
SANGAKU — WISKUNDE ALS KUNST

De meeste bijdragen in Arthesis bespreken kunstwerken die gebaseerd zijn op (de presentatie van) een wiskundige structuur, dus ze gaan over wiskunde in kunst. De betrokken kunstenaar creëert bewust of onbewust een object dat een visualisatie is van een wiskundig begrip, bijvoorbeeld veelvlak, symmetrie, reeks of verhouding.

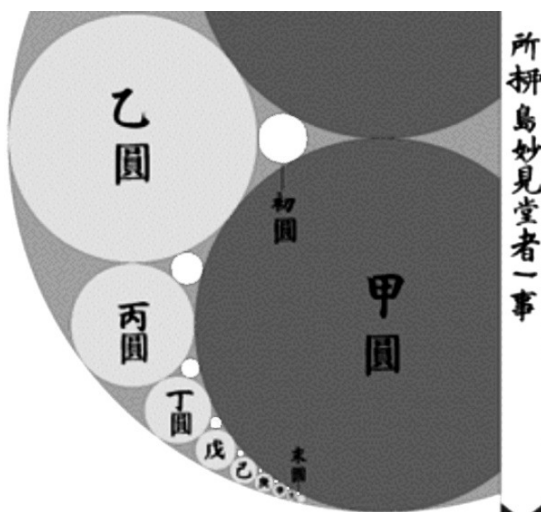
Wiskunde zelf kan echter ook mooi en kunstzinnig zijn. Wiskundigen spreken over een mooie formule, een fraai bewijs, een elegante oplossing, zwaar of lichtvoetig redeneren. Wiskunde bedrijven is bovendien een zeer creatieve bezigheid: men bedenkt concepten, maakt veronderstellingen en tracht oplossingen op te bouwen. Net als kunstenaars, is de wiskundige altijd geplaatst voor oneindig veel mogelijkheden en wordt uitgedaagd een weg te vinden naar iets wat nieuw en interessant is.

Al deze aspecten van "schoonheid in wiskunde" zijn te vinden in sangaku's. Sangaku is een Japans woord dat "wiskundeplank" betekent. Een sangaku is een houten plankje waarop een wiskundige stelling is gepresenteerd in een zeer compacte vorm, vaak alleen door een illustratieve tekening met of zonder formule erbij. De meeste sangaku-onderwerpen gaan over vlakke meetkunde. Een tegenwoordige editie van verzamelde sangaku's (er zijn er maar weinig, zie de literatuurlijst) doet de lezer versteld staan van de rijkdom en schoonheid van stellingen over het meest favoriete onderwerp, elkaar rakende cirkels: cirkels binnen en om een cirkel, ellips, driehoek, vierkant...

Vandaag kunnen we slechts raden naar de motivaties van de sangaku-makers. Een wiskundige ziet in de sangaku's duidelijk de sporen van esthetische criteria: de stellingen - hoewel mogelijk moeilijk en belangrijk - zijn niet willekeurig, maar in eerste instantie mooi: de manier waarop de cirkels gearrangeerd



zijn springt in het oog, is harmonisch en is altijd plezierig om naar te kijken. De formules die de stelling uitdrukt is gewoonlijk ook elegant en fraai, hoewel het voor een niet-wiskundige misschien moeilijk is een voorstelling te hebben van een fraaie formule. Welnu, een paar suggesties: een mooie formule is kort, eenvoudig opgebouwd met behulp van kleine of bijzondere gehele getallen en van afstanden die makkelijk te identificeren zijn in de tekening. Symmetrie en het voorkomen van "betekenisvolle" deelformules (zoals het geometrisch gemiddelde) verhogen de esthetische waarde. Let wel, we spreken over de esthetische waarde van de formules die een stelling uitdrukken en niet over de esthetische waarde van de stelling zelf. De uitspraken die zijn samengebracht in een elegante formule met bijbehorende illustratie zijn vaak met moeite te beschrijven in enkele zinnen in gewone taal. Zo'n taalversie zou ook de elegantie en de schoonheid missen die aanwezig is in de formule met een visuele presentatie. Aldus is de afwezigheid van tekstuele uitleg bij sangaku's een logisch gevolg van de motivatie om een stuk wiskundige schoonheid te presenteren. Aan de visuele presentatie - het gebruik van kleur, de rangschikking- werd bijzondere aandacht gegeven en dat resulteerde vaak in meetkundige stukjes kunst.



Door wie en waarom werden de sangaku's gemaakt? Vanaf 1639 is Japan gedurende meer dan twee eeuwen afgesloten geweest van de Westerse wereld. Noch voorwerpen uit het westen, noch boeken of ideeën konden het land bereiken. Aldus wist niemand in Japan iets over de bloei van de Westerse wiskunde, met namen als Fermat, Euler, Gauss... In deze isolatie werd wiskunde op een speciale manier beoefend. Geleerden uit alle lagen van de bevolking, van boeren tot samoerai's, bedachten stellingen. Er zijn ook door vrouwen en kinderen sangaku's getekend. Deze stellingen verschenen als prachtig gekleurde tekeningen op houten tabletten, die werden opgehangen onder de tempeldaken. Waarom tempels? In die dagen waren er geen universiteiten in Japan, maar Shinto-heiligdommen en Boeddhistische tempels waren de centra van kennis. De vele pelgrims die de heiligdommen en tempels bezochten zorgden ook voor de verspreiding van wiskundig nieuws. Tenslotte was het een oude shinto-traditie de goden te verblijden met giften. Goden werden geacht van paarden te houden. Het geschenk was symbolisch: het paard werd getekend op een houten plankje, en honderden van deze plankjes, door pelgrims achtergelaten, hingen onder het tempeldak. Sangaku's konden ook op die manier gebruikt worden om toewijding of dankbaarheid te tonen. De auteur kon als het ware de goden verblijden met wiskundige parels, eventueel als tegenprestatie voor hun steun en inspiratie om die te kunnen vinden.

Er moeten duizenden sangaku's bestaan hebben, die tezamen een aanzienlijke hoeveelheid stellingen uit de vlakke meetkunde hebben gevormd. Niet alleen basisstellingen die in het Westen bekend waren werden opnieuw uitgevonden, maar sommige stellingen waren al als sangaku verschenen voordat ze in het Westen werden gevonden, en sommige waren zelfs onbekend buiten Japan.

Sangaku's gaven bijna nooit een bewijs bij de stelling, alsof ze de voorbijganger wilden uitdagen: kunt u dit bewijzen? Reeds vanaf het midden van de 18e eeuw bestonden er handgeschreven boeken met sangaku-oplossingen. Later werden veel tempels verlaten en raakten in verval; hierdoor zijn de meeste sangaku's verloren gegaan. Tientallen jaren later werden er gelukkig nog nieuwe sangaku's gevonden

op afgelegen plaatsen. Vandaag bestaan er ongeveer 820 sangaku's, maar nog veel meer puzzels van vernietigde sangaku's zijn bekend uit de verzamelboeken.

Sangaku-opdrachten worden meestal heel beknopt voorgesteld: vaak is er alleen een tekening, met een formule eraan die bewezen moet worden. De letters in de formule duiden afstanden in de tekening aan, die mogelijk in de tekening aangegeven zijn. Dus de eerste puzzel is om uit te vinden wat er precies te bewijzen is. Als eerste stap moeten dus alle gegevens uit de tekening gehaald worden. De zaak wordt nog moeilijker wanneer er geen formule aanwezig is, maar een vraag: hoe groot is de afstand? Natuurlijk, is het niet de bedoeling om de afstand in de tekening op te meten, maar om deze uit te drukken als een formule van enkele bepalende gegevens uit de tekening, zoals stralen van cirkels etc. Natuurlijk moet de formule dan bewezen worden. Het is niet vanzelfsprekend in te zien hoe de tekening was geconstrueerd, het bewijs van de stelling is vaak de sleutel voor het reproduceren van de tekening.

Op de volgende pagina staan 4 sangaku opdrachten, gerangschikt van makkelijk tot ingewikkelder, met sprekende namen verzonnen door Hans de Rijk. De uitleg over de opdrachten met oplossing komt in de volgende Arthesis. En wie zolang niet kan wachten kan op 6 november in Baarn terecht - zie het kader op de volgende pagina.

Maar tot dan: zelf aan de slag!

Zsafia Ruttkay

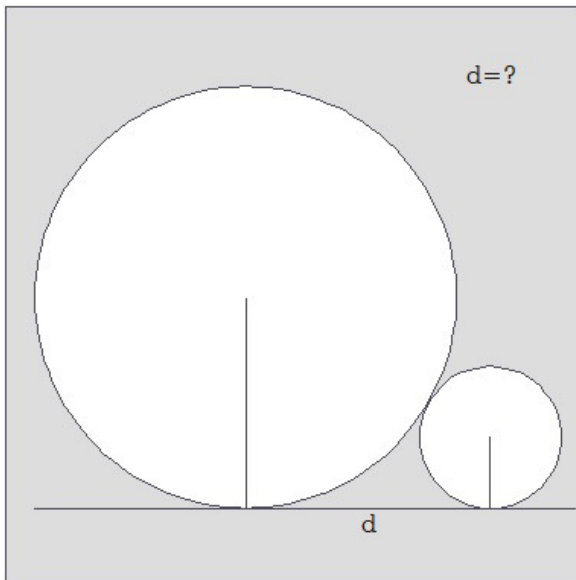
Literatuur

* Hidetosi Fukagawa, Dan Pedoe: Japanese Temple Geometry Problems, Charles Babbage Research Foundation, Winnipeg, Canada, 1989.

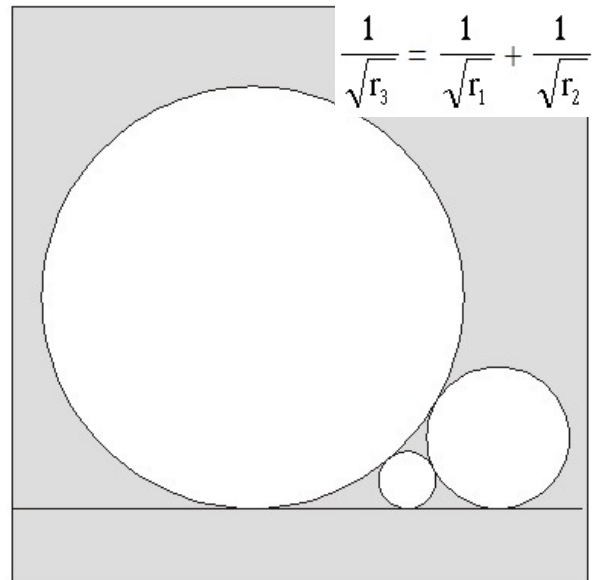
* Hidetosi Fukagawa, D. Sokolowsky: Traditional Japanese Mathematics Problems from the 18th and 19th centuries, Science Culture Technology Publishing, Singapore (in press)

* Tony Rothman: Japanese Temple Geometry, Scientific American, May 1998

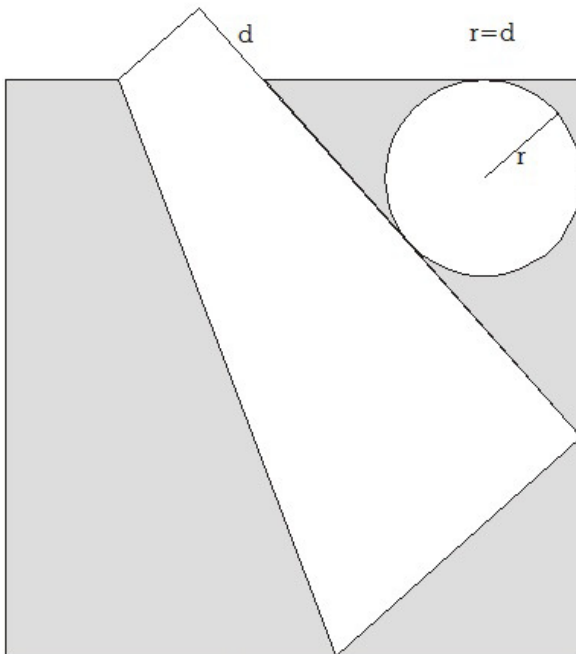
Internet: www.sciam.com/1998/0598issue/0698rothman.html



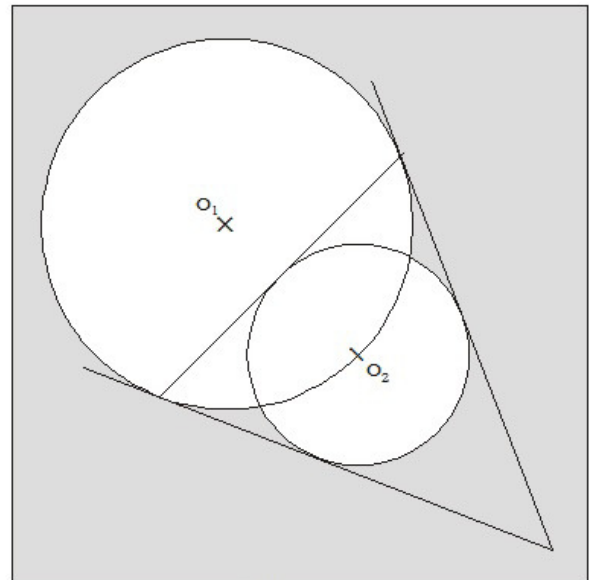
de botsing



het gevangen muisje



het servet



de komeet

SANGAKU-KWARTET

Hans de Rijk was de aanstichter, met zijn idee dat Zsafia Ruttkay en Ineke Lambers samen eens iets met sangaku's moesten doen. Bovenstaande sangaku-opdrachten vormen de eerste etappe. De tweede etappe krijgt gestalte als "sangaku-kwartet": vier kaarten met op de voorkant impressies gebaseerd op de vormen van deze sangaku's en aan de binnenkant de eigenlijke opdrachten; de oplossingen worden op een inlegvel bijgevoegd. De kaarten worden op de komende Ars et Mathesisdag op 6 november gepresenteerd en zijn daar te koop (opbrengst t.b.v. Ars et Mathesis). Na 6 november kunnen de kaarten ook worden besteld: fl 10 per set plus fl2,50 verzendkosten overmaken op giro 1315269 t.n.v. J.J. Lambers-Hacquebard onder vermelding van "Sangaku", gewenst aantal sets en eigen naam plus adres. De kaarten worden U dan z.s.m. toegezonden.