Taal van de wiskunde 1

Willem van Ravenstein

herzien in tweeduizendtien

Voorwoord

Het doel van het wiskundeonderwijs is het leren beheersen van de taal van de wiskunde en het zinvol leren inzetten van de instrumenten van de wiskunde."

Uit "Standpunt van de Resonansgroep wiskunde ten aanzien van de wiskundevoorstellen havo en vwo voor 2007 en later"
13 november 2007

De leerling leert passende wiskundetaal te gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen en leert de wiskundetaal van anderen te begrijpen.

Taakgroep vernieuwing basisvorming, juni 2004

Inhoudsopgave

VOORWOORD **2**

INHOUDSOPGAVE **2**

HOOFDSTUK 1 – INLEIDING **3**

HOOFDSTUK 2 – GETALLEN EN LETTERS **10**

HOOFDSTUK 3 – VERGELIJKINGEN OPLOSSEN **19**

HOOFDSTUK 4 – KWADRAATAFSPLITSEN EN DE ABC-FORMULE **28**

HOOFDSTUK 5 – WORTELS EN MACHTEN **33**

HOOFDSTUK 6 – LOGARITMEN **39**

HOOFDSTUK 7 – HET OPLOSSEN VAN VERGELIJKINGEN **44**

EINDE **51**

Willem

Laatste wijziging op maandag 10 februari 2020

Hoofdstuk 1 – Inleiding

"Wiskundigen bestuderen bepaalde abstracties — zoals meetkundige figuren en getallen — en daarmee dus de wereld van hun eigen hersenspinsels"

bron: wiskundig denken voor niet-wiskundigen

Voor een wiskundige is een **punt** iets heel anders dan voor een taalwetenschapper of een voetballer. Volgens Van Dale:

punt[1] (de ~ (m.), ~en)
- **1** spits toelopend uiteinde
- **2** plaats op een diamant waar twee rondisten samenkomen
- **3** puntig gesneden part

punt[2] (het ~, ~en)
- **1** plek, plaats
- **2** ogenblik in, klein onderdeel van de tijd
- **3** onderwerp als onderdeel van een reeks
- **4** aantekening waardoor men een bepaalde waardering noteert ⇒ *cijfer*
- **5** aanduiding van een waarde, eenheid waarnaar het winnen of verliezen berekend wordt

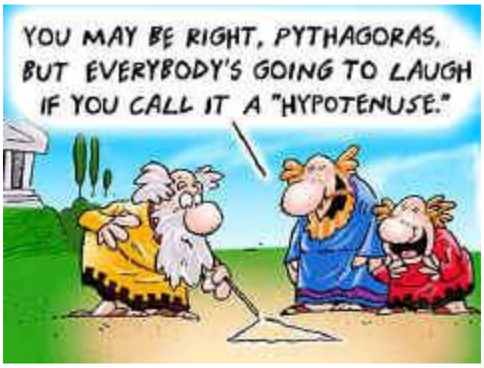
punt[3] (de ~, ~en)
- **1** stip, spikkel
- **2** leesteken in de vorm van een stip ter afsluiting van een zin
- **3** stip achter een muzieknoot om aan te geven dat deze anderhalf keer zo lang duurt

Opdracht 1

- Waar staat hierboven nu de 'wiskundige betekenis' van een punt?

Hypotenusa

Vroeger noemde ‘we’ de schuine zijde van een rechthoekige driehoek **hypotenusa**. Dat doet bijna niemand meer. Dat is wel jammer, want **schuine zijde** lijkt wel een begrijpelijker uitdrukking (de betekenis is hetzelfde), maar voor leerlingen kan dat (in het begin) best verwarrend zijn, want de schuine zijde kan 'ook best niet schuin lopen'.



Andere woorden van wiskundige begrippen kunnen net zo verwarrend zijn. Zo hebben 'ruiten' zelden de vorm van een 'ruit' (behalve vierkante ruiten dan) en hebben 'verhoudingen' weinig te maken met ‘gelijkvormigheid’.

Opdracht 2

- Noem zelf drie ‘woorden uit de wiskunde’ die een andere betekenis hebben dan in ‘normaal spraakgebruik’.

Afspraken en definities

Het is een goede gewoonte om vooraf 'af te spreken' wat je in wiskundige zin verstaat onder bijvoorbeeld 'een ruit', 'de afgeleide' of 'berekenen'. Om met dit laatste te beginnen: er is een tijd geweest (voor de tweede fase) dat bij wiskunde '**bereken**' betekende dat je een **exact antwoord** moest geven met een **berekening**. Als je een benadering wilde dan schreef je 'benader' of 'benader op 2 decimalen'. Met de tweede fase is dat (helaas) veranderd.

Volgens de **nomenclatuur wiskunde tweede fase**:

> Bij het werkwoord '**bereken'** moet de berekening altijd opgeschreven worden; het antwoord mag ook een met de (grafische) rekenmachine gevonden antwoord zijn. Bij het gebruik van de grafische rekenmachine moet duidelijk worden aangegeven hoe men tot het antwoord komt…”

Het is handig om je bij de vaklessen op de hoogte te stellen van de afspraken hierover en probeer de zaken vooral ook eens **zonder GR** te benaderen.

Opdracht 3

Bereken **exact** en **zonder** rekenmachine.

a. $14 \times 71 =$

b. $13574 : 11 =$

c. $-4 + 3 \times 3 =$

d. $4 - 5 + 6 =$

e. $\sqrt{175} + \sqrt{112} =$

f. $-4^2 + (-4)^3 =$

g. ${}^2\log(16) \cdot {}^2\log(8) =$

h. $2\frac{2}{3} \times 3\frac{3}{5} =$

i. $14\frac{2}{3} - 3\frac{5}{9} =$

j. $14\frac{2}{3} : 3\frac{5}{9} =$

Wat je 'moet' verstaan onder 'bereken' ligt niet ondubbelzinnig vast. Het is een **afspraak**. Misschien ken je het regeltje 'meneer van Dale wacht op antwoord' wel. Dat is **ook** een afspraak. Een **definitie** is ook bedoeld als afspraak. Het heeft geen zin je af te vragen of een dergelijk definitie wel waar is. Je kunt je natuurlijk wel afvragen of het zinvol is of je er iets aan hebt...

Het **definiëren** van een begrip wordt pas zinvol als je van dit begrip bepaalde **eigenschappen** hebt ontdekt. De eigenschappen, die voor bepaalde begrippen gelden, worden geformuleerd in **stellingen**. Stellingen zijn **beweringen** over bepaalde dingen. Stellingen moeten daarom bewezen worden.

Eerst definieer je (bijvoorbeeld) wat een 'rechthoekige driehoek' is. Daarna kan je bewijzen dat in een rechthoekige driehoek iets bijzonders aan de hand is met de lengte van de zijden...

Opdracht 4

- Wat is er eigenlijk zo bijzonder aan de lengte van de zijden van een rechthoekige driehoek?

Verderop in de cursus komen we nog regelmatig terug op bewijzen en stellingen.

Als je teksten schrijft, bijvoorbeeld voor een proefwerk dan is het wel de bedoeling dat je foutloos schrijft. Let dus op **spelling** en **schrijfstijl**. Zorg voor 'helder', 'eenvoudig' en 'wiskundig correct' taalgebruik.

Opdracht 5

- Wat is een hexaëder in parallelprojectie?

Goede vragen stellen is nog best moeilijk. Eigenlijk zou er geen verwarring mogen bestaan over de vraag wat er nu precies gevraagd wordt...

Hieronder zie je 3 voorbeelden van **slordig geformuleerde** opgaven:

1. Ik gooi met twee dobbelstenen. Bereken op 3 decimalen de kans om 5 te gooien.
2. Een tentamen bestaat uit twintig vierkeuzevragen. Wat is de kans dat je meer dan de helft van de vragen goed beantwoord als je onvoorbereid het tentamen maakt?
3. Ik maak een toets van 20 vierkeuzevragen. Ik weet op 10 vragen het antwoord, maar moet bij de andere vragen gokken. Bereken de kans op een voldoende.

Opdracht 6

- Wat is er mis met bovenstaande opgaven?

Als bij het stellen van vragen je taalgebruik niet 'eenvoudig' en 'helder' is dan heb je kans dat de leerlingen de vraag niet begrijpen. Dat wil je niet. Ook bij uitleg moet je er **niet** altijd van uitgaan dat voor leerlingen de woorden en begrippen, die jij 'normaal' en 'vanzelfsprekend' vindt, dezelfde betekenis hebben.

Lastiger is dat het ook nog 'wiskundig' juist moet zijn. Ik vind dat je als **docent** gewoon geen onzin moet verkopen. In een proefwerk kan je niet schrijven:

> "Er hangt een touw tussen de palen van A naar B. Het touw heeft de vorm van een parabool. Geef de formule van deze parabool."

Als je een touw tussen twee punten hangt dan is die kromme geen parabool, maar een **kettinglijn**. Je kunt niet doen alsof dat 'wel' zo is en denken dat toch niemand dat merkt. Je zou dit kunnen vermijden door bijvoorbeeld te schrijven: ‘het touw heeft bij benadering de vorm van een parabool’ of ‘Joris denkt dat het touw de vorm heeft van een parabool’. Die Joris toch… Dat kan wel, maar moet je dat willen?

Opdracht 7

- Is de uitspraak ‘Iedere parabool heeft een snijpunt met de y-as’ waar of niet waar?

Taalfouten

Let bij het schrijven van teksten op **taalfouten**. Als docent geef je natuurlijk het goede voorbeeld. Is dat moeilijk?

> Leren spellen is in de eerste plaats het goed leren schrijven van de werkwoordsvormen. Al het andere is op te zoeken in een woordenboek of wordt geregeld door de spellingscorrector op de computer. De spelling van de werkwoordsvormen is helder omdat hij grammaticale functies zichtbaar maakt, en hij is bovendien in een uurtje te leren. Dat worden er overigens al gauw tien als de leerlingen onvoldoende grammaticale kennis hebben. Of het bijvoorbeeld *gebeurt* moet zijn of *gebeurd* hangt van de functie in de zin af of de woordsoort en die moet je herkennen en kunnen benoemen: persoonsvorm of voltooid deelwoord.
>
> Nieuw Nederlands Spelpeil
> NRC-Handelsblad, zaterdag 20 januari 2007

Opdracht 8

Zoek de fouten in onderstaande zinnen:

- Twee leerlingen hebben de stoelen vernielt.
- Een rat in het nou maakt rare sprongen.
- Het gebeurd wel vaker dat je eerst iets niet begreep.
- Ik wordt daar niet koud of warm van.
- In de zomer wordt je koelvloeistof te warm.

Stijlfouten

Je kunt schrijven:

"De leerlingen klagen erover te lage cijfers te krijgen en dat het huiswerk veel te veel is."

Maar na 'en' moet een zinsbouw komen die **symmetrisch** is aan de zin 'te lage cijfers krijgen'. Je kunt dus beter schrijven:

"De leerlingen klagen erover te lage cijfers te krijgen en te veel huiswerk te krijgen."

