PROBLEEM AANPAK

HAVO 4 WISKUNDE B

Willem van Ravenstein

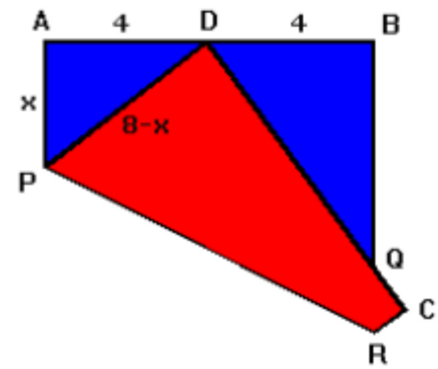
---

uitwerkingen

zondag 9 februari 2020

Willem

vouwblaadje



Als je D in het midden van AB legt dan liggen AD, AP en PD vast. Ik krijg ook driehoek BDQ. Dat is een zelfde soort driehoek als die van APS.

Je weet AD=4 en het zou goed zijn te weten wat AP is. Je hebt te maken met een rechthoekige driehoek, dus je weet dat de stelling van Pythagoras geldt. Maar kan je daar dan iets mee? Wel als je x=AP neemt dan kan je PD uitdrukken in x. En dan geldt:

$$x^2+4^2=(8-x)^2$$
$$x^2+16=64-16x+x^2$$
$$16x=48$$
$$x=3$$

AD=4, AP=3 en PD=5. Dat is bijzonder: het is een 3-4-5-driehoek.

De driehoeken APD en BDQ zijn **gelijkvormig**. Waarom is dat? Omdat de overeenkomstige hoeken gelijk zijn. Je moet dat nog wel even aantonen, maar dat moet je zelf doen. Je kunt nu een verhoudingstabel opstellen. De rest volgt dan (redelijk) vanzelf:

Er geldt: $\Delta PDA \sim \Delta DQB$ Ga na!

ΔPDA	PD = 5	DA = 4	PA = 3
ΔDQB	DQ = ...	QB = ...	DB = 4

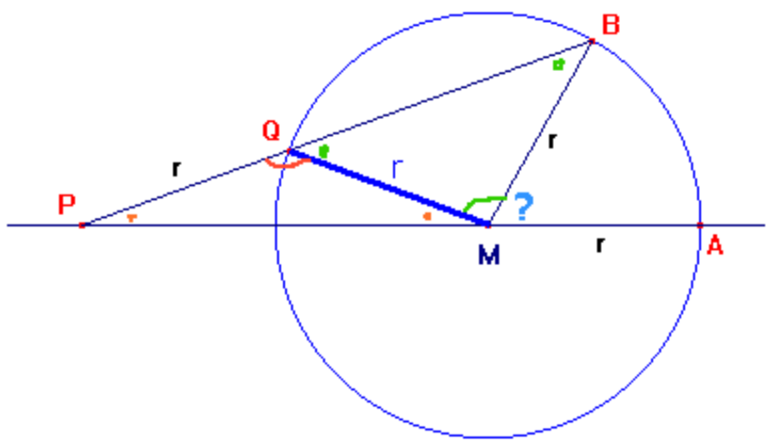
Met kruislings vermenigvuldigen: $DQ=6\frac{2}{3}$ en $QB=5\frac{1}{3}$. Probleem opgelost!

Algemeen

- ✔ Als je te maken hebt met een rechthoekige driehoek dan weet je dat de **stelling van Pythagoras** geldt. Daarmee kan je (ook met variabelen) relaties leggen tussen rechtshoekszijden en de schuine zijde.
- ✔ Als je een lengte van een lijnstuk niet kent, maar dat wel graag zou willen weten, probeer dan 's voor de lengte x te nemen en dan een andere zijde uit te drukken in x. Voer één of meer **variabelen** in.
- ✔ Als je 'ergens' twee driehoeken ziet van dezelfde vorm probeer dan eens iets te doen met **gelijkvormigheid**.

driedeling van de hoek

In de tekening is een aantal keren de straal aangegeven. Maar je kunt ook nog MQ tekenen:



