

# PROBLEEM AANPAK



**HAVO 4 WISKUNDE B**

Willem van Ravenstein

---

- ✓ Lees de **inleiding**
  - ✓ Bestudeer de **probleemaanpak ABC**
  - ✓ Los de **wiskundig problemen** op
  - ✓ Maak de **eindtoets**
- 



## Uit het examenprogramma

---

Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden

"De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechnieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context."

---

*Willem*

---

## inhoud

---

- ✓ werkboek
  - ✓ proeftoets met antwoorden
- 

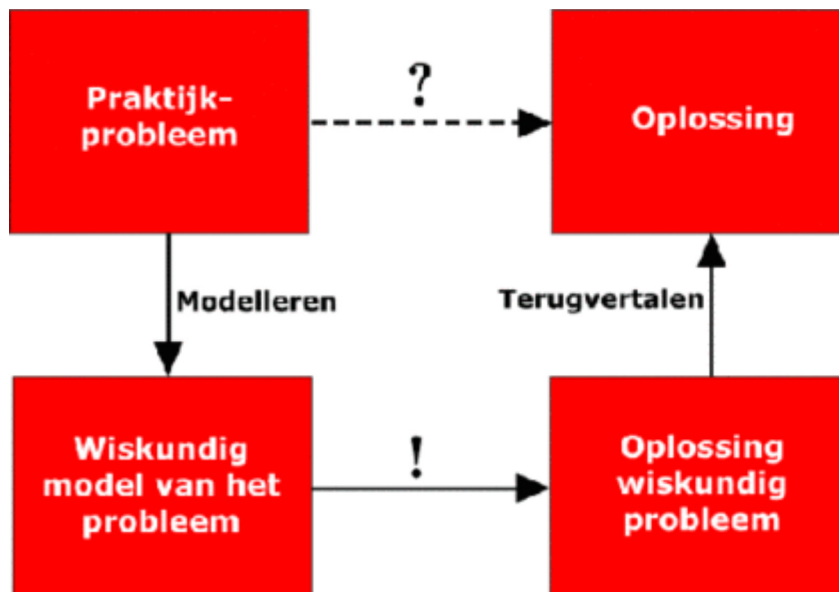
zondag 9 februari 2020

## 0. Inleiding

Misschien heb je wel 's afgevraagd waar je die wiskunde die je leert op school nu eigenlijk precies voor nodig hebt. Misschien denk je dat wiskundigen de hele dag vergelijkingen zitten op te lossen, haakjes aan het wegwerken zijn, liggen te ontbinden in factoren of aan 't dromen over priemgetallen. Dat klopt niet...

Er zijn ook mensen die denken dat wiskunde vooral bestaat uit formules en vergelijkingen. Dat is wel iets waar wiskundige heel goed in zijn, maar dat is niet het doel. Wiskundigen houden zich bezig met het oplossen van allerlei problemen, wiskundigen proberen die problemen op te lossen. Meestal doen ze dat met de wiskundige middelen die ze hebben en soms verzinnen ze zelf nieuwe wiskunde.

### Van probleem naar oplossing



figuur 1

In deze praktische opdracht ga je leren hoe je wiskundige problemen aan zou kunnen pakken. Dat kan je leren. Je doet dit aan de hand van 15 voorbeelden. De kunst is steeds om de 'algemene principes' te ontdekken zodat je zelf steeds beter wordt in het oplossen van wiskundige problemen.

Je kunt op de volgende pagina een voorbeeld over de gebroken vlaggenmast vinden. Uiteindelijk is de oplossing niet heel moeilijk, maar je moet wel bedenken dat je de stelling van Pythagoras nodig hebt. Maar hoe kom je daar achter?

Voor de rest vind je in dit boekje de 15 wiskundige problemen. Het idee is dat je die probeert op te lossen. De PO wordt afgesloten met een toets. Dat is dan meteen de beoordeling. Je doet de opdrachten en toets in tweetallen. Achter in het boekje kan je een proeftoets met antwoorden vinden.