Nu staat er twee keer 'krijgen'. Dat is ook niet fraai, dus kan je beter schrijven:

"De leerlingen klagen erover te lage cijfers en te veel huiswerk te krijgen."

Maar nog beter is:

"De leerlingen klagen over te lage cijfers en te veel huiswerk."

Deze laatste zin 'zegt' hetzelfde, maar is wel veel duidelijker!

Opdracht 9

Wat is er 'fout' aan onderstaande zinnen?

- De rector heeft de leerling op spijbelen betrapt en een berisping gegeven.
- De dames en heren worden verzocht niet te roken.
- Een aantal leerlingen hebben het huiswerk niet gemaakt.
- Tot dusver hebben wij niet eerder met dergelijke problemen te maken gehad.
- Hij kan helaas niet komen. Want hij is ziek.

Taal is geen wiskunde

Wiskundigen hebben meestal wel 'iets' met taal. Dat is ergens wel logisch. Goed formuleren in 'normale' taal is heel erg lastig. Het zijn ook vaak wiskundigen die allerlei taaluitingen wel heel erg letterlijk nemen. Als er ooit een wiskundige voor je deur staat vraag dan niet 'heb je 't kunnen vinden?' en zeg ook niet 'let niet op de rommel', want dat is echt vragen om moeilijkheden.

Op wiskundemeisjes.nl stond een keer een prijsvraag 'Wie verzint de leukste slagzin voor wiskunde?'. Een van de slagzinnen was:

Wiskunde is makkelijker als je denkt!

Eén van de reacties:

> uuuh... ik hoop dat degene die deze slagzin heeft verzonnen heel goed is in wiskunde, want nederlands kan diegene niet zo goed:P
> het is namelijk NIET: wiskunde is makkelijker als je denkt maar het is: Wiskunde is makkelijker DAN je denkt!!!!
> (vergelijking=als, vergrotende trap=dan)

Bijna goed...☺ Wetmatigheden in taalkundig opzicht zijn niet zo eenvoudig. Je mag soms best 'als' zeggen in plaats van 'dan', maar dan zeg je (mogelijk) wel iets anders dan je bedoelt... In de werkruimte staat nog een aardig artikel over 'groter als'.

Maar pas op. Taal is **geen** wiskunde. Het burgerlijk wetboek of het studentenstatuut is geen wiskunde. Je kunt veel misverstanden voorkomen door een **helder** en **goed taalgebruik**, je kunt veel ellende voorkomen door het maken van duidelijke **afspraken**, maar het is geen wiskunde...

Meer dan kunstjes leren

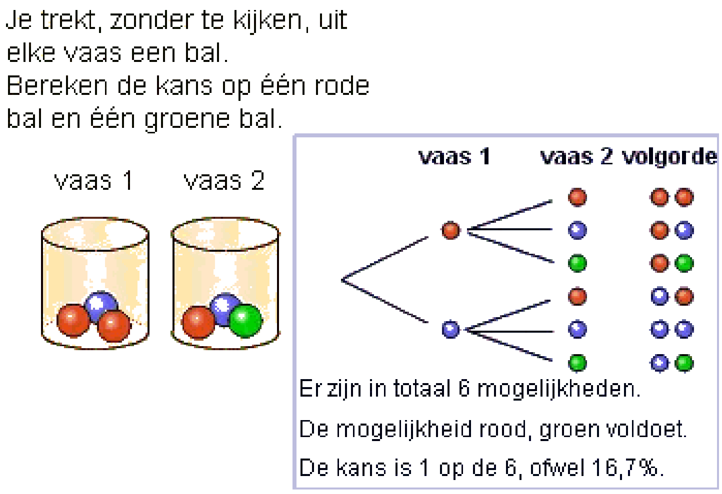
Wiskunde leren is meer dan het aanleren van een aantal kunstjes. Een aap kan je kunstjes leren, maar of je een aap ook een sonnet kan laten schrijven of de stelling van Pythagoras kan laten bewijzen? Leerlingen zijn **geen apen** en leerlingen zouden toch eigenlijk moeten (kunnen) begrijpen waar ze mee bezig zijn. Leerlingen zouden in grote lijnen kennis moeten hebben van de principes en wetmatigheden 'achter de wiskunde' die ze doen.

Opdracht 10

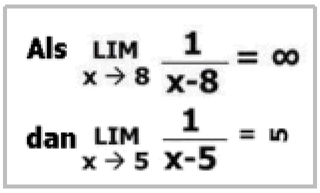
Hiernaast zie je een uitwerking van een kansprobleem. Daar gaat iets niet helemaal goed.

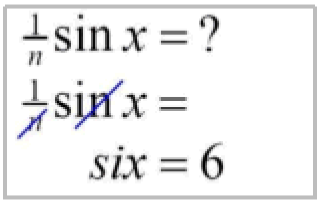
- Wat gaat er mis? Wat is het juiste antwoord?

Een boomdiagram kan een handig hulpmiddel zijn. Maar als het niet meer is dan een trucje dan kan het ook gemakkelijk mis gaan.

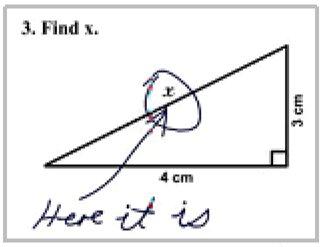


Als leerlingen leren rekenen met **negatieve getallen** dan kan je als docent van alles uit de kast halen: getallenlijnen, stijgende en dalende temperatuur, banktegoeden en schulden maar ook heksenketels met warme en koude blokjes. Je gebruikt dat om leerlingen te laten zien hoe het werkt en meestal begrijpen ze dat na een tijdje ook wel. Toch moet je niet raar opkijken als leerlingen na een tijdje 'rare dingen' doen.





Een leerling schrijft op: -2 + -3 = 5. Bij navraag kom je er achter dat de leerling dacht 'min en min was plus toch?'. De leerling bedoelt waarschijnlijk 'min keer min is plus'. Waarschijnlijk heeft de leerlingen de regel niet begrepen of is het half vergeten, maar wist nog wel dat er iets van 'een regel' voor was. Het lijkt nogal **zinloos** om een regel te leren als je die vervolgens op het verkeerde moment toe gaat toepassen...



Leerlingen doen soms 'de raarste dingen' en zeg nu zelf, het is ook allemaal niet zo eenvoudig toch? Of wel?

Opdracht 11

Om de vergelijking $(x + 1)^2 = (2x-1)^2$ op te lossen schrijft een leerling:

$(x + 1)^2 = (2x - 1)^2$

$(x + 1)^2 - (2x - 1)^2=0$

$((x + 1 + (2x - 1))\cdot((x + 1 - (2x - 1))=0$

$(x + 1 + 2x - 1) \cdot (x + 1 -2x + 1)=0$

$3x \cdot (-x + 2)=0$

$3x = 0 \vee -x + 2=0$

$x = 0 \vee x = 2$

Is dat **goed** of is dat **fout**?

Je kunt zeggen dat het leren van 'regeltjes zonder begrip' een riskante bezigheid is. Hoe weet je nu wanneer de regel wel geldt en wanneer niet? En waarom? En leidt dat uiteindelijk tot 'wiskundig' zinnige bewerkingen met formules en vergelijkingen? Soms is het ook niet handig.

Opdracht 12

In een hok zitten kippen en konijnen. Samen hebben de dieren 35 koppen en 94 poten. Hoeveel konijnen en hoeveel kippen zitten er in het hok?

Hoofdstuk 2 – Getallen en letters

A mathematician is a person who says
that when 3 people are supposed to be in a room
but 5 came out 2 have to go in so the room gets empty.
bron: the complex plane.

EEN	DRIE	DRIE	VIER
ZES	DRIE	VIER	VIER
ZEVEN	VIJF	VIJF	ZES
ZEVEN	NEGEN	NEGEN	ZEVEN
NEGEN	TIEN	NEGEN	NEGEN
------	------	------	------
DERTIG	DERTIG	DERTIG	DERTIG

Veel 'letters' in de wiskunde zijn namen voor abstracties, je hebt 'iets' waarvan je nog niet precies ‘wat’ het is, misschien weet je er wel 'niks’ van maar je geeft het een naam en opeens heb je iets en je kan er over praten: het punt A, de lijn p, de vector $\vec{v}$, de matrix A, de gebeurtenis W, de bewering P, enz.

Het meest elementaire niveau van het gebruik van letters waar je mee kan 'rekenen' is het geven van een naam aan een vaststaand (zij het soms onbekend) getal. In plaats van te spreken over 'ik heb een getal dat...' spreek je over 'het getal a'. Je geeft dat getal (dat je nog niet kent) maar even een naam, dan weten we waar we het over hebben. Het is ongeveer hetzelfde als 'puntjessommen' of 'vleksommen'. Men spreekt in dit verband ook over '**lege plaats**' of '**plaatshouder**'.

In plaats van '3 · ... + 10 = 19' kan je ook schrijven '3 · x + 10 = 19' of '3x + 10 = 19'. De 'bedoeling' is dan meestal om de (tot dan toe nog) onbekende waarde van 'x' te bepalen zodat er een 'ware bewering' ontstaat. In een dergelijk geval spreken we van '**onbekende**'.

In een formule als y = 3x + 10 hebben de letters een andere rol. Het is niet een onbekende waarde maar een hele verzameling van mogelijke waarden. In een dergelijk geval spreken we van '**variabele**' of '**veranderlijke**'. Met y = 3x + 10 geeft je een 'relatie' aan en in dit geval een bijzondere relatie: 'y is een eerstegraads functie van x'.

De ABC-formule geeft bij een gegeven kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ de oplossing(en) uitgedrukt in a, b en c. De letters a, b en c worden '**coëfficiënten**' genoemd. In één vergelijking kunnen dus zowel variabelen als coëfficiënten voorkomen.

Als ik schrijf 'de functie $y = ax + b$' dan vat 'iedereen' dat op als 'y is een functie van x' met parameters a en b. Voor verschillende waarden van a en b heb je te maken met een andere (lineaire) functie. Maar wat nu als je schrijft '$p = a + u + v$'? Is p nu een functie van a, u of van v? En als p een functie is waarom zou u en v of zelfs a dan ook niet functies zijn? Maar het kan ook best iets heel anders zijn... misschien zijn a, u en v wel '**constanten**'.

Opdracht 1

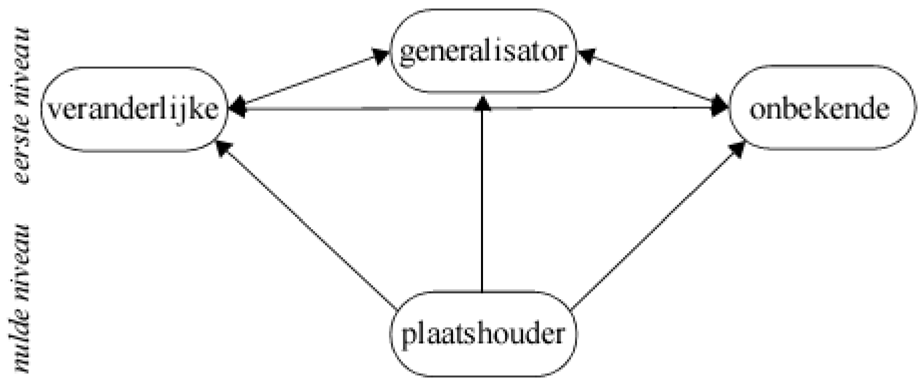
Er geldt f: $9x^2 – 4y = 12$.

a. Is f een functie?
b. Schrijf y als functie van x.
c. Plot de grafiek.
d. Is de grafiek een dal- of een bergparabool?
e. Geef de coördinaten van de top.