Je kunt nu met kleurtjes (bijvoorbeeld) aangeven welke hoeken gelijk zijn. Je krijgt dan bovenstaande tekening. Stel je nu 's voor dat de hoek bij P gelijk zou zijn aan 20^o. Je zou dan $\angle AMB$ uit moeten kunnen rekenen. Toch? Probeer dat maar 's. Als je 't goed doet dan krijg je $\angle AMB = 60^o$. Als je dat met 20^o kan dan kan je dat ook met α:

Kies α voor $\angle MPQ$. Er geldt:

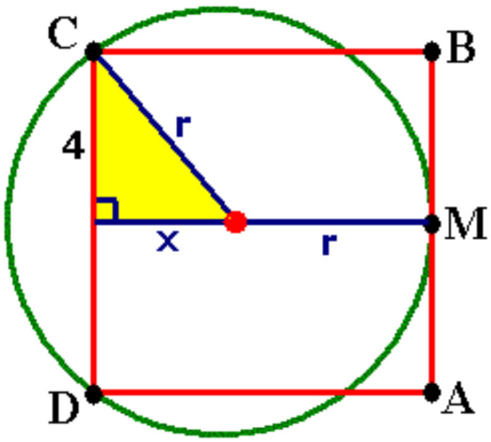
- ✔ $\angle PMQ = \alpha$
  in een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk
- ✔ $\angle MQP = 180° - 2\alpha$
  de som van de hoeken in een driehoek is $180°$
- ✔ $\angle MQB = 2\alpha$
  gestrekte hoek
- ✔ $\angle MBQ = 2\alpha$
  gelijkbenige driehoek
- ✔ $\angle QMB = 180° - 4\alpha$
  som van de hoeken
- ✔ $\angle AMB = 180° - \alpha - (180° - 4\alpha) = 3\alpha$

Algemeen

- ✔ Als je te maken hebt met cirkels is het altijd handig om even goed te kijken of je iets moet doen met het **middelpunt van de cirkel**. Je moet ook altijd even kijken naar **de straal**. Waar kan je die allemaal terug vinden?
- ✔ Let op bijzonder figuren zoals bijzondere driehoeken, cirkels en vierhoeken. Wat weet je allemaal van zo'n figuur? Denk aan gelijkdige driehoeken of gelijkbenige driehoeken.
- ✔ Als je een algemeen geval niet direct op kan lossen probeer het dan ' s met een concreet voorbeeld. Ik had even 20^o genomen om te kijken of het dan wel lukt. Dat lukt. Maar als je iets kunt uitrekenen met **getallen** dan kan dat ook met **een variabele**. Maak dezelfde stappen en dan lukt dat...:-)

een vierkant en een cirkel

Het is hier handig om het middelpunt van de cirkel te tekenen en aan te geven welke lijnstukken je nodig hebt. Gebruik waar mogelijk de straal van de cirkel. Je krijgt:



Er geldt:

$$x + r = 8$$
$$r^2 = x^2 + 16$$

Oplossen geeft:

$$r^2 = (r - 8)^2 + 16$$
$$r^2 = r^2 - 16r + 64 + 16$$
$$16r = 80$$
$$r = 5$$

het vliegtuig

Het antwoord is in ieder geval niet 700 km/uur. Je kunt voor de gemiddelde snelheid niet het gemiddelde van de snelheden nemen. De tijd die het vliegtuig op de terugweg nodig heeft is niet gelijk aan de tijd voor de heen weg. Die 700 km/uur gaat het niet worden...:-)

Maar wat dan wel?

Als je zou weten dat de afstand Amsterdam en Moskou gelijk zou zijn aan 2400 km dan zou je de gemiddelde snelheid zo uit kunnen rekenen:

$$t_{heenweg} = \frac{2400}{800} = 3uur$$
$$t_{terugweg} = \frac{2400}{600} = 4uur$$
$$v_{gemiddeld} = \frac{4800}{7} \approx 685,7\ km/uur$$

De vraag is nu... geldt dit nu alleen voor 2400 km of maakt dat eigenlijk helemaal niet uit? Als het antwoord is 'dat maakt niet uit' dan zijn we klaar:

- ✔ **De gemiddelde snelheid is ongeveer gelijk aan 685,7 km/uur.**

Als je 't niet gelooft dan kan je dezelfde berekening maken voor de afstand A. Je krijgt dan:

$$t_{heenweg} = \frac{A}{800}$$
$$t_{terugweg} = \frac{A}{600}$$
$$v_{gemiddeld} = \frac{2A}{\frac{A}{800}+\frac{A}{600}}$$
$$v_{gemiddeld} = \frac{2}{\frac{1}{800}+\frac{1}{600}}$$
$$v_{gemiddeld} = 685,7\ km/uur$$

---

interval training

Hoe pak je dat aan?

