtpaar 2 kan dan nog in twee bootjes bij elkaar zitten, etc. Met andere woorden: De 3 stelletjes kunnen op 3! manieren zijn gerangschikt over de 3 bootjes.

Dus de kans is $\frac{3!}{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}} = 1/15.$