Je kent misschien deze merkwaardige producten wel:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

De 'rol' van de letters a en b is hier weer anders. De bewerkingen gelden niet voor een bepaalde a en b maar voor **alle** waarden voor a en b. We noemen dit wel '**generalisator**'.



Niveaus van inzicht in het parameterbegrip

Opdracht 2

$a,b \in \mathbb{R}$

Waar of niet waar?

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$$

$$\frac{a}{a+ab}=\frac{1}{ab}$$

$$\frac{a}{a+ab}=\frac{1}{1+b}$$

$$\frac{a^2+ab}{a+b}=a$$

$$\frac{a^2-4a+4}{a^2-4}=\frac{a-2}{a+2}$$

Als je zoiets schrijft:

> 'Als ik bij het kwadraat van dit getal vier keer hetzelfde getal optel en daar tien van aftrek dan is die uitkomst precies even groot als dat ik van dat getal eerst tien zou aftrekken, daarna het kwadraat zou nemen en er dan tien bij op zou tellen'

Dat is niet alleen ‘een lang verhaal’, maar je kunt er (waarschijnlijk) verder ook niet zo veel mee.
Als je de ‘uitspraak’ vertaalt in '$x^2 + 4x – 10 = (x-10)^2 + 10$' dan staat er 'feitelijk' hetzelfde, maar met die laatste uitdrukking kan je wel iets. Ik wel... ☺

Het gebruik van 'letters' stelt je in staat om bepaalde verbanden, stellingen of ideeën op een hele compacte, efficiënte en ondubbelzinnige manier op te schrijven. Je kunt nu 'als het ware' met de ‘letters gaan rekenen'. Het zijn immers getallen. Je kunt vergelijkingen oplossen en nog veel meer...

Het gebruik van letters is niet beperkt tot getallen. Je kunt functies aanduiden met letters, matrices, verzamelingen, beweringen en nog veel meer...

Dat biedt toch een aantal interessante mogelijkheden...

Opdracht 3

Gegeven k: $y = x – 3$, l: $y = x + 2$ en $m = k \cdot l$ en $n = k : l$.

- Teken de grafiek van m en n.

Met getallen kun je **rekenen**: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen, e.d. Bij **algebra** doen we dat ook, alleen gebruiken we daarbij niet alleen getallen, maar ook **variabelen**. Men spreekt in dit geval (ten onrechte?!) wel van **letterrekenen**.

In de algebra worden allerlei verbanden en structuren (groepen, ringen, e.d.) onderzocht. Welke regels en eigenschappen gelden er voor de verschillende groepen, wat kan wel en wat kan niet? Verzamelingen spelen hierbij een grote rol, maar ook afbeeldingen en nog veel meer…

Door gebruik te maken van variabelen, vergelijkingen, groepen en afbeeldingen is het mogelijk 'algemene' uitspraken te doen over verzamelingen en operaties. Bekende eigenschappen van rekenen met getallen zijn de **commutatieve eigenschap** en de **distributieve eigenschap**.

Optellen

1. Gelijksoortige termen kan je optellen 2. De volgorde van de termen is niet van belang (commutatieve eigenschap) 3. De volgorde van de operatie is niet van belang (associatieve eigenschap)	A. $a + a = 2a$ B. $4pq^2 + 6pq^2 = 10pq^2$ C. $3ab + 6a^2b^3 + ab + a^2b^3 = 4ab + 7a^2b^3$ D. $7b + 4a = 4a + 7b$ E. $(a + b) + c = a + (b + c)$

Vermenigvuldigen

1. Vermenigvuldigen is herhaald optellen 2. Vermenigvuldig getallen met getallen, dezelfde letters met dezelfde letters 3. De volgorde van de factoren is niet van belang (commutatieve eigenschap) 4. De volgorde van de operatie is niet van belang (associatieve eigenschap) 5. Vermenigvuldigen is distributief over optellen	A. $4 \cdot a = a + a + a + a$ B. $4pq^2 \cdot 3p^2q = 12p^3q^3$ C. $y \cdot z \cdot x = xyz$ D. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ E. $a(b + c) = ab + ac$ F. $(a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ G. $(a + b)(a + c) = a(a + c) + b(a + c) = a^2 + ac + ab + c^2$ H. $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Machtsverheffen

1. Machtsverheffen is herhaald vermenigvuldigen 2. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ 3. $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$	A. $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ C. $4a \cdot 3a^2 = 12a^3$ D. $4ab^2 \cdot 2ab = 8a^2b^3$ E. $(2a)^3 = 8a^3$

Opdracht 4

- ‘Wat’ hoort er bij ‘wat’ bij de tabellen optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen?

Algebra is meer dan ‘letterrekenen’.

“Op de middelbare school, waar meestal met reële getallen wordt gemanipuleerd, betekent algebra vaak iets als ‘rekenen met letters’, waarbij veelvuldig haakjes worden weggewerkt of juist teruggehaald door ‘uitvermenigvuldigen’ dan wel ‘ontbinden’.

In de wiskunde komen veel meer interessante objecten voor dan alleen de reële getallen en functies daarop, en de algebra die wij zullen ontwikkelen wil in al deze gevallen toepasbaar zijn. Dit betekent dat de symbolen waar wij mee zullen ‘rekenen’ niet altijd getallen zullen zijn, maar ook vaak matrices, meetkundige afbeeldingen, permutaties van verzamelingen, of wat ons ook maar nuttig lijkt om één of ander probleem op te lossen.

Een wezenskenmerk van de moderne wiskunde is dat zij meestal niet een enkele functie, matrix of vergelijking bekijkt, maar, indien mogelijk, in één keer een hele verzameling van gelijksoortige objecten…”
Bron: Algebra I - P. Stevenhagen

Opdracht 5

- Neem 3 opeenvolgende getallen a, b en c (bijvoorbeeld a=1, b=2 en c=3 of a=3, b=4 en c=5) en bereken $a^2 + c^2 - 2b^2$. Wat valt je op? Is dit altijd zo?

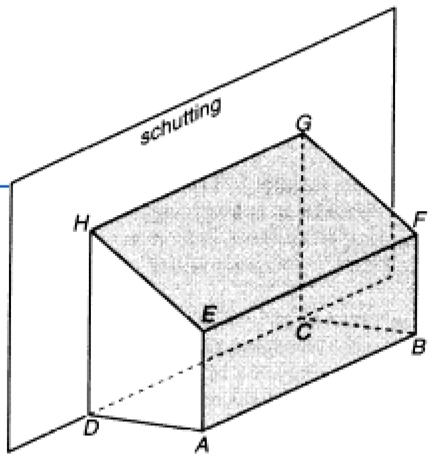
Rekenen met letters

Vaak bedoelt men met ‘algebraïsche vaardigheden’ het oplossen van vergelijkingen, haakjes wegwerken, ontbinden in factoren e.d., zeg maar **algebraïsche basisvaardigheden**.

"Leerlingen gaan leren werken met letters. De verschillen tussen de bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en machten) moeten ze onderscheiden. De begrippen moeten ze uit het hoofd leren en daarna gaan toepassen. Dus het geheel gaat over rekenen met letters (algebra). Verder moeten ze in staat zijn om de letters te vervangen door een positief getal."

Dat je met variabelen dezelfde bewerkingen kan uitvoeren als met getallen is niet zo heel bijzonder. Het gaat bij die variabelen immers over getallen. Bij het zoeken naar formules wil het nog wel eens enorm helpen om, als dat niet meteen lukt, eerst te kijken wat je zou doen als zou je weten wat de waarde van 'x' zou zijn.
Om het maar 's simpel te zeggen... ☺

Voorbeeld



Met behulp van een frame van uitschuifbare tentstokken AE en BF en een rechthoekig zeil van 5 bij 10 meter wordt tegen een schutting een opslagruimte gemaakt in de vorm van een recht prisma AEHD BFGC. De grensvlakken AEHD en BFGC blijven open en hebben elk de vorm van een trapezium met rechte hoeken in A, D, B en C. De breedte AD van de opslagruimte is 3 meter. Het zeil wordt met de lange kant van 10 meter op de grond bevestigd langs

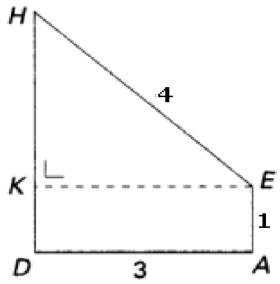
AB. Het zeil wordt over een stok EF gespannen naar de schutting waar het zo hoog mogelijk wordt bevestigd. In de figuur hierboven is dat langs HG. De korte kant van het zeil valt langs AE en EH. AE + EH = 5 meter. Doordat AE (= BF) variabel is, zal de hoogte van HG ook variabel zijn. De inhoud V van het prisma AEHD BFGC hangt af van de lengte h van AE.

a. Geef een formule voor V met h in m en V in m^3.
b. Bereken in gehele cm nauwkeurig de waarde van h, waarbij de inhoud van de opslagruimte maximaal is.

Stel je voor dat het je niet meteen lukt om de formule te bedenken. Waarom zou je dan niet h=1 nemen en eens kijken wat je dan allemaal moet doen om de inhoud te bepalen. Als dat lukt dan zou het met 'h' ook moeten lukken.

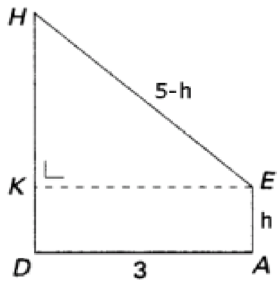
Uitgewerkt met h=1

AE=1
HE=5-1=4
$KH^2=4^2-9=16-9=7$
$KH=\sqrt{7}$
$O(AEHD)=O(AEKH)+O(\triangle KEH)=3\cdot 1+1\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{7}=3+1\frac{1}{2}\sqrt{7}$
$V=10\cdot(3+1\frac{1}{2}\sqrt{7})$
$V=30+15\sqrt{7}$



Uitwerking met h

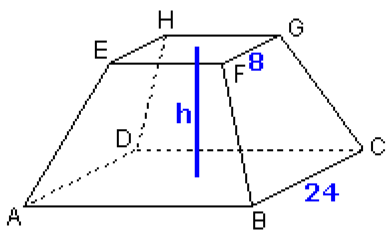
AE=h
HE=5-h
$KH^2=(5-h)^2-9$
$KH=\sqrt{(16-10h+h^2)}$
$O(AEHD)=O(AEKH)+O(\triangle KEH)=3\cdot h+1\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{(16-10h+h^2)}$
$V=10\cdot(3h+1\frac{1}{2}\sqrt{(16-10h+h^2)})$
$V=30h+15\sqrt{(16-10h+h^2)}$



Opdracht 6

Van een afgeknotte piramide met een vierkant grondvlak is de lengte van de zijde van het grondvlak 24 en de lengte van de zijde van het bovenvlak 8.