- ✔ 6 kilometer intervaltraning is 5 keer hardlopen (5 km) en 5 keer wandelen (1 km).
- ✔ In totaal duurt dan 37 minuten.
- ✔ De wandelsnelheid is 5 km per uur, dus 1 km wandelen duurt 12 minuten.
- ✔ 5 km hardlopen in 25 minuten is $\frac{1}{5}$ km/minuut.
- ✔ De gemiddelde snelheid bij 't hardlopen is 60 · $\frac{1}{5}$ =12 km/uur.

Wiskundige aanpak

De hardloopsnelheid is v en de wandelsnelheid is 5. Reken dan uit hoeveel uur hij er over doet.

Er geldt:

$$\frac{5}{v} + \frac{1}{5} = \frac{37}{60} \Rightarrow v = 12$$

---

drie dochters

Bij sommige problemen ziet er niet veel anders op dan om alle mogelijkheden te bekijken en dan hopen dat je er iets mee kan. In de tekst staat:

- ✔ ik heb 3 dochters en het product van hun leeftijden is 36...

Met welke leeftijden zou dat kunnen?

1 · 1 · 36 = 36
1 · 2 · 18 = 36
1 · 3 · 12 = 36
1 · 4 · 9 = 36
1 · 6 · 6 = 36
2 · 2 · 9 = 36
2 · 3 · 6 = 36
3 · 3 · 4 = 36

...en dat zijn ze dan... maar dan weet je nog niks.

In de tekst staat:

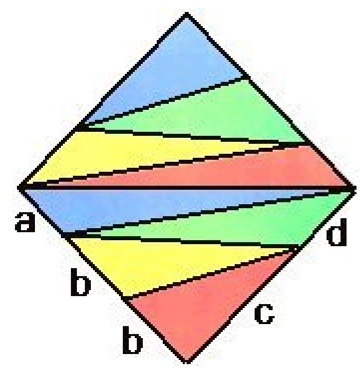
- ✔ het huisnummer aan de overkant is de som van hun leeftijden

1 + 1 + 36 = 38
1 + 2 + 18 = 21
1 + 3 + 12 = 16
1 + 4 + 9 = 14
1 + 6 + 6 = 13
2 + 2 + 9 = 13
2 + 3 + 6 = 11
3 + 3 + 4 = 10

Je moet je voorstellen dat meneer B het huisnummer aan de overkant weet. Als dat bijvoorbeeld 38 zou zijn dan zou meneer B wel weten wat de leeftijden zijn. Bij 21 ook wel... maar hij weet 't nog steeds niet... maar dat weet ik het wel. De som van de leeftijden is 13.

Met de laatste hint kan je besluiten dat 1-6-6 niet kan, dus de dochters zijn 2, 2 en 9 jaar oud.

Max Bill



De oppervlakte van het vierkant is 64. De 8 driehoeken hebben allemaal dezelfde oppervlakte. De oppervlakte van één driehoek is 8.

Kijk naar de driehoek waar a bij staat. De lengte van a ken ik niet maar ik weet wel de **hoogte** en de **oppervlakte**. Daarmee kan je a berekenen:

$Oppervlakte = \frac{1}{2} \cdot zijde \cdot hoogte$

$8 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 8$ dus $a = 2$.
Nu ken je b ook. $b = 3$

In de driehoek waar b en c staat:

$8 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot c$ dus $c = 5\frac{1}{3}$.
$d = 2\frac{2}{3}$.

algemene tips

- ✔ Denk bij cirkels altijd aan het middelpunt en de straal
- ✔ Als je niet uit een algemene oplossing komt probeer dan een concreet geval
- ✔ Soms moet je gewoon alle mogelijkheden bekijken en als dat er niet heel veel zijn dan komt je er uiteindelijk toch uit.
- ✔ Denk bij figuren (driehoeken en vierhoeken) aan alle eigenschappen en formules die je kent. Gaat het over oppervlakte? Hoe bereken je de oppervlakte van driehoeken? Of van vierhoeken?

twee metselaars

Neem 's aan dat de ene metselaar er 40 uur over zou doen om een toren te bouwen, dan zou de tweede metselaar er 49 uur over doen. Dan zou moeten gelden dat:

$$20\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{49}\right)=1$$

Het zijn, als het ware, de snelheden waarmee de metselaars torens bouwen. Maar die 40 en 49 kloppen niet, maar als je 't met 40 en 49 kan dan kan je 't ook met x en $x+9$.

Als de eerste metselaar x uur over het bouwen van een toren doet dan doet de tweede metselaar daar $x+9$ uur over.

De eerste metselaar bouwt $\frac{1}{x}$ torens per uur en de tweede metselaar bouwt $\frac{1}{x+9}$ torens per uur.

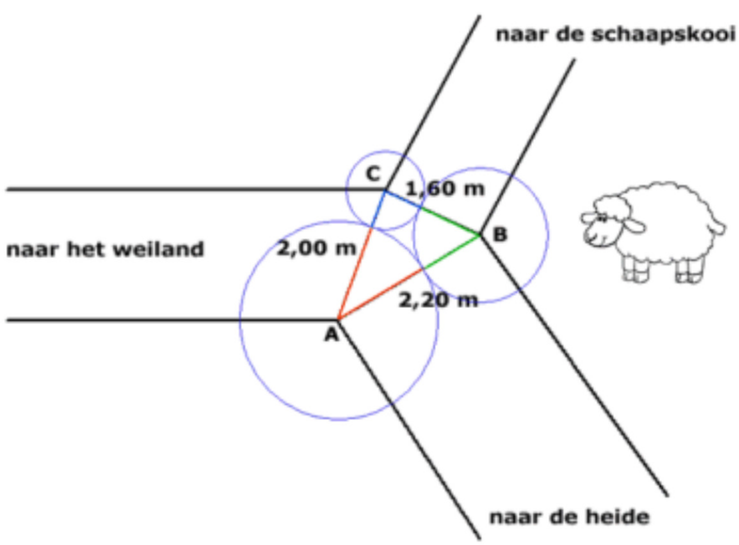
Er geldt:

$$20\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}\right)=1$$

Oplossen geeft: $x=36$

De ene metselaar doet er 36 uur over en de andere metselaar doet er 45 uur over.

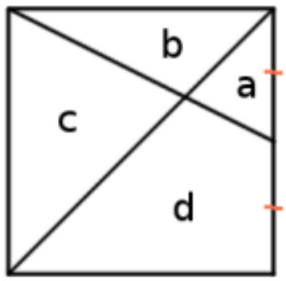
het hekkenprobleem



Neem voor het hek bij A de lengte x.

- ✔ Dan is het hek bij B gelijk aan $2,20-x$.
- ✔ Het hek bij C is dan $1,60-(2,20-x)=x-0,60$.
- ✔ Nu moet $x-0,60$ en x wel samen $2,00$ zijn, dus $2x-0,60=2,00$.
- ✔ Oplossen...
- ✔ $x=1,30$
- ✔ Het hek bij A moet $1,30$ m zijn, het hek bij B is $0,90$ m en het hek bij C is $0,70$ m.

een vierkant in vier stukken



De driehoek met oppervlakte c is twee keer zo groot als driehoek met oppervlakte a. Er geldt: c=4a. Met nog een paar gegevens geeft dit:

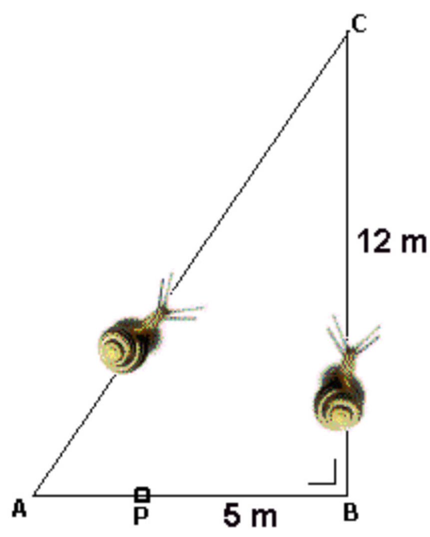
$$\begin{cases} c = 4a \\ a + b = \frac{1}{4} \\ b + c = \frac{1}{2} \\ a + d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Oplossen geeft:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{12} \\ b = \frac{1}{6} \\ c = \frac{1}{3} \\ d = \frac{5}{12} \end{cases}$$

twee slakken

Je wilt de lengte van AP weten. Het is niet zo'n gek idee om voor die afstand x te nemen. Je moet dan zorgen dat AP+AC even lang wordt als PB+BC. 't Is een rechthoekige driehoek, dus de stelling van Pythagoras ligt voor de hand...:-)



Neem $AP = x$. Dan is $AC = 17 - x$.

Stelling van Pythagoras:

$$(x+5)^2 + 12^2 = (17-x)^2$$

Oplossen geeft:

$$\begin{aligned} &(x+5)^2 + 12^2 = (17-x)^2 \\ &x^2 + 10x + 25 + 144 = 289 - 34x + x^2 \\ &44x = 120 \\ &x = 2\tfrac{8}{11} \end{aligned}$$

hoeveel vierkanten?

- Er is 1 vierkant van 10x10
- Er zijn 4 vierkanten van 9x9
- Er zijn 9 vierkanten van 8x8
- Er zijn 16 vierkanten van 7x7
- ...
- Er zijn 100 vierkanten van 1x1

Dus 1+4+9+16+...+100=**385**

kubusjes

Probeer eerst 's $n = 4$. Het is dan vooral een kwestie van tellen:

- Er zijn 8 kubusjes met 3 rode vlakken. Dat zijn de hoekpunten.
- Er zijn 24 kubusjes met 2 rode vlakken. Dat zijn de ribben.
- Er zijn 8 witte kubusjes. Dat zijn alle kubussen aan de 'binnenkant'.
- Er zijn 24 kubusjes met 1 rood vlak. Dat zijn de zijvlakken.
- Samen zijn dat 64 kubusjes.

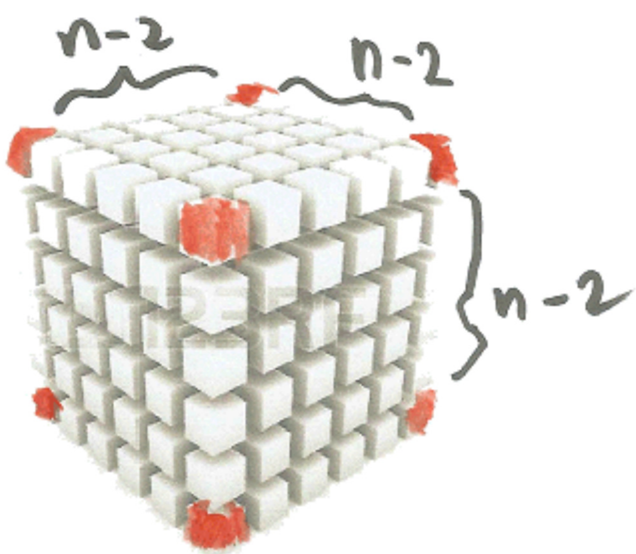
Maar als je dat met een 'concreet getal' kunt kan je dat dan ook met n?

Bij een kubus met n^3:

- Er zijn 8 kubusjes met 3 rode vlakken.
- Er zijn $12·(n-2)$ kubusjes met 2 rode vlakken.
- Er zijn $(n-2)^3$ witte kubusjes.
- Er zijn $6·(n-2)^2$ kubusjes met 1 rood vlak.
- Samen zijn dat n^3 kubusjes.

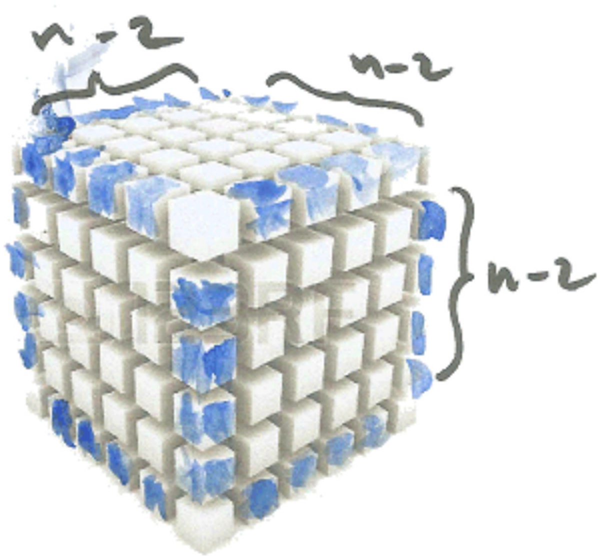
Kubusjes met 3 rode vlakjes

Deze kubusjes zitten op de hoekpunten. Een kubus heeft 8 hoekpunten. Er zijn dus 8 kubusjes met 3 rode vlakjes.



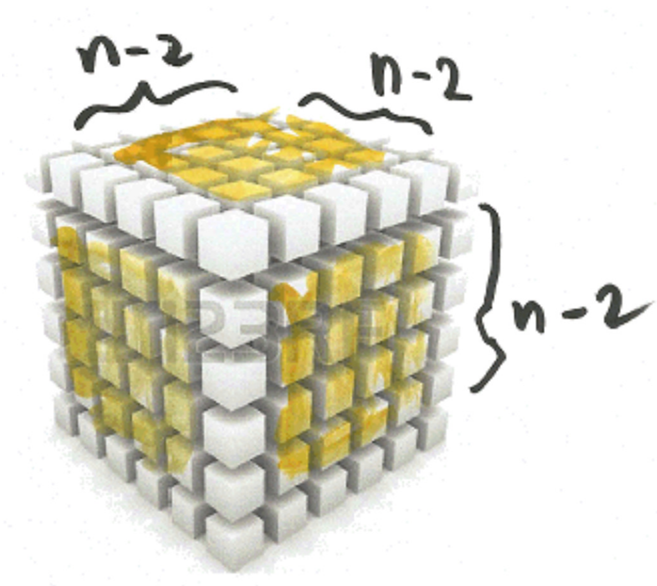
Kubusjes met 2 rode vlakjes

Deze kubusjes zitten op de ribben. Bij een ribbe van n kan je n-2 kubusjes vinden met twee rode vlakjes. Je hebt 12 ribben dus er zijn 12(n-2) kubusjes met twee rode vlakjes.



Kubusjes met 1 rood vlakje

Deze kubusjes zitten op de grensvlakken. Elk zijvlak bestaan uit $(n-2)^2$ kubusjes met 1 rood vlakje. Er zijn 6 grensvlakken. Je hebt $6(n-2)^2$ kubusjes met 1 rood vlakjes.



Kubusjes zonder rode vlakjes

De kubusjes die niet aan de buitenkant zitten hebben geen rode vlakjes.
Dat zijn er $(n-2)^3$

Controle

Als het goed is moet $8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3$ gelijk zijn aan n^3. Dat klopt...

de kapitein en zijn schip

Er zijn twee tijdstippen 'toen' en 'nu'. Neem de leeftijd van de kapitein 'toen' gelijk aan 'k' en de leeftijd van het schip 'toen' gelijk aan 's':

	toen	nu
Kapitein	k	2s
Schip	s	k

Er geldt dan:

2s + k = 56
k - s = 2s - k

Oplossen geeft k=24 en s=16. De kapitein is nu 32 jaar oud.

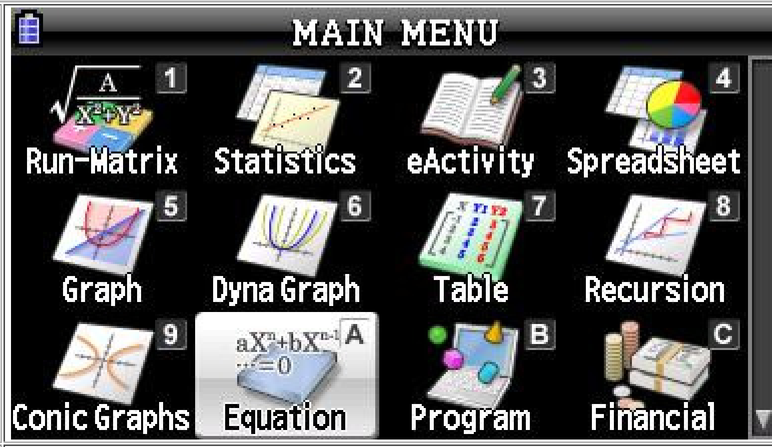
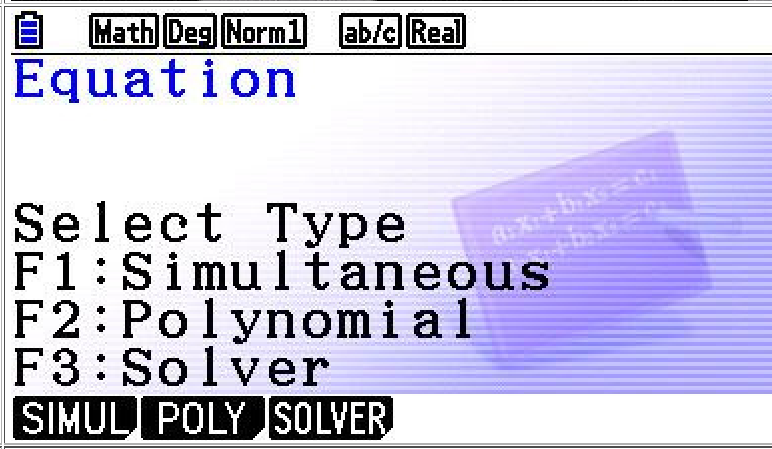
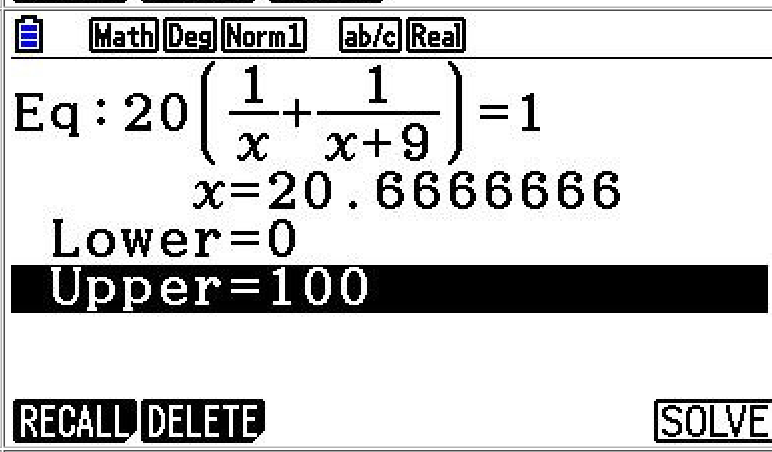
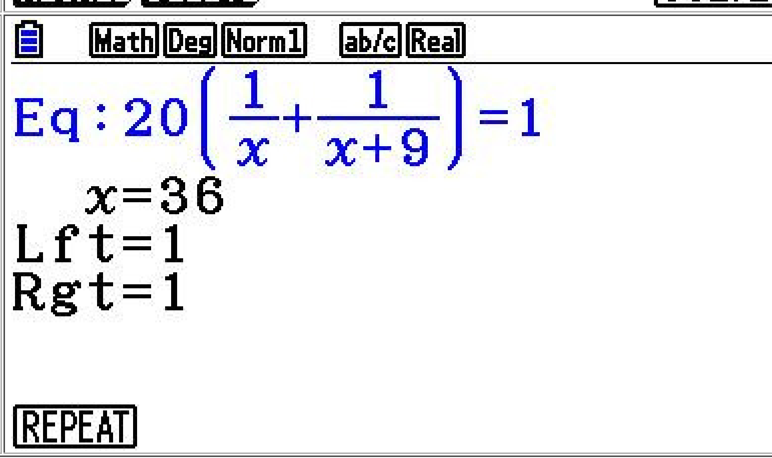
een slak in de put

- Op de eerste dag bereikt de slak een hoogte van vijf meter, en hij glijdt 's nachts weer 4 meter naar beneden. Dus eindigt hij op een hoogte van 1 meter.
- De tweede dag bereikt hij de 6 meter, maar hij glijdt terug naar de 2 meter.
- De derde dag bereikt hij de 7 meter, maar glijdt terug naar de 3 meter.
- ...
- De vijftiende dag bereikt hij de 19 meter, maar glijdt terug naar de 15 meter.
- De zestiende dag bereikt hij de 20 meter, dus nu is hij aan de rand van de put gekomen!

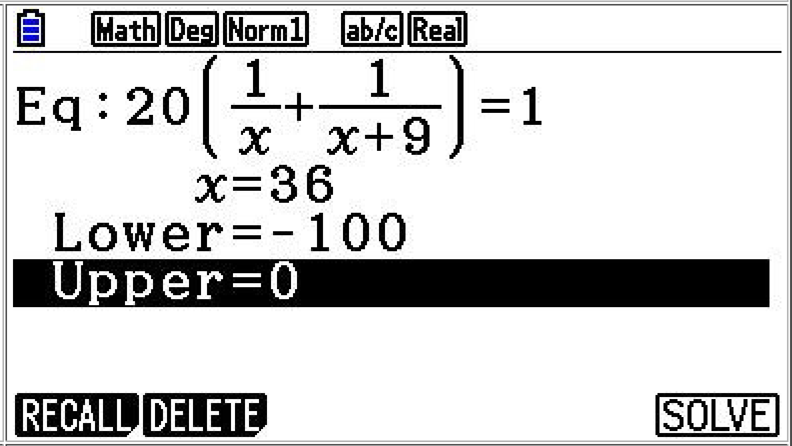
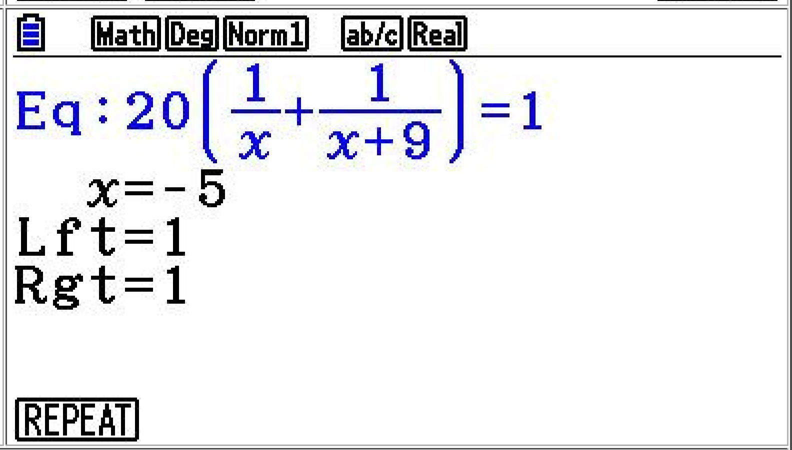
Conclusie: De slak bereikt de bovenrand van de put op **de zestiende dag**....

Algemeen

- Als je te maken hebt met een rechthoekige driehoek dan weet je dat de **stelling van Pythagoras** geldt. Daarmee kan je (ook met variabelen) relaties leggen tussen rechtshoekszijden en de schuine zijde.
- Als je een lengte van een lijnstuk niet kent, maar dat wel graag zou willen weten, probeer dan 's voor de lengte x te nemen en dan een andere zijde uit te drukken in x. Voer één of meer **variabelen** in.
- Als je 'ergens' twee driehoeken ziet van dezelfde vorm probeer dan eens iets te doen met **gelijkvormigheid**.

<table>
<tr><td colspan="2">Neem aan dat je de vergelijking $20(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+9}) = 1$ wilt oplossen.</td></tr>
<tr><td>Kies uit het hoofdmenu voor Equation.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ga naar F3:Solver.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Vul de vergelijking in en kies voor Lower=0 en Upper=100. Dit is het domein waarin de GR de oplossing moet gaan zoeken. De waarde voor x die je GR geeft slaat nergens op:-)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Kies voor SOLVE en je GR geeft de oplossing.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">De oplossing van de vergelijking is $x = 36$</td></tr>
</table>

Er is nog een oplossing...

Er is nog een oplossing van de vergelijking.	
Kies nu voor **Lower=-100** en **Upper=0** en klik op **SOLVE**.	
Je GR geeft dan de oplossing $x = -5$. Dat klopt wel... $x = -5$ is ook een oplossing van de vergelijking.	
Het hangt nu van de context af of die oplossing betekenis heeft. Daar moet je dan maar 's over nadenken:-)	