Willems

# 1. Het voorbeeld van de vlaggenmast

Zodra je niet meer een zuiver wiskundig probleem krijgt voorgeschoteld moet je een model maken, de werkelijkheid vereenvoudigen. Een leuk probleem in dit opzicht is dat van de gebroken mast.

---

**Een vlaggenmast is stevig in de grond bevestigd. Hij is 10 meter hoog en door een harde rukwind afgebroken. Het afgebroken stuk zit nog wel vast aan het stuk dat in de grond zit. De top van de mast is op 3 meter van de voet op de grond terecht gekomen. Op welke hoogte (vanaf de grond) is de mast afgebroken?**

---

## ANALYSE

Het eerste wat je natuurlijk doet is een tekening maken. In feite maak je dan meteen een model van de situatie: je neemt aan dat de mast gewoon een lijnstuk is en dat door het afbreken een zuiver rechthoekige driehoek is ontstaan. Die rechte hoek komt van de veronderstelling dat de mast netjes loodrecht op de grond is gezet.

Vervolgens zet je de gegevens neer. Ook geef je aan wat er moet worden berekend, bijvoorbeeld met een vraagteken.

## AANPAK

Nu moet je een manier bedenken om het probleem op te lossen. Omdat het over een rechthoekige driehoek gaat, zoek je naar eigenschappen van rechthoekige driehoeken. Daarbij kom je de stelling van Pythagoras wel tegen. Maar... er lijken zo op het oog twee zijden onbekend te zijn! Gelukkig weet je hoe lang die twee zijden samen zijn, ze vormen immers de gehele mast samen. Nu kun je even wat gaan proberen. Of maar meteen een variabele invoeren.

## BEWERKEN

Noem de lengte AB die je moet berekenen 'x'. De schuine zijde PB is dan gelijk aan '10-x'. Met de stelling van Pythagoras:

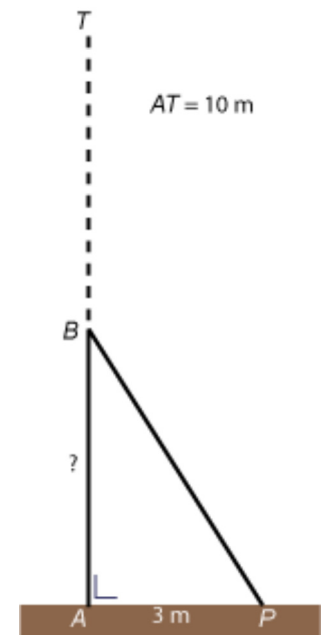
$$3^2 + x^2 = (10 - x)^2$$

Bereken hieruit mogelijke waarden van 'x'.

## CONTROLE

Ga na dat de oplossing  $x=4,55$  klopt..

**bron**



## 2. Probleemaanpak ABC

Bij het oplossen van een probleem, werkt een systematische probleemaanpak als hulpmiddel. Het ABC-systeem is zo'n systematische probleemaanpak.

### ANALYSE

Probeer het probleem goed te begrijpen. Onderstreep belangrijke stukken in de probleemstelling; stel jezelf vragen als:

- ✓ Wat wordt er gevraagd; kan ik dat in eigen woorden zeggen?
- ✓ Welke grootheden (variabelen) spelen een rol?
- ✓ Heb ik alle gegevens goed op een rijtje, b.v. in een tekening of schema?
- ✓ Heb ik het gevraagde goed in de tekening of het schema aangegeven?
- ✓ Aan welke voorwaarden moet het gevraagde voldoen?
- ✓ Kan ik van tevoren het antwoord schatten, kloppen de eenheden met elkaar?

# A

### AANPAK

Je gaat d.m.v. zoekgedrag een aanpak bepalen. Stel jezelf vragen als:

- ✓ Welke theorie heb ik nodig voor dit probleem?
- ✓ Is het een bekend probleem, of ken ik een probleem dat erop lijkt?
- ✓ Kan ik het probleem eenvoudiger maken (eenvoudiger getallen bijvoorbeeld)?
- ✓ Kan ik een geschikt model ontwerpen?
- ✓ Kan ik een paar mogelijkheden tekenen of berekenen (gewoon proberen dus)?
- ✓ Heb ik bij het proberen alle gegevens gebruikt, of zijn er nog andere gegevens?
- ✓ Kan ik werken met een letter voor het onbekende (een variabele)?
- ✓ Kan ik nu een oplossingsmethode verzinnen?

### BEWERKEN

Je gaat nu je oplossingsmethode, de door jou gekozen aanpak dus, uitvoeren. Controleer elke stap op juistheid. Werk zo overzichtelijk mogelijk, zodat je naderhand ook nog kunt zien wat je gedaan hebt.

### CONTROLE

Tenslotte ga je na of het probleem volledig is opgelost. Vraag je ook altijd af, of je er iets van hebt geleerd wat je later van pas kan komen. Stel jezelf vragen als:

- ✓ Klopt het resultaat met mijn schatting?
- ✓ Hoe kan ik het resultaat verder nog controleren?
- ✓ Ben ik goed met eventuele afrondingen omgegaan?
- ✓ Heb ik de juiste eenheden gebruikt?
- ✓ Wat kan ik van de oplossing leren?

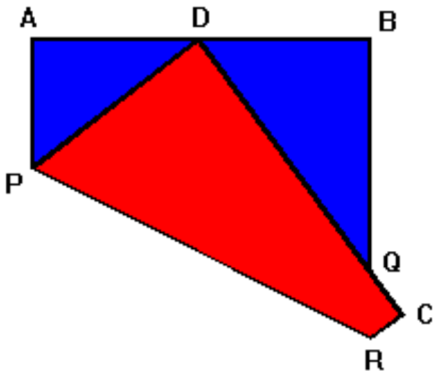
# B

# C

Het wiskundig ABC is een hulpmiddel als de oplossing niet meteen voor de hand ligt. Het is geen dwingend voorschrift en geen garantie voor succes.

- ✓ **Math4All**

### 3. Vouwblaadje

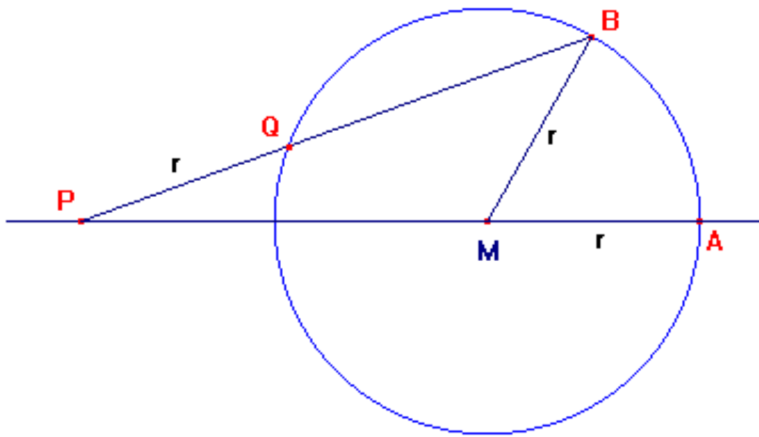


#### Het probleem:

Hier zie je een vierkant blaadje ABCD van 8 bij 8 cm. Eén hoekpunt van het blaadje is op zo'n manier over het blaadje heen gevouwen dat D precies in het midden van AB ligt.

- ✓ Bereken exact de lengte van BQ en DQ.

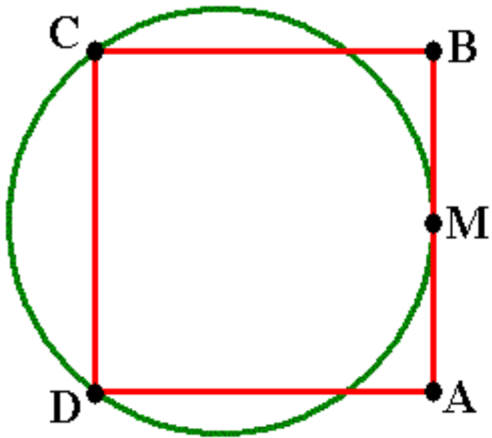
## 4. Driedeling van de hoek



Gegeven is een cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $r$ . Op de cirkel heb je de punten  $A$  en  $B$ . De lijn  $PB$  snijdt de cirkel in het punt  $Q$  en wel zo dat  $PQ=r$ .

- ✓ Toon aan dat  $\angle AMB$  drie keer zo groot is als  $\angle APB$ .

## 5. Een vierkant en een cirkel



Het rode vierkant heeft een zijde van 8. Het punt M is het midden van AB en de groene cirkel gaat door de punten C, D en M.

✓ **Bereken exact de straal van deze cirkel.**

## 6. Het vliegtuig



Een vliegtuig vliegt van Amsterdam naar Moskou met een gemiddelde snelheid van 800 km/uur. Op de terugweg heeft het de wind tegen en haalt het (gemiddeld) niet meer dan 600 km/uur.

✓ **Bereken de gemiddelde snelheid over de gehele tocht**



## 7. Intervaltraining

### Intervaltraining

Afwisselend hardlopen en wandelen volgens dit schema:

activiteit	afstand
hardlopen	1 km
wandelen	200 m
hardlopen	1 km
wandelen	200 m
...	...
<b>enzovoort</b>	

Joost doet een intervaltraining van 6 kilometer. Zijn gemiddelde wandelsnelheid is 5 km per uur.

Hij vertrekt om 11.50 uur en is om 12.27 uur terug.

Na afloop wil hij berekenen wat zijn gemiddelde snelheid was tijdens het hardlopen.

**Hoeveel kilometer per uur loopt hij gemiddeld bij het hardlopen?**

## 8. Drie dochters

Twee mannen lopen op straat. A zegt 'ik weet een leuk raadsel'.

B zegt 'zeg op'.

A zegt 'ik heb 3 dochters en het product van hun leeftijden is 36. Hoe oud zijn ze?'

B zegt 'dan weet ik het nog niet'.

A zegt 'ik geef je nog een hint: het huisnummer aan de overkant is de som van hun leeftijden'.

B zegt 'dan weet ik het nog niet'.

A zegt 'ok, laatste aanwijzing: mijn oudste dochter speelt piano'.

✓ **Hoe oud zijn die dochters?**



## 9. Max Bill



In het kunstwerk van Max Bill, 'Einheit aus flächengleichen Farben' (1972) hierboven zijn de zijden verdeeld in 3 en 2 stukken. De driehoeken hebben allemaal dezelfde oppervlakte.

- ✓ **Neem voor de lengte van de zijde van het vierkant 8 en bereken exact de lengte van de verschillende stukken.**

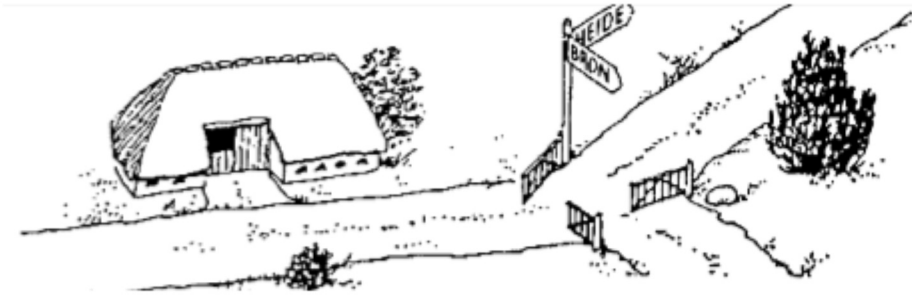
## A. Twee metselaars



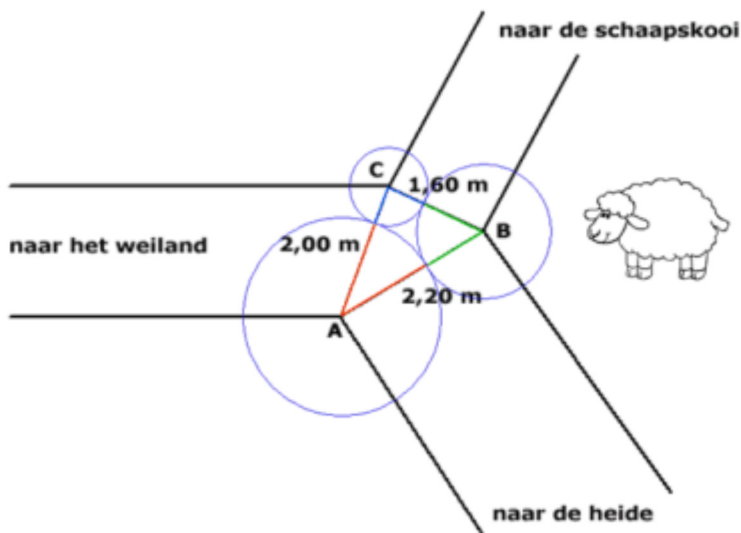
Twee metselaars bouwen samen aan één toren. Ze doen er 20 uur over. Als ze elk apart een toren bouwen doet de ene er 9 uur langer over dan de andere.

✓ **Hoe lang doet elk over het bouwen van 1 toren?**

## B. Het hekkenprobleem



Boer Harmsen houdt schapen. Die schapen heeft hij soms in een weiland, soms op de heide, maar af en toe ook in de schaapskooi. Hij heeft van de éne naar de andere plaats paden gemaakt. Die paden hebben alle drie een verschillende breedte en komen op een bepaalde plaats bij elkaar, zoals je ziet.

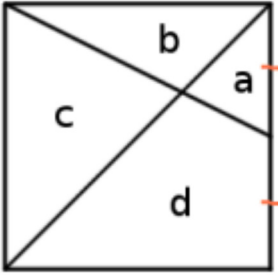


Harmsen heeft bedacht dat het handig is om steeds één van die paden te kunnen afsluiten, dan kunnen zijn schapen gemakkelijk van de éne plaats naar de andere worden gebracht. Hij plaatst daarom na enig nadenken drie hekken op dit kruispunt, één bij A, één bij B en één bij C. Dat doet hij zo, dat hij met twee van die hekken steeds precies één van de wegen kan afsluiten.

Om die hekken te kunnen maken moet hij weten hoe breed elk hek moet worden.

- ✓ **Bereken voor boer Harmsen de breedte van elk van die hekken in cm nauwkeurig.**

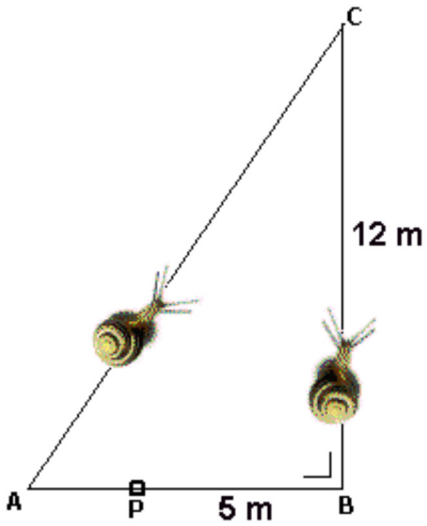
## C. Een vierkant in vier stukken



Een vierkant met een oppervlakte van 1 wordt verdeeld in 4 delen met een oppervlakte van  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$ . In de tekening zie je een diagonaal en een lijn van hoekpunt naar het midden van de tekenoverliggende zijde.

- ✓ Bereken **exact** de oppervlakte  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$ .

## D. Twee slakken

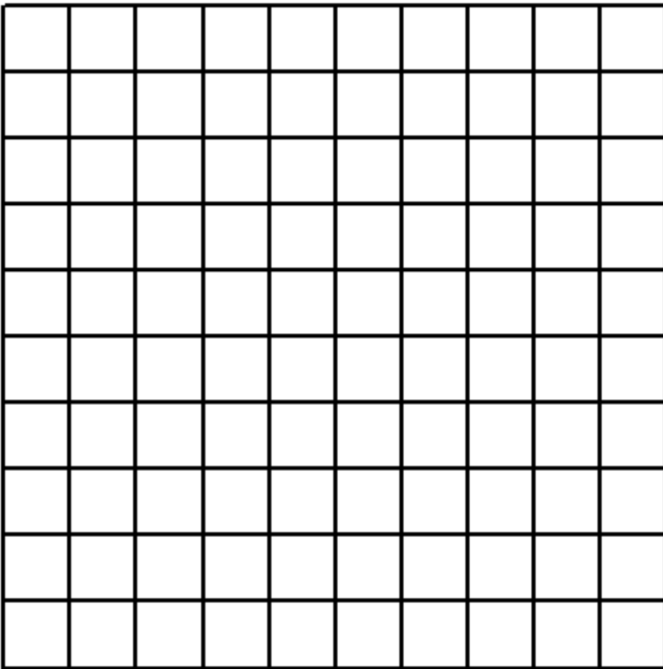


Twee slakken lopen allebei vanaf punt P naar C over de zijden van een rechthoekige driehoek. De ene slak loopt linksom en de andere slak loopt rechtsom. Als de slakken even hard lopen komen ze precies tegelijkertijd in C aan.  $PB=5\text{m}$  en  $BC=12\text{m}$ .

✓ **Bereken exact de lengte van AP**

## E. Hoeveel vierkanten?

Neem een stuk roosterpapier van 10 hokjes bij 10 hokjes.



Met de roosterlijnen kun je vierkanten maken waarvan de hoekpunten precies roosterpunten zijn.

✓ **Hoeveel vierkanten kun je maken bij een rooster van 10 bij 10?**



## F. Kubusjes

Van  $n^3$  witte kubusjes bouw je een grote kubus van  $n$  bij  $n$  bij  $n$ .

De buitenkant van deze grote kubus kleur je rood. De kubus wordt weer afgebroken...

Er zijn nu verschillende kubusjes. Witte kubusjes, kubusjes met 1 rood vlak, kubusjes met 2 rode vlakken en er zijn zelfs kubusjes met 3 rode vlakken.



✓ **Hoeveel kubusjes zijn er van elk soort uitgedrukt in  $n$ ?**

## G. De kapitein en zijn schip



De kapitein van een schip is tweemaal zo oud als het schip was toen de kapitein zo oud was als het schip nu is. Samen zijn ze nu 56 jaar.

✓ **Hoe oud is de kapitein nu?**

## H. Een slak in de put



Een slak bevindt zich op de bodem van een 20 meter diepe put. Elke dag klimt de slak 5 meter omhoog, maar 's nachts glijdt hij weer 4 meter terug naar beneden.

✓ **Hoeveel dagen duurt het voordat de slak de bovenrand van de put heeft bereikt?**

## T. Oefentoets

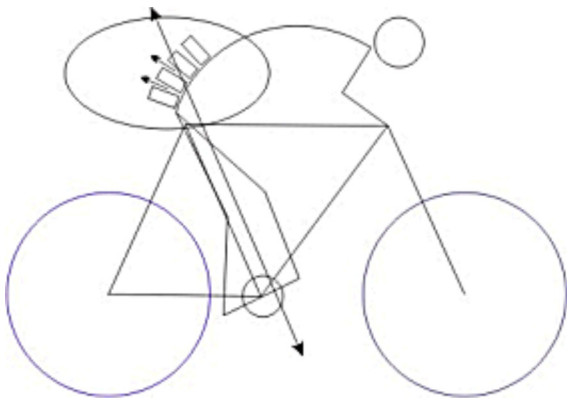
# Oefentoets

Welkom bij de **proeftoets** voor probleemaanpak.

Deze toets bestaat uit 5 vragen. De vragen zijn vooral bedoeld om 'ongeveer' een beeld te hebben wat je kunt verwachten.

Succes!!!

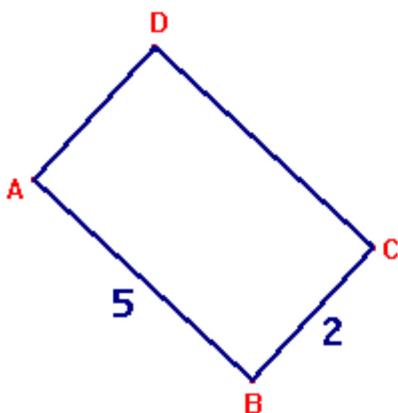
### Opgave 1



Helen fietst 4 km in 9 minuten van huis naar oma. Dat kost haar 9 minuten. Ze rijdt naar huis via een kortere route van 3 km en daar doet ze 6 minuten over.

✓ **Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur voor haar fiettocht (heen en terug).**

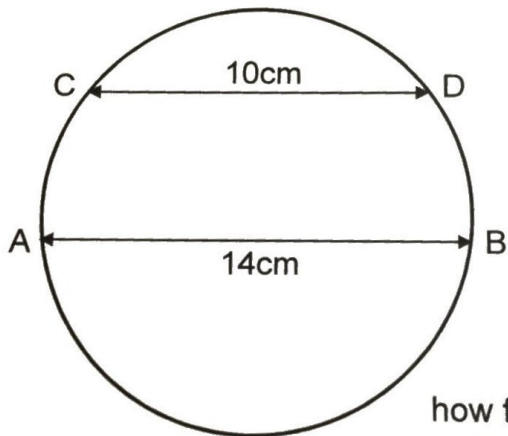
### Opgave 2



Gegeven zijn twee gelijkvormige rechthoeken. De eerste rechthoek is 2 bij 5, de andere rechthoek is 10 bij p: wat is p?

### Opgave 3

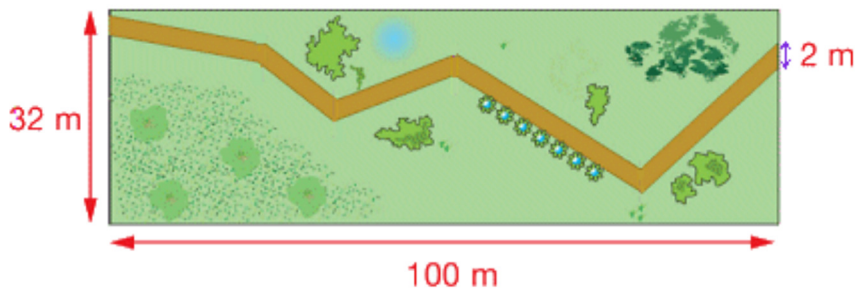
AB and CD are parallel chords, 6cm apart



how far is the line AB  
away from the centre?

### Opgave 4

In een tuin is een zigzagpad aangelegd. De aanleg van het pad kost 80 euro per 10 m<sup>2</sup>.

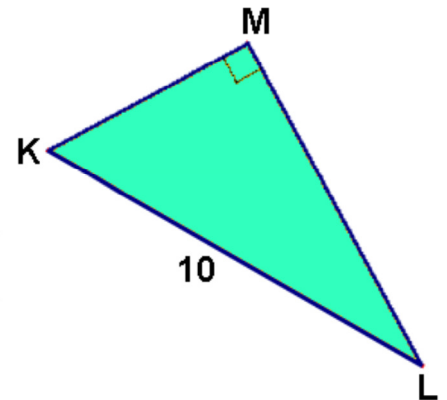


✓ Bereken de aanlegkosten van het pad.

### Opgave 5

Gegeven is een driehoek  $KLM$  met  $\angle M = 90^\circ$ ,  $KL = 10$  en je weet:  $LM$  is 2 langer dan  $KM$ .

✓ Bereken exact de oppervlakte van  $\triangle KLM$



### Bonus

In een hok zitten kippen en konijnen. Samen hebben de dieren 35 koppen en 94 poten.

✓ Hoeveel konijnen en hoeveel kippen zitten er in het hok?

# EINDE

## U. Uitwerkingen van de oefentoets

### Uitwerkingen van de oefentoets

#### Opgave 1

$$\frac{4+3}{\frac{9}{60} + \frac{6}{60}} = 28 \text{ km/uur}$$

#### Opgave 2

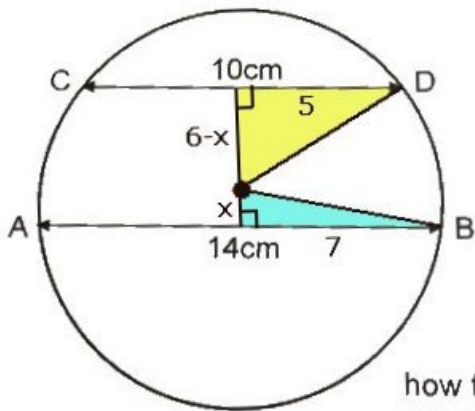
Er zijn twee mogelijkheden:

lengte	5	10	lengte	5	p
breedte	2	p	breedte	2	10

Oplossen geeft  $p=4$  of  $p=25$

#### Opgave 3

AB and CD are parallel chords, 6cm apart



how far is the line AB  
away from the centre?

$$5^2 + (6-x)^2 = x^2 + 7^2$$

$$25 + 36 - 12x + x^2 = x^2 + 49$$

$$12x = 12$$

$$x = 1$$

#### Opgave 4

De oppervlakte van het pad is  $2 \cdot 100 = 200\text{m}^2$ . Het kost 80 euro per  $10\text{m}^2$ , dus  $200\text{m}^2$  kost €1600.

#### Opgave 5

Volgens de stelling van Pythagoras:

$$x^2 + (x + 2)^2 = 10^2$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100$$

$$2x^2 + 4x + 4 = 100$$

$$2x^2 + 4x - 96 = 0$$

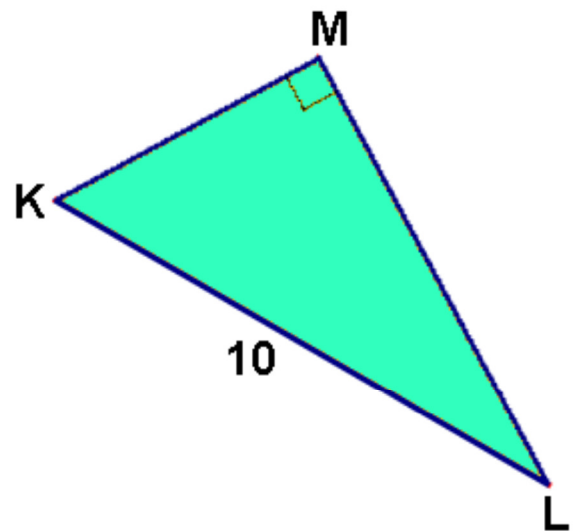
$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$(x + 8)(x - 6) = 0$$

$$x = -8 \vee x = 6$$

De oplossing  $x = -8$  voldoet niet, maar  $x = 6$  zou een oplossing kunnen zijn.  $KM = 6$  en  $LM = 8$ , de oppervlakte van  $\triangle KLM$  is gelijk aan:

$$\frac{1}{2} \cdot KM \cdot LM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$



#### Bonus

Kippen en konijnen hebben in ieder geval allemaal 2 poten. Dus met 35 koppen heb je in ieder geval 70 poten nodig voor 35 dieren. Je hebt dan nog 24 poten over. Hoeveel konijnen kan je dan nog van 2 'extra poten' voorzien? Dat zijn er 12. Dus je hebt 12 konijnen en 23 kippen.

**EINDE**