Zie tekening.



a. Bereken de inhoud als h=2.
b. Geef een formule voor de inhoud uitgedrukt in h.

Formules

Hieronder kun je 3 voorbeelden vinden van opgaven waarbij je formules kan maken om het 'probleem' op te lossen. Het 'zoeken' naar formules niet altijd eenvoudig. Als je eenmaal een vergelijking hebt is het de 'kunst' om die vergelijking op te lossen.

Opdracht 7

Hiernaast zie je een overzichtje van het aantal diagonalen van een aantal veelhoeken:

aantal hoekpunten	aantal diagonalen
3	0
4	2
5	5
6	9
7	14
8	20

a. Hoeveel diagonalen heeft een 9-hoek? En een 10-hoek?
b. Hoeveel diagonalen heeft een 50-hoek? En een 1000-hoek?
c. Stel een formule op voor het aantal diagonalen van een n-hoek

Vaak is een deel van 'een probleem' opgelost als je een 'handige' variabele kiest. Veel ogenschijnlijk moeilijke puzzeltjes blijken in een dergelijk geval niet veel meer te zijn dan een vergelijking of een stelsel van vergelijkingen met een aantal onbekenden.

Opdracht 8

Vader is driemaal zo oud als zijn dochter en viermaal zo oud als zijn zoon. De dochter is 4 jaar ouder dan de zoon.

- Hoe oud zijn ze nu?

Een ander basisvaardigheid bij het rekenen met letters is het 'omzetten' van formules. Bijvoorbeeld bij formules waarbij meerdere variabelen een rol spelen is het wel 's nodig om de formule uit te drukken in een andere variabele.

Opdracht 9

Er geldt: $a = b^2 - 2bc + c^2$

- Geef een formule waarmee je 'c' uitdrukt in 'a' en 'b'.

Inverse bewerkingen

- Aftrekken is de **inverse bewerking** van optellen

  $a - b = c \Rightarrow c + b = a$
- Delen is de **inverse bewerking** van vermenigvuldigen

  $a : b = c \Rightarrow c \cdot b = a$
- Worteltrekken is de **inverse bewerking** van machtsverheffen

  $a^{\frac{1}{b}} = c \Rightarrow c^b = a$
- Logaritme is de **inverse bewerking** van machtsverheffen

  ${}^a\log(b) = c \Rightarrow a^c = b$

Voorbeelden:

- $12 - 5 = 7 \Rightarrow 7 + 5 = 12$
- $12 : 3 = 4 \Rightarrow 4 \cdot 3 = 12$
- $\sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2^3 = 8$
- ${}^2\log(8) = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$

In hoofdstuk 3 (en verder) komen we nog terug op machten, wortels en logaritmen.

Inverse functies

De **inverse functie** van $y = (x+2)^3 - 4$ is gelijk aan $x = \sqrt[3]{y+4} - 2$. Je kunt ook zeggen dat je **x** uitgedrukt hebt in **y**. Om die inverse functie te bepalen is het handig om een pijlenschema te gebruiken.

$y = (x+2)^3 - 4$

$x \xrightarrow{+2} x+2 \xrightarrow{\ldots^3} (x+2)^3 \xrightarrow{-4} (x+2)^3 - 4$

$\sqrt[3]{y+4} - 2 \xleftarrow{-2} \sqrt[3]{y+4} \xleftarrow{\sqrt[3]{\ldots}} y+4 \xleftarrow{+4} y$

$x = \sqrt[3]{y+4} - 2$

Als je goed kijkt dan zie je dat bij de **pijlen** op de 'terugweg' steeds de **inverse bewerking** staat van de bewerking op de 'heenweg'.

Voorbeeld

Gegeven: $y = {}^2\log(x+3) - 4$

Gevraagd: druk x uit in y

Oplossing: $y = {}^2\log(x+3) - 4$

$x \xrightarrow{+3} x+3 \xrightarrow{{}^2\log(\ldots)} {}^2\log(x+3) \xrightarrow{-4} {}^2\log(x+3) - 4$

$2^{y+4} - 3 \xleftarrow{-3} 2^{y+4} \xleftarrow{2^{\cdots}} y+4 \xleftarrow{+4} y$

$x = 2^{y+4} - 3$

Opdracht 10

Schrijf (indien mogelijk) x als functie van y:

a. $y = 2x + 3$

b. $y = \dfrac{1}{x+1} + 1$

In **opdracht 10** staat ‘indien mogelijk’. Dat zou er op kunnen wijzen dat niet elke functie een inverse heeft. Dat is ook zo.

Voorbeeld

$$y = (x-3)^2 + 4$$

$$x \xrightarrow{-3} x-3 \xrightarrow{\dots^2} (x-3)^2 \xrightarrow{+4} (x-3)^2 + 4$$

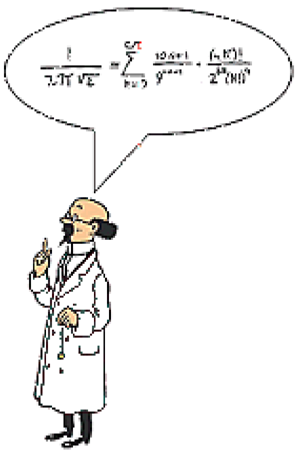
$$\pm\sqrt{y-4} + 3 \xleftarrow{+3} \pm\sqrt{y-4} \xleftarrow{\pm\sqrt{\dots}} y-4 \xleftarrow{-4} y$$

$$x = \pm\sqrt{y-4} + 3$$

De laatste ‘uitdrukking’ is **geen** functie. Het is een ‘samenstelling’ van twee functies. Het resultaat is **geen** functie. Bij een functie heeft elk ‘origineel’ (zeg maar ‘x’) maximaal één beeld (zeg maar ‘y’).

Opdracht 11

- Geef 3 **verschillende** voorbeelden van **functies** die **geen inverse** hebben.

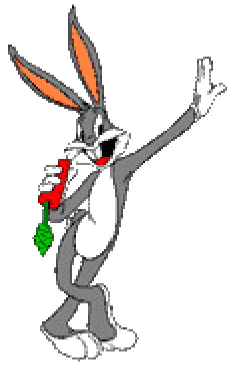


Hoofdstuk 3 – Vergelijkingen oplossen

Om wiskunde te leren, heb je geen speciale aanleg nodig. Iedereen kan het. Maar je moet wel aansluiten bij de belevingswereld van leerlingen. Als je dat doet, kun je zelfs een konijn wiskunde leren.
Jan de Lange

Opdracht 1

Los op:



a. $3x + 5 = 8x - 10$
b. $3x^2 + 5 = 8x^2 - 10$
c. $3x^2 + 5x = 8x^2 - 10x$
d. $3x^2 + 5x = 8x^2 - 10$

Opdracht 2

Los op:

a. $\left(\sqrt{\frac{3}{2p}+4}\right)^2 - 1 = 0$

b. $\sqrt{\left(\frac{3}{2p}+4\right)^2} - 1 = 0$

c. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}} = \dfrac{5}{8}$

Bij opdracht 1 en 2 zal je verschillende manieren om een vergelijking op te lossen hebben gebruikt. Soms is de ene manier handiger dan een andere manier. Soms is het vooral een kwestie van ‘goed kijken’. Dat ‘goed kijken’ is lastiger dan je denkt (en lastiger als je niet denkt). Wat doe je nu eigenlijk **precies** als je een vergelijking oplost?

In schoolboeken kan je die verschillende methoden tegen komen met namen als ‘weegschaal- of balansmethode’, ‘bordjes- of handjes methode’ en misschien nog wel meer… Voor leerlingen zijn deze methoden vaak niet meer dan een verzameling regeltjes. Ze kunnen ze best leren toe te passen maar of iedereen nu helemaal begrijpt waar hij/zij mee bezig is valt te betwijfelen. Maar misschien heb je daar zelf ook wel een beetje last van? Dat kan natuurlijk niet zo blijven!

Op de ‘oude formulekaart VWO’ stond onder het kopje ‘vergelijkingen’ altijd het volgende overzicht:

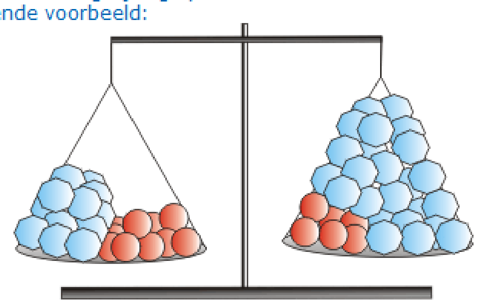
vergelijking	**oplossing**	**voorwaarde**
$ax^2+bx+c=0$	$x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ of $x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ met $D=b^2-4ac$	$a\neq 0$, $D\geq 0$
$x^n=c$	$x=c^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{c}$	$c>0$, $n>0$
$g^x=a$	$x={}^g\log a=\frac{\log a}{\log g}$	$a>0$, $g>0$, $g\neq 1$
${}^g\log x=b$	$x=g^b$	$g>0$, $g\neq 1$
$e^x=a$	$x=\ln a$	$a>0$
$\ln x=b$	$x=e^b$	

Eigenlijk was dat vreemd want zijn dat dan geen dingen die ‘gewoon’ moet weten? Inderdaad. Op de **nieuwe formulekaart** staat dat overzicht niet meer. Nu zou je de formules uit je hoofd kunnen leren, maar misschien is dat helemaal niet nodig als je begrijpt hoe het werkt?

De balansmethode

In schoolboeken zou je zoiets tegen kunnen komen:

Wanneer we deze vergelijking oplossen met de balansmethode dan krijgen we het volgende voorbeeld:



$10b+12=6b+24$

Aan de linkerkant heb je 10 bolletjes lood (= 10b) en 12 muntjes (+ 12).
Aan de rechterkant heb je 6 bolletjes lood (= 6b) en 24 muntjes (+ 24).
Het is de bedoeling om te weten hoe zwaar één bolletje lood weegt. We moeten hierbij de weegschaal in evenwicht houden.

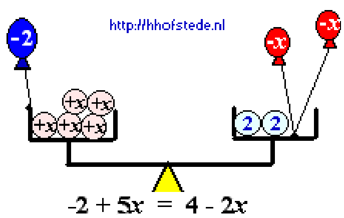
We halen aan beide kanten 12 muntjes weg.

Let op: Als je rechts iets weg haalt, dan moet je links hetzelfde weg halen.

$$10b+12=6b+24$$
$$-12 \qquad -12$$
$$10b+0=6b+12$$
$$-6b \qquad -6b$$
$$4b+0=0+12$$
$$4b=12$$
$$:4 \qquad :4$$
$$b=3$$

http://www.wiskunde.eu/?pg=300006

De balans is een sterk beeld. De balans is in evenwicht en als je dan nu maar links en rechts ‘hetzelfde doet’ dan kan het bijna niet fout gaan. Het wordt al vrij snel lastig om dit beeld vast te blijven houden, bijvoorbeeld bij negatieve getallen. Ik heb nog wel ’s een balans gezien met ballonnetjes. Dat kan wel, maar het wordt wel een rommeltje. Ook als je (bijvoorbeeld) zou willen kwadrateren dan heb je een probleem.



Maar die balans was natuurlijk alleen maar bedoeld als ‘opstapje’ naar een meer abstracter begrip dat als je bij een vergelijking op beide leden dezelfde bewerkingen uitvoert de gelijkheid in tact blijft.

De ‘truc’ is om die bewerkingen zodanig te kiezen dat je de vergelijking op kan lossen. Als je een vergelijking als $2\sqrt{x} + 8x = 3$ wilt oplossen dan ben je klaar als je met zekerheid kan zeggen dat $x = \frac{1}{4}$ de enige oplossing is van de vergelijking.

Opdracht 3

Los op:

a. $2\sqrt{x} + 8x = 3$

b. $\sqrt{x+1} = x^2 - 1$

Als het goed is heb je gezien dat als je ‘links’ en ‘rechts’ kwadrateert de gelijkheid wel in tact blijft maar dat je mogelijk **nieuwe oplossingen** creëert die helemaal geen oplossing zijn. Het lijkt dat er weinig anders op zit om als je kwadrateert je oplossingen achteraf te controleren.

Opdracht 4

- Controleer je oplossingen van opdracht 3.

Bij het oplossen van vergelijkingen is het van belang om goed te weten hoe je bewerkingen toepast op formules. Er zijn veel mensen die nog steeds (af en toe) denken dat $(x + 3)^2$ gelijk is aan $x^2 + 9$. Dat is niet het geval… althans meestal niet… ☺

Voorbeeld

Dit kan een domme vraag zijn, maar in de instaptoets van Wiskunde B staat de volgende vergelijking: $(x + 3)^2 = (x + 2)^2$.
Dit kun je uit haakjes halen: $x+3 \cdot x+3 = x+2 \cdot x+2$
Nu komt het probleem, als ik links twee x-en weghaal, mag ik dat rechts ook, dan krijg ik dit: $3 \cdot 3 = 2 \cdot 2$ en dat is heel erg fout! Hoe kan dit verklaard worden?
(trouwens, ik had als oplossing x=0, klopt dat?)

Er gaat hier wel wat mis. ‘Links en rechts iets weghalen’ is natuurlijk ook geen wiskundige bewerking. Dit is geen wiskunde maar tekstverwerken.☺

De bordjesmethode

Sommige vergelijkingen laten zich oplossen met de **bordjes- of handjesmethode**.

$$3+\frac{\boxed{44}}{\boxed{\sqrt{87+x}}}=7$$

$$\frac{44}{\boxed{\sqrt{87+x}}}=4$$

$$\sqrt{\boxed{87+x}}=11$$

$$87+\boxed{x}=121$$

$$x=34$$

Handjesmethode

3a + 4 = 10

 + 4 = 10

 = 6

dus 3a = 6

3 x  = 6

 = 2

dus a =2

Dat lijkt misschien we een leuke methode maar ’t is (helaas) niet erg breed toepasbaar. Het werkt eigenlijk alleen goed bij vergelijkingen waarbij de variabele maar één keer komt. Zo niet, dan kom je snel bordjes of handen te kort…☺

Deze methode is (als je goed kijkt) gebaseerd op het rekenschema. De rechter vergelijking zou je ook zo op kunnen lossen:

$$a \xrightarrow{\times 3} 3a \xrightarrow{+4} 3a+4$$
$$2 \xleftarrow{:3} 6 \xleftarrow{-4} 10$$
$$a=2$$

Opdracht 5

- Los de linker vergelijking op met behulp van het rekenschema.

Het principe is dat, als je op een getal (bijvoorbeeld a) allerlei bewerkingen uitvoert en het eindresultaat bekend is, je door terug te rekenen (inverse bewerkingen dus) de oplossingen kan vinden. De bordjesmethode lijkt niets veel anders dan een rekenschema.

Zoals je ziet (hoop ik) spelen inverse functies daarbij een belangrijke rol. Maar dat was bij de balansmethode ook al… Toch?

Opdracht 6

Los exact op:

a. $(x-1)\left(x^2+2x-3\right)=0$

b. $(x-5)^3=1331$

c. $x+\sqrt{x}=12$

Tweedegraadsvergelijkingen oplossen

Er zijn in de schoolwiskunde verschillende ‘aanpakken’ om tweedegraads vergelijkingen op te lossen. De meest bekende en veelgebruikte methode is de ABC-formule. Het past helemaal in een ‘receptachtige aanpak’. Het werkt altijd en je hoeft verder niet na te denken. Wat wil je nog meer? ☺

Maar dat laatste willen we niet, denk ik. Veel tweedegraadsvergelijkingen zijn veel eenvoudiger op te lossen en de verschillende methoden zou je kunnen opvatten als een voorbereiding op het werken met formules.

We zullen eens gaan kijken naar:

- Eenvoudige tweedegraads vergelijkingen oplossen
- Ontbinden in factoren
- Kwadraatafsplitsen
- De ABC-formule

Eenvoudige tweedegraads vergelijkingen oplossen

Het probleem van het oplossen van tweedegraads vergelijkingen is dat je te maken hebt met termen met x^2 en termen met x. Meestal kan je daar niet zo veel mee met de balans- of de bordjesmethode. Maar soms wel.

Een aantal voorbeelden van tweedegraadsvergelijking die zich eenvoudig laten oplossen:

$x^2-4=0$
$x^2=4$
$x=-2$ of $x=2$

$4x^2=20$
$x^2=5$
$x=-\sqrt{5}$ of $x=\sqrt{5}$

$9x^2+1=0$
$9x^2=-1$
$x^2=-\frac{1}{9}$
geen oplossing

Nog een paar:

$x^2+x=0$
$x(x+1)=0$
$x=0$ of $x+1=0$
$x=0$ of $x=-1$

$5x^2=25x$
$5x^2-25x=0$
$x^2-5x=0$
$x(x-5)=0$
$x=0$ of $x=5$

Daar heb je geen ABC-formule voor nodig.

De laatste twee zijn voorbeelden van **ontbinden in factoren**. Je herleidt de vergelijking op nul en je schrijft het linker lid als een vermenigvuldiging van factoren. Je weet dat als het product van twee factoren gelijk aan nul is dat minsten één van die factoren nul moet zijn.

- Als $a \cdot b = 0$ dan $a=0$ of $b=0$.

Opdracht 7

Los op:

a. $x^2 - 100x = 0$
b. $(2x - 3)^2 = 9$
c. $22 - 11x^2 = 0$

Er zijn ook tweedegraads vergelijkingen waarbij de variabele maar één keer voorkomt.

$5(3x - 6)^2 = 0$
$3x - 6 = 0$
$3x = 6$
$x = 2$

$3(2x-3)^2 = 6$
$(2x-3)^2 = 2$
$2x - 3 = -\sqrt{2}$ of $2x - 3 = \sqrt{2}$
$2x = 3 - \sqrt{2}$ of $2x = 3 + \sqrt{2}$
$x = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Er zijn leerlingen die bij dit soort vergelijkingen eerst links de haakjes wegwerken en dan de ABC-formule gebruiken.

Opdracht 8

Los de rechter vergelijking hierboven op door eerst links de haakjes weg te werken en daarna de ABC-formule te gebruiken. Krijg je dezelfde oplossing? ☺

Er zijn ook nog tweedegraads vergelijkingen die al in een vorm staan die je bij het oplossen van een willekeurige tweedegraads vergelijking juist graag zou willen hebben, maar die heb je dan al…

$(3x - 2)(4x + 8) = 0$
$3x - 2 = 0$ of $4x + 8 = 0$
$3x = 2$ of $4x = -8$
$x = \frac{2}{3}$ of $x = -2$

$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 0$
$x = 1$ of $x = 2$ of $x = 3$ of $x = 4$ of $x = 5$

Bij deze voorbeelden is eerst de haakjes wegwerken ook niet 'echt' handig.

Opdracht 9

Los op:

a. $\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 2$

b. $(4x-1)^2 + 4x - 1 = 0$

c. $(x^2 - 2x)^2 = 9$

Ontbinden in factoren

Je zag hierboven al:
Als $a \cdot b = 0$ dan $a=0$ of $b=0$.

Voorbeeld:
$(x + 2)(x - 4) = 0$
$x + 2 = 0$ of $x - 4 = 0$
$x = -2$ of $x = 4$

(x+2)(x-4) is een product (het resultaat van een vermenigvuldiging) van de factoren **x+2** en **x-4**. Als dat product nul is dan is x+2=0 of x-4=0. Daarmee heb je de oplossingen van die vergelijking gevonden.

Opdracht 10

Los op:

a. $x^2 - 2x - 8 = 0$
b. $x^2 - 4x + 4 = 0$
c. $x^2 + 6x = 0$
d. $x^2 + 24x + 143 = 0$

Bij het ontbinden van factoren bij het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen kun je twee gevallen onderscheiden:

- Een zo groot mogelijke factor buiten haakjes halen.
- Van een drieterm een product van 2 tweetermen maken.

Voorbeelden

$x^2 + 8x + 12 = 0$
$(x+6)(x+2) = 0$
$x = -6$ of $x = -2$

$12x^2 + 3x = 0$
$3x(4x+1) = 0$
$3x = 0$ of $4x + 1 = 0$
$x = 0$ of $x = -\frac{1}{4}$

$3x^2 + 7x - 6 = 0$
$(3x-2)(x+3) = 0$
$x = \frac{2}{3}$ of $x = -3$

De vraag is: hoe kan je nu een dergelijk ontbinding in 2 tweetermen vinden?

Laten we eens kijken naar wat voorbeelden:

$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$
$(x + 2)(x-3) = x^2 - x - 6$
$(x + 1)(x - 4) = x^2 - 3x - 4$
$(x - 4)(x - 4) = x^2 - 8x + 16$
$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$

Als het goed is vallen er twee dingen op:

- De coëfficiënt van de term ‘met x’ aan de rechter kant is de **som** (optellen dus) van de twee getallen aan de linker kant.
- Het getal aan de rechter kant is het **product** (vermenigvuldigen dus) van de twee getallen aan de linker kant.

optellen levert

$$(x-4)(x+6) = x^2 + 2x - 24$$

vermenigvuldigen levert

Nu anders om: je wilt een ontbinding vinden voor $x^2 + 7x + 12$

Op grond van het bovenstaande moet je twee getallen zoeken die opgeteld 7 zijn en vermenigvuldigd gelijk aan 12.
Mogelijke kandidaten zijn alle mogelijke tweetallen met als product 12.

product		
1	·	12
2	·	6
3	·	4
-1	·	-12
-2	·	-6
-3	·	-4

Als je nu naar de 'som' kijkt krijg je het volgende lijstje:

product			som
1	·	12	13
2	·	6	8
3	·	4	7
-1	·	-12	-13
-2	·	-6	-8
-3	·	-4	-7

We waren op zoek naar een som van 7.
Dus: $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$.
Dit noemen we de **product-som-methode**.

Opdracht 11

Los op:

a. $x^2 - 4x = 21$
b. $2x^4 - 8x^3 = 42x^2$
c. $x^3 = x^2 + 12x$
d. $x^4 - 8 \cdot x^2 - 9 = 0$
e. $x^6 - 16x^3 + 64 = 0$
f. $x - 13\sqrt{x} + 36 = 0$
g. $(x - 4)^2 - 5(x - 4) + 6 = 0$
h. $2x^2 - (x - 2)^2 = 1$

Verdieping

We gaan 's kijken naar de volgende vraag:

- Kan je $3x^2 + 10x - 8$ ontbinden in factoren? En zo ja, hoe doe je dat?
- Is daar ook een 'methode' voor?

Voorbeelden

$3x^2 + 10x - 8$
$3 \cdot -8 = -24$
Met de product – som methode :
$-2 \cdot 12 = -24$ en $-2 + 12 = 10$
$3x^2 + 12x - 2x - 8 =$
$3x(x + 4) - 2(x + 4) =$
$(3x - 2)(x + 4)$

$15x^2 + 2x - 8$
$15x^2 - 10x + 12x - 8$
$5x(3x - 2) + 4(3x - 2)$
$(5x + 4)(3x - 2)$

Dat kan toch allemaal maar…☺

Opdracht 12

Ontbind in factoren (indien mogelijk):

a. $12x^2 - x - 1$
b. $2x^2 - 3x - 2$
c. $3x^2 - x - 2$
d. $4x^2 - 4x + 1$
e. $4x^2 - 17x + 4$

Hoofdstuk 4 – Kwadraatafsplitsen en de ABC-formule

In hoofdstuk 3 heb je gezien hoe je eenvoudige tweedegraads vergelijkingen kan oplossen. De **product-som-methode** kan je niet **altijd** gebruiken.

Opdracht 1

Los (indien mogelijk) op met de product-som-methode:

a. $x^2 + 4x + 8 = 0$
b. $x^2 + 4x + 4 = 0$
c. $x^2 + 4x - 2 = 0$

Kwadraatafsplitsen

In plaats van de product-som-methode kan je tweedegraadsvergelijking ook oplossen met kwadraatafsplitsen. In dat geval probeer je de drieterm te schrijven als een kwadraat.

Voorbeeld

$x^2 + 4x - 8 = 0$
$(x + 2)^2 - 4 - 8 = 0$
$(x + 2)^2 - 12 = 0$
$(x + 2)^2 = 12$
$x + 2 = -2\sqrt{3}$ of $x + 2 = 2\sqrt{3}$
$x = -2 - 2\sqrt{3}$ of $x = -2 + 2\sqrt{3}$

Opdracht 2

- Laat zien dat $2\sqrt{3}$ gelijk is aan $\sqrt{12}$.

Als je '$x^2 + 8x - 12$' wilt schrijven als een kwadraat dan zal dat vanwege de term '$8x$' iets moet worden als: $(x + 4)^2$. Maar $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$ en dat is niet gelijk aan $x^2 + 8x - 12$. Maar daar kan je wel voor zorgen:

$x^2 + 8x - 12 = (x + 4)^2 - 16 - 12 = (x + 4)^2 - 28$.

Je kunt je antwoord natuurlijk even controleren:

$(x + 4)^2 - 28 = x^2 + 8x + 16 - 28 = x^2 + 8x - 12$.   Klopt!

Kortom: probeer de drieterm te schrijven als een kwadraat van een tweeterm.

Opdracht 3

Los op m.b.v. kwadraatafsplitsen:

a. $x^2 - 10x + 8 = 0$
b. $x^2 - 4x = 8$
c. $x^2 + 6x + 12 = 0$

Je kunt ook kwadraatafsplitsen als de coëfficiënt van de kwadratische term niet nul is. We zullen daar een voorbeeld van laten zien aan de hand van het functie voorschrift $y = -2x^2 + 8x - 11$

$y = -2x^2 + 8x - 11$
$y = -2(x^2 - 4x) - 11$
$y = -2((x-2)^2 - 4) - 11$
$y = -2(x-2)^2 + 8 - 11$
$y = -2(x-2)^2 - 3$

Deze laatste 'vorm' wordt wel 's de 'topformule' voor een parabool genoemd. Je kunt daarin de coördinaten van de top gemakkelijk aflezen.

In het algemeen:

- De top van $y = a(x - p)^2 + q$ is gelijk aan (p, q)

De coördinaten van de top van $y = -2x^2 + 8x - 11$ zijn $(2, -3)$.

Opdracht 4

Bereken met behulp van kwadraatafsplitsen de coördinaten van de top van:

a. $y = x^2 + 4x$
b. $y = -x^2 + 8x - 12$
c. $y = 4x^2 - 24x + 37$

Bij opdracht 11 van hoofdstuk 3 heb je tweedegraads vergelijking opgelost. Bijvoorbeeld deze:

$x^2 - 4x = 21$
$x^2 - 4x - 21 = 0$
$(x - 7)(x + 3) = 0$
$x=7$ of $x=-3$

Om te controleren of de gevonden oplossing kloppen kan je ze in de vergelijking invullen. Als het goed is dan zou het moeten kloppen! ☺

$(7)^2 - 4 \cdot 7 = 21$
$49 - 28 = 21$
Klopt!

$(-3)^2 - 4 \cdot -3 = 21$
$9 + 12 = 21$
Klopt!

Opdracht 5

- Controleer op dezelfde manier als de oplossingen van:

a.
Vergelijking: $x^2 - 4x = 8$
Oplossingen: $x = 2 - 2\sqrt{3}$ of $x = 2 + 2\sqrt{3}$

b.
Vergelijking: $3(2x - 3)^2 = 6$
Oplossingen: $x = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

De ABC-formule

Je kunt elke tweedegraads vergelijking schrijven in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$.

Volgens de ABC-formule zijn de oplossingen dan gelijk aan: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Je zou nu op dezelfde manier als bij opdracht 5 deze oplossingen kunnen controleren, maar dat gaan we (nu) niet doen. Maar 't zou kunnen.

Die notatie '$x_{1,2}$' staat voor de twee oplossingen x_1 en x_2. Maar het kan ook zijn dat er maar één of helemaal geen oplossing is. De notatie '$\pm$' is bijzonder, want het betekent 'plus **of** min'. Als er twee oplossingen zijn dan is dat bij de ene oplossing een 'min' en bij de andere een 'plus'.

Als $b^2 - 4ac = 0$ dan maakt het niet uit of je $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ of $+\sqrt{b^2 - 4ac}$ neemt. Je hebt dan maar één oplossing. Als nu $b^2 - 4ac < 0$ heb je geen oplossing. De wortel van een negatief getal bestaat immers niet. Als $b^2 - 4ac > 0$ dan maakt die 'min' of 'plus' wel verschil, dus twee oplossingen.

De uitdrukking $b^2 - 4ac$ noemen we de **discriminant**. Je kunt aan de discriminant dus al van te voren zien hoeveel oplossingen een kwadratische vergelijking heeft. De ABC-formule zou je ook in deze vorm kunnen schrijven:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Het kan handig zijn om eerst D uit te rekenen. Als D<0 ben je klaar: geen oplossing.

Je kunt de ABC-formule ook zo schrijven:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In het geval er maar één oplossing is dan moet die oplossing wel $x = \frac{-b}{2a}$ zijn.

Opdracht 6

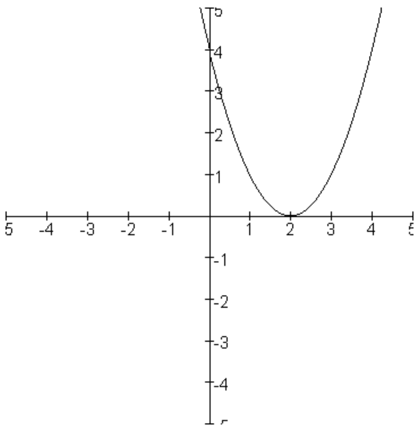
Los op:

a. $3x^2 - 4x + 1 = 0$
b. $2x^2 + 4x + 6 = 0$
c. $3x^2 - 8x + 2 = 0$
d. $6x^2 - 18 = 0$
e. $\frac{1}{2}x^2 - 4x = 0$
f. $6x^2 - 12x + 6 = 0$
g. $2x^2 - 12x + 16 = 0$
h. $x^3 - 4x^2 + 8x = 0$
i. Voor welke waarde van p heeft het volgende stelsel precies één oplossing?

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + p \\ y = x \end{cases}$$

Voorbeeld

We willen de vergelijking $x^2-4x+4=0$ oplossen. Ik teken eerst de grafiek van $y=x^2-4x+4$.



Voor welke waarde van 'x' geldt nu y=0?

Dat is voor x=2. Dat had je kunnen berekenen met de ABC-formule. $D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=16-16=0$.

Dus $x = \frac{-b}{2a} = \frac{--4}{2\cdot1} = \frac{4}{2} = 2$.

Het punt (2,0) ligt precies op de **symmetrieas** van de parabool. Dat is geen toeval. Als je de parabool snijdt met horizontale lijnen dan is er maar één lijn zodat je precies één snijpunt hebt. Dat is in dit geval de lijn y=0 en die lijn gaat dan precies door de **top** van de parabool. De top ligt op de symmetrieas. Als je twee snijpunten hebt dan liggen die twee punten symmetrisch ten opzichte van de lijn x=2.

De parabool $y=ax^2+bx+c$ heeft als symmetrieas $x = \frac{-b}{2a}$.

… dat kan je ook aan de ABC-formule zien.

Som en product van de oplossingen

Neem een tweedegraads vergelijking $ax^2+bx+c=0$ met twee oplossingen x_1 en x_2.

Opdracht 7

- Laat zien dat $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ en dat $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Afleiden van de ABC-formule

In schoolboeken komt de ABC-formule meestal uit de lucht vallen, maar zo gaat dat natuurlijk niet. Zou je de formule niet ‘gewoon’ zelf kunnen afleiden?

De ABC-formule is niets anders dan kwadraatafsplitsen van de algemene formule voor een kwadratische vergelijking.

Opdracht 8

Vul in:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$(x+\ldots)^2-\ldots+\frac{c}{a}=0$$

$$(x+\ldots)^2+\ldots=0$$

$$(x+\ldots)^2=\ldots$$

$$x+\ldots=\pm\sqrt{\ldots}$$

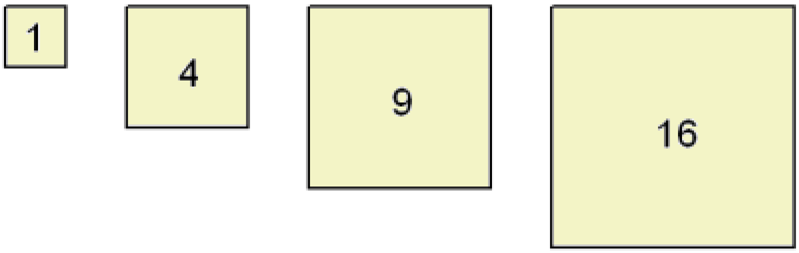
$$x=\ldots\pm\sqrt{\ldots.}$$

$$x=\ldots\pm\frac{\sqrt{\ldots}}{\ldots}$$

$$x=\frac{\ldots\pm\sqrt{\ldots}}{\ldots}$$

Hoofdstuk 5 – Wortels en machten

De oppervlakte van een vierkant is 4, wat is dan de lengte van de zijde? En als de oppervlakte 9 is of 16? En bij 100? Of 10.000?



Dat lukt (hoop ik) allemaal nog wel, maar als de oppervlakte nu is 2 is? Of 3? Of 5? Wat is dan de zijde?

Een vierkant met een oppervlakte van 2.

Een vierkant met een oppervlakte van 2 heeft als lengte van een zijde een waarde die ligt tussen 1 en 2. Als eerste benadering zou je 1,5 kunnen nemen. $1{,}5^2=2{,}25$, dus 1,5 is aan de grote kant. Laten we dan maar 1,25 nemen. $1{,}25^2=1{,}5625$ en dat is weer aan de kleine kant. We nemen 1,375. De oppervlakte is dan 1,890625. Dat is nog steeds aan de krappe kant. We nemen 1,4375. $1{,}4375^2=2{,}06640625$. We zitten er minder dan 0,07 naast…

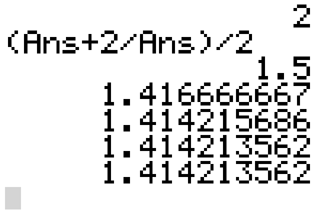
Je kunt hier nog wel een tijdje mee doorgaan. Elke ‘slag’ levert een nauwkeuriger benadering voor ‘dat getal dat in het kwadraat 2 is’. Bij elke slag een decimaal erbij…

Maar hoeveel decimalen je ook neemt je zult toch nooit precies op 2 uitkomen.

```
1,4142135624
1,4142135624 x
-------------
56568542496
          0
        ...
        ...
        ...
        ...
        ...
        ...
        ...
        ...  +
-------------
       ...6
```

Om dit getal ‘handig’ op te schrijven gebruiken we **wortels**. Het (positieve) getal dat in het kwadraat precies 2 oplevert noteren we als $\sqrt{2}$.

Nog zoiets…



Zet in je GR het getal **2** en toets **ENTER**.
Typ dan **(Ans+2/Ans)/2** en toets **ENTER**.
Toets nu nog een aantal keren **ENTER** tot het getal niet meer verandert.

- Welk getal krijg je uiteindelijk?

Opdracht 1

Als het getal niet meer verandert dan geldt de vergelijking $x = \dfrac{x + \frac{2}{x}}{2}$

- Ga na dat deze vergelijking juist is en los de vergelijking op.

Rekenen met wortels

Met wortels kan je ook rekenen. Je zou je af kunnen vragen of je wortels kan optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen, … Daarnaast is het gebruikelijk om wortels zo eenvoudig mogelijk te schrijven, geen breuken onder het wortelteken te laten staan en bij breuken geen wortels in de noemer te laten staan.

Kwadraten van wortels

Het kwadraat van een wortel van een natuurlijk getal is altijd een geheel getal.

$$\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot 3 = 12$$

Herleiden van wortels

In bovenstaand voorbeeld kan je al zien dat $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$. Het is gebruikelijk een wortel zo veel mogelijk te vereenvoudigen. Je schrijft meestal niet $\sqrt{12}$ maar $2\sqrt{3}$.

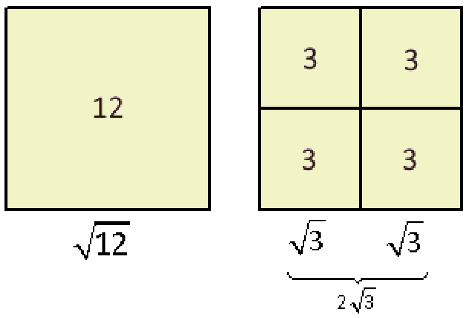
$$\sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$$
$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}$$

Je kunt dit doen door te kijken of je getal onder het wortelteken kan delen door een kwadraat. Zo ja, neem dan het grootste kwadraat. Als je het even niet ziet kan je ook het getal onder het wortelteken ontbinden in priemfactoren.

$$\sqrt{128} = \sqrt{2^7} = \sqrt{2^6 \cdot 2} = 2^3 \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$
$$\sqrt{150} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} = 5\sqrt{6}$$

Opdracht 2

Vereenvoudig: $\sqrt{648}$



Wortels vermenigvuldigen

In het algemeen: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ en $a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d} = a \cdot c \cdot \sqrt{b \cdot d}$

Opdracht 3

Bereken en vereenvoudig: $2\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{14}$

Wortels delen

In het algemeen: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ en $\dfrac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}} = \dfrac{a}{c} \cdot \sqrt{\dfrac{b}{d}}$

Opdracht 4

Bereken en vereenvoudig: $\dfrac{12\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$ en $\dfrac{15\sqrt{32}}{5\sqrt{2}}$

Optellen en aftrekken van wortels

Wortels kun je (meestal) **niet** optellen of aftrekken. Het is dus niet mogelijk om $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ korter of handiger op te schrijven. Ook bij $2 + \sqrt{3}$ gaat dat niet. Je kunt alleen **gelijksoortige wortels** optellen en aftrekken.

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{5} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$
$$\sqrt{150} + \sqrt{54} = 5\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$$

Opdracht 5

Bereken (indien mogelijk): $\sqrt{270}+\sqrt{1470}$

Wortels van breuken

Het is niet gebruikelijk om breuken onder het wortelteken te laten staan. Soms zijn wortels van breuken gewoon breuken, maar soms ook niet.

$$\sqrt{20\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{4\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{17}$$

Opdracht 6

Bereken: $\sqrt{29\frac{4}{25}}$

Wortels in de noemer wegwerken

Het is niet gebruikelijk om wortels in de noemer te laten staan. Je kunt wortels in de noemer wegwerken door teller en noemer met de ‘juiste’ wortel te vermenigvuldigen.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{5}{2\sqrt{2}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}=1\frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{12}=\frac{1}{6}\sqrt{6}$$

Opdracht 7

Bereken: $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ en $\frac{64\sqrt{12}}{16\sqrt{3}}$

Wortels en machten

Als je machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigt dan tel je de exponenten op.

$$a^3 \cdot a^6 = a^9$$

De afspraak is dat je 2^1 kunt opvatten als 2.

Je kunt $\sqrt{2}$ ook opvatten als een macht van 2. Maar dan moet wel gelden: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ en $2^{\cdots} \cdot 2^{\cdots} = 2^1$

Het kan niet anders zijn dan dat $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. Op dezelfde manier is $\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$.

Dus: $\sqrt[a]{b^c} = b^{\frac{c}{a}}$

In het algemeen is het niet gebruikelijk om gebroken en/of negatieve exponenten te laten staan. Dus schrijf liever niet $y = 5x^{-\frac{2}{3}}$ maar $y = \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$ of $y = \frac{5\sqrt[3]{x}}{x}$

Opdracht 8

Schrijf zonder gebroken en/of negatieve exponenten: $y = 2x^{-\frac{3}{5}}$

Wortelvergelijkingen

Om vergelijkingen op te lossen waarin wortels voor komen ga je meestal (op het goede moment) **kwadrateren** waarbij je dan achteraf de oplossingen **controleert**. Dit laatste is belangrijk omdat je bij het kwadrateren mogelijk oplossingen 'creëert' die toch niet aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen.

Om de vergelijking $\sqrt{x^2 + 15} = 4x$ op te lossen zou je links en rechts kunnen kwadrateren:

$$\sqrt{x^2 + 15} = 4x$$
$$x^2 + 15 = 16x^2$$
$$15x^2 = 15$$
$$x^2 = 1$$
$$x = -1 \text{ of } x = 1$$

Maar dat klopt **niet**: x = -1 is **geen** oplossing van de vergelijking. Vul maar in!
Hoe komt dat? Je kunt door het kwadrateren van onware beweringen ware beweringen maken:

-2 is niet gelijk aan 2
Maar $(-2)^2$ is wel gelijk aan 2^2.

Voorbeeld

$$\sqrt{2x-5}=1+\sqrt{x+3}$$

$$\left(\sqrt{2x-5}\right)^2=\left(1+\sqrt{x+3}\right)^2$$

$$2x-5=1+2\sqrt{x+3}+x+3$$

$$x-9=2\sqrt{x+3}$$

$$(x-9)^2=\left(2\sqrt{x+3}\right)^2$$

$$x^2-18x+81=4(x+3)$$

$$x^2-18x+81=4x+12$$

$$x^2-22x+69=0$$

...

$x=11-2\sqrt{13}$ of $x=11+2\sqrt{13}$

Controleren!

Alleen $x=11+2\sqrt{13}$ voldoet.

Maar hoe controleer je dat nu **handig**? Invullen?

$$\sqrt{2\left(11-2\sqrt{13}\right)-5}=1+\sqrt{\left(11-2\sqrt{13}\right)+3}\ ?$$

Opdracht 9

Ga na dat $x=11-2\sqrt{13}$ geen oplossing kan zijn van de vergelijking uit het voorbeeld.

Opdracht 10

Los op:

a. $\sqrt{4-2x}=\sqrt{x-2}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x-2}$

c. $\sqrt{x^2-4}=x+4$

d. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}=\sqrt{x-5}$

U hebt gezocht op het woord: **wortel**.

RESULTAAT (max 20 woorden)

wor·tel *de; m* 1 *-s, -en* deel vd plant dat in de grond dringt en water opzuigt: *~ schietena*wortels krijgen; *b)* inburgeren 2 *-s, -en* oorzaak 3 *-s, -en* naam van planten die gekweekt worden wegens de eetbare wortels; peen: *we eten ~tjes vanmiddag* 4 *-s (rekenk)* het getal dat men krijgt door een gegeven getal in een bep. aantal gelijke factoren te ontbinden: *de ~ van 64 is 8* 5 *-s (in het mv)* afstamming, herkomst

wor·te·len *wortelde, h, i geworteld* wortel schieten, hebben: *(fig) de haat is diep geworteld in zijn hart*

Hoofdstuk 6 – logaritmen

We zagen al eerder dat je bij het vermenigvuldigen van machten met gelijk grondtal de exponenten op mag tellen. Dat is bijzonder, want als je bij een willekeurige vermenigvuldiging de getallen zou kunnen schrijven als machten van bijvoorbeeld 2 dan zou je de exponenten kunnen optellen. Je zou dus kunnen 'vermenigvuldigen door op te tellen'.

<table>
<tr>
<td>Logaritmen zijn uitgevonden om makkelijker te kunnen vermenigvuldigen. Stel je maar eens voor: ik maak een lijstje met de machten van 2 (zie rechts). Het is niet zo moeilijk om dit lijstje verder uit te breiden.

Nu wil ik berekenen 16×8
Ik kijk in mijn lijstje en zie dat:
$16 = 2^4$ en $8 = 2^3$, dus: $16 \times 8 = 2^4 \times 2^3 = 2^7 = 128$

Dat is bijzonder! Ik kan dus nu vermenigvuldigen door op te tellen. Optellen is veel makkelijker dan vermenigvuldigen. Zou dat niet handig zijn?</td>
<td>$2^2=4$
$2^3=8$
$2^4=16$
$2^5=32$
$2^6=64$
$2^7=128$
$2^8=256$
$2^9=512$
$2^{10}=1024$
$2^{11}=2048$
Enz...</td>
</tr>
</table>

Opdracht 1

Bereken op dezelfde manier:

a. $4 \times 32 =$
b. $2048 : 64 =$
c. $\sqrt{256} =$

Dat lijkt misschien handig maar niet alle getallen zijn op een eenvoudige manier te schrijven als machten van 2. Je zou dan voor 'alle getallen' lijsten moeten gaan maken... In tabellenboekjes (en je GR) kan je logaritmentafels vinden met **grondtal 10**. Deze getallen noemen **logaritmen**.

$$^{g}\log(a) = b \Leftrightarrow a = g^{b}$$

Voor $a > 0$, $a \neq 1$ en $b > 0$

Opdracht 2

Bereken x:

a. $^{2}\log(x) = -2$

b. $^{x}\log(256) = 4$

c. $^{5}\log\left(\frac{1}{125}\right) = x$

Logaritmen met grondtal 10

Hieronder zie je gedeelte van een logaritmetafel uit een tabellenboekje:

1000–1500 **log x**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
100	0000	04	09	13	17	22	26	30	35	39	**100**
101	0043	48	52	56	60	65	69	73	77	82	101
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	102
103	0128	33	37	41	45	49	54	58	62	66	103
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	104
105	0212	16	20	24	28	33	37	41	45	49	105
106	0253	57	61	65	69	73	78	82	86	90	106
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	107
108	0334	38	42	46	50	54	58	62	66	70	108
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	109
110	0414	18	22	26	30	34	38	41	45	49	**110**
111	0453	57	61	65	69	73	77	81	84	88	111
112	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527	112
113	0531	35	38	42	46	50	54	58	61	65	113
114	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603	114
115	0607	11	15	18	22	26	30	33	37	41	115
116	0645	48	52	56	60	63	67	71	74	78	116
117	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715	117
118	0719	22	26	30	34	37	41	45	48	52	118
119	0755	59	63	66	70	74	77	81	85	88	119
120	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824	**120**
121	0828	31	35	39	42	46	49	53	56	60	121
122	0864	67	71	74	78	81	85	88	92	96	122
123	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931	123
124	0934	38	41	45	48	52	55	59	62	66	124
125	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000	125
126	1004	07	11	14	17	21	24	28	31	35	126
127	1038	41	45	48	52	55	59	62	65	69	127
128	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103	128
129	1106	09	13	16	19	23	26	29	33	36	129
130	1139	43	46	49	53	56	59	63	66	69	**130**
131	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202	131
132	1206	09	12	16	19	22	25	29	32	35	132
133	1239	42	45	48	52	55	58	61	65	68	133
134	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300	134
135	1303	07	10	13	16	19	23	26	29	32	135
136	1335	39	42	45	48	51	55	58	61	64	136
137	1367	70	74	77	80	83	86	89	92	96	137
138	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427	138
139	1430	33	36	40	43	46	49	52	55	58	139
140	1461	64	67	71	74	77	80	83	86	89	**140**
141	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520	141
142	1523	26	29	32	35	38	41	44	47	50	142
143	1553	56	59	62	65	69	72	75	78	81	143
144	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611	144
145	1614	17	20	23	26	29	32	35	38	41	145
146	1644	47	49	52	55	58	61	64	67	70	146
147	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	147
148	1703	06	08	11	14	17	20	23	26	29	148
149	1732	35	38	41	44	46	49	52	55	58	149
150	1761	64	67	70	72	75	78	81	84	87	**150**
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x

4

Je ziet hier 'mantissen van logaritmen' van 1000-1500. Je schrijft log x (zonder grondtal) als je logaritmen met het grondtal 10 bedoelt. Op de pagina hierboven kan je dus de logaritmen vinden van de getallen 1000 t/m 1500 met 10 als grondtal.

Opdracht 3

a. Bepaal met behulp van de logaritmetabel de waarde van log(1087).
b. Bepaal met behulp van de tafel de waarde van log(10,23)
c. Voor welke waarde van n geldt $\log(n) \approx 3{,}0913$
d. Bepaal de waarde van x als log(x) = 2,0913

Je kunt met de tafel niet alleen logaritmen vinden van getallen tussen 1000 en 1500. Bekijk onderstaand lijstje:

- $\log(1150) \approx 3{,}0607$
- $\log(115) \approx 2{,}0607$
- $\log(11{,}5) \approx 1{,}0607$
- $\log(1{,}15) \approx 0{,}0607$

Je ziet dat het gedeelte achter de komma steeds hetzelfde is. Dat deel noemen we de **mantisse**. Het getal voor de komma bepaalt de 'grootte' van het getal… niet de cijfers…☺

Je kunt nu met de tafel bijvoorbeeld berekenen $11{,}5 \times 1{,}15$. Dat gaat zo:

Bepaal log(11,5) en log(1,15). Tel die op en zoek in de tafel de macht van 10.

- log(11,5) + log(1,15) = 1,0607 + 0,0607 = 1,1214
- $1{,}1214 \rightarrow 13{,}225$
- Conclusie: $11{,}5 \times 1{,}15 = 13{,}225$

Met de tafel kun je vermenigvuldigen door op te tellen.

Opdracht 4

Bereken met behulp van de logaritmetafel:

a. 14 : 12
b. $\sqrt{147}$

$$^{g}\log(a \cdot b) = {}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b)$$

Voor $a > 0$ en $b > 0$

Rekenregels voor logaritmen

Hiernaast zie je een aantal rekenregels voor logaritmen staan. L0 en L1 hebben hierboven al gezien.

Logaritmen

L0.
$^{a}\log(b) + {}^{a}\log(c) = {}^{a}\log(b \cdot c)$

L1.
$^{a}\log b = c \Leftrightarrow a^{c} = b$
$(a>0$ en $a \neq 1$ en $b>0)$

L2.
$^{a}\log b = \frac{\log b}{\log a}$
(zie *)

L3.
$^{a}\log b^{p} = p \cdot {}^{a}\log b$

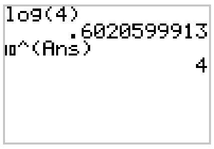
L4.
$a^{{}^{a}\log(b)} = b$

*)
L2 (uitgebreid).
$^{a}\log b = \frac{{}^{g}\log b}{{}^{g}\log a}$
$(g>0)$

Opdracht 5

- Probeer L2, L3 en L4 te **bewijzen**.

De rekenregel ${}^{a}\log(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$ is een regel die je vaak nodig zult hebben. Op je GR heb je de beschikking over een logaritme tafel. Als je **log(4)** intikt dan krijg je de logaritme van 4 bij het grondtal 10. De uitkomst is de exponent om 4 als een macht van 10 te schrijven. Dit kan je makkelijk controleren:



Klopt precies…:-)

Maar je kunt voor elk willekeurig grondtal logaritmen uitrekenen ($g>0$ en $g\neq 1$), dus ook met het grondtal $g=3$ of $g=\frac{1}{2}$.

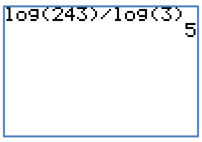
Opdracht 6

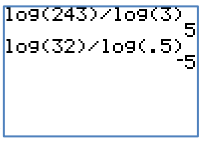
Bereken:

a. ${}^{3}\log(243)$

b. ${}^{\frac{1}{2}}\log(32)$

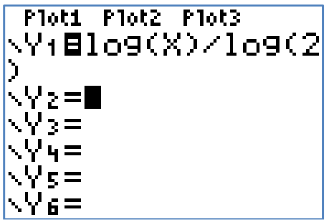
Nu zou je denken dat je met je GR ook in één keer ${}^{3}\log(123)$ of ${}^{\frac{1}{2}}\log(32)$ kunt berekenen. Maar helaas… op je GR heb je alleen **log()** en **ln()** maar verder niet. Om toch ook logaritmen te kunnen gebruiken met een ander grondtal (bij berekeningen maar ook bij het plotten) is de regel ${}^{a}\log(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$ nodig.

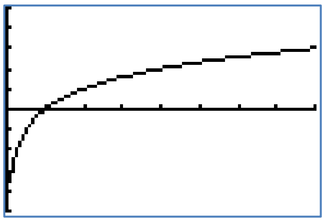
${}^{3}\log(243) = \frac{\log(243)}{\log(3)} \rightarrow$ 

of ${}^{\frac{1}{2}}\log(32) = \frac{\log(32)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} \rightarrow$ 

LET OP: dezelfde regel gebruik voor het plotten van functies met logaritmen.

Om (bijvoorbeeld) de grafiek te plotten van $f(x) = {}^{2}\log(x)$ maak je ook gebruik van deze regel.





Opdracht 7

- Benader met je GR de coördinaten van de snijpunten van $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = 2^{x} - 3$ op 1 decimaal nauwkeurig.

Opdracht 8

Bereken uit het hoofd (en controleer je antwoorden met je GR):

a. ${}^{2}\log(8) + {}^{4}\log(16) =$

b. ${}^{0,5}\log(32) \cdot {}^{2}\log(32) =$

Opdracht 9

Benader met je GR op 3 decimalen nauwkeurig:

a. ${}^{2}\log(6)$

b. ${}^{3}\log(6)$

c. $\log(6)$

Opdracht 10

- Bepaal met je GR het snijpunt van $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$.
- Geef het snijpunt met de x-as van $h(x) = {}^{g}\log(x)$.
- Heeft de grafiek van $h(x) = {}^{g}\log(x)$ asymptoten? (Leg uit)

The ark lands after The Flood. Noah lets all the animals out. Says,"Go and multiply." Several months pass. Noah decides to check up on the animals. All are doing fine except a pair of snakes. "What's the problem?" says Noah. "Cut down some trees and let us live there", say the snakes. Noah follows their advice. Several more weeks pass. Noah checks on the snakes again. Lots of little snakes, everybody is happy. Noah asks,"Want to tell me how the trees helped?" "Certainly", say the snakes. "We're adders, and we need logs to multiply."

Hoofdstuk 7 – Het oplossen van vergelijkingen

In dit laatste hoofdstuk gaan we ons bezig houden met het oplossen van vergelijkingen.

- Eenvoudige (lