# algebraische vaardigheden

Algebraische vaardigheden voor leerlingen in HAVO 3 die wiskunde B gaan doen.

Willem van Ravenstein

## Inhoudsopgave

1. merkwaardige producten
2. het herleiden van breuken
3. het herleiden van machten
4. vergelijkingen en ongelijkheden

Willem

# 1. merkwaardige producten

**Het merkwaardige product (a+b)(a-b)**

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Je kunt met dit merkwaardig product in één keer het opschrijven van bijvoorbeel $(a+4)(a-4)$, dat is namelijk gelijk aan $a^2 - 16$

**Voorbeeld**

$(5x+9)(5x-9) = 25x^2 - 81$

**De merkwaardige producten (a+b)$^2$ en (a-b)$^2$**

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Omdat $ab$ het product is van $a$ en $b$ heet $2ab$ het **dubbele product** van $a$ en $b$.

Bij het herleiden van merkwaardige producten mag je tussenstappen weglaten. Je schrijft in één keer op:

$(a+5)^2 = a^2 + 10a + 25$

Het dubbele product is $10a$.

**Regels om haakjes weg te werken**

Voor het wegwerken van haakjes ken je de volgende regels:

**Haakjes wegwerken**

- $a(b+c) = ab + ac$
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- $(ab)^2 = a^2b^2$

**Merkwaardige producten**

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**Voorbeeld**

$(3b)^2 - (3a+2b)^2 =$
$9b^2 - (9a^2 + 12ab + 4b^2) =$
$9b^2 - 9a^2 - 12ab - 4b^2 =$
$-9a^2 - 12ab + 5b^2$

**DENK AAN DE HAAKJES**

**Haakjes wegwerken en merkwaardige producten**

Bij herleiden gaat machtsverheffen voor vermenigvuldigen. Daarom bereken je bij $4(x-3)^2$ eerste $(x-3)^2$ en daarna vermenigvuldig je alle termen met 4. Denk aan de haakjes...

**Voorbeeld**

$2(x+3)^2 - 3(x-1)(x-6) =$
$2(x^2 + 6x + 9) - 3(x^2 - 7x + 6) =$
$2x^2 + 12x + 18 - 3x^2 + 21x - 18 =$
$-x^2 + 33x$

## 2. het herleiden van breuken

| | |
|---|---|
| **Breuken vereenvoudigen**<br><br>In $\frac{20xy}{25xyz}$ kun je teller en noemer delen door 5, x en y.<br><br>Dus $\frac{20xy}{25xyz} = \frac{4}{5z}$<br><br>**Voorbeeld**<br><br>$\frac{9xyz}{3yz} - 3x = 3x - 3x = 0$ | **Optellen van breuksn**<br><br>Bij het optellen van gelijknamige breuken tel je de tellers op, de noemer verandert niet.<br><br>Om niet-gelijknamige breuken op te tellen maar je ze eerste **gelijknamig**.<br><br>**Voorbeeld**<br><br>$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{2b}{ab} + \frac{3a}{ab} = \frac{3a+2b}{ab}$ |
| **Vermenigvuldigen en delen van breuken**<br><br>$breuk \times breuk = \frac{teller \times teller}{noemer \times noemer}$<br><br>**Voorbeeld**<br><br>$\frac{3a}{2bc} \cdot \frac{4ab}{c} = \frac{12a^2b}{2bc^2} = \frac{6a^2}{c^2}$ | **Breuken vereenvoudigen met behulp van ontbinden in factoren**<br><br>**Voorbeeld**<br><br>$\frac{a^2 - 9a - 10}{(a+1)^2} = \frac{(a-10)(a+1)}{(a+1)(a+1)} = \frac{a-10}{a+1}$ |

# 3. het herleiden van machten

**Machten vermenigvuldigen en optellen**

Een product van machten met hetzelfde grondtal kun je herleiden tot één macht door de exponenten op te tellen. Het grondtal blijft gelijk.

- ✔ $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

**Voorbeeld**

- ✔ $a^2 \cdot a^3 = a^5$

**Machten optellen**

Machten kan je meestal niet optellen, behalve als het gelijksoortige termen zijn. Dat wil zeggen met hetzelfde grondtal en dezelfde exponent.

**Voobeeld**

- ✔ $x + x^2 + x^3$ kan je niet korter opschrijven omdat het geen gelijksoortige termen zijn.
- ✔ $2x^2 + 3x^2 - x^2$ kan je schrijven als $4x^2$ omdat het hier gaat om gelijksoortige termen.

**De macht van een macht en macht van een product**

Bij een macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten:

- ✔ $(a^p)^q = a^{pq}$

Bij de macht van een product neem je elke factor tot die macht.

- ✔ $(ab)^p = a^p b^p$

**Voorbeelden**

- ✔ $(3ab)^2 - (a^2)^3 = 9a^2b^2 - a^6$
- ✔ $(2xy^2z^3)^3 = 8x^3y^6z^9$
- ✔ $(2\frac{1}{2}x^3 - 1)^2 = 6\frac{1}{4}x^6 - 5x^3 + 1$

**Machten delen**

Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponent in de noemer af van de exponent in de teller.

- ✔ $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

**Voorbeeld**

$$\frac{(3ab)^5}{(3ab)^3} = (3ab)^2 = 9a^2b^2$$

**Regels voor machten**

- ✔ $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
- ✔ $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
- ✔ $\dfrac{a^p}{a^p} = 1$
- ✔ $(a^p)^q = a^{pq}$
- ✔ $(ab)^p = a^p b^p$
- ✔ $a^p + a^q$ kan niet korter

# 4. vergelijkingen en ongelijkheden

### Kwadratische vergelijkingen

Als je **niet** de abc-formule wilt gebruiken dan kan je:

- ✔ direct oplossen (indien mogelijk)
- ✔ ontbinden in factoren
  - ✔ $x$ buiten haakjes halen
  - ✔ product-som-methode
- ✔ kwadraatafsplitsen

**Voorbeelden**

Los op **zonder** abc-formule:

a. $x^2 - 12 = 0$
b. $x^2 - 12x = 0$
c. $x^2 - 12x + 32 = 0$
d. $x^2 - 12x - 12 = 0$
e. $(5 - 6x)(3x + 1) = 6$
f. $(x + 2)^2 = (x - 3)^2$

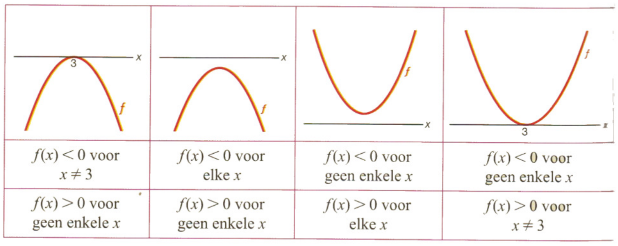
Zie **opgeloste vergelijkingen** voor de uitwerkingen...

### Bijzonder situatie bij kwadratische ongelijkheden

Van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is de discriminant gelijk aan:

$D = b^2 - 4ac$

Hieronder zie je enkele bijzondere situaties die kunnen optreden bij kwadratsche ongelijkheden.




### Ongelijkheden

Ongelijkheden van de vorm $x^2 < c$ en $x^2 > c$ kun je 'direct' oplossen. Een ongelijkheid als $x^2 > 10$ heeft als oplossing $x < -\sqrt{10} \vee x > \sqrt{10}$.

Denk aan de grafiek en je schrijft het antwoord zo op.

**Voorbeeld**

Los op:

a. $x^2 > 3$
b. $3x^2 < 6$
c. $2x^2 - 8 > 0$

### Opgeloste ongelijkheden

a.
$x^2 > 3$
$x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$

b.
$3x^2 < 6$
$x^2 < 2$
$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

c.
$2x^2 - 8 > 0$
$2x^2 > 8$
$x^2 > 4$
$x < -2 \vee x > 2$

**Wortels herleiden bij exact oplossen**

Sommige wortels kan je herleiden. Zo is $\sqrt{24}$ gelijk aan $2\sqrt{6}$ en $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Soms zijn er meer mogelijkheden maar dan neem je altijd een zo groot mogelijke factor:

- ✔ $\sqrt{32}=2\sqrt{8}$
- ✔ $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

**Afspraak bij exact oplossen**

1. wortels als $\sqrt{10}$ of $\sqrt{7}$ laat je staan, maar $\sqrt{9}=3$ en $\sqrt{64}=8$.
2. Een wortel als $\sqrt{18}$ herleid je tot $3\sqrt{2}$

**In de praktijk**

Om wortels te vereenvoudigen moet je het getal onder het wortelteken delen door een zo groot mogelijk kwadraat. Het is derhalve wel handig om een aantal kwadraten uit je hoofd te kennen:

$4, 9, 16, 35, 46, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, \ldots$

**Waarom?**

Het is **gebruikelijk** om bij wortels geen breuken onder het wortelteken te laten staan en ook geen wortels in de noemer te laten staan. Net als bij alle 'gewoonten' zou je natuurlijk af kunnen vragen waar dat dan wel voor nodig is? Wat is daar nu het nut van?

- ✔ **waarom zou je wortels vereenvoudigen en herleiden?**

Je kunt hoog springen. Je kunt laag springen. Je kunt ook niet springen. Alles kan altijd beter maar dat gaat nooit vanzelf.

**http://www.wiswijzer.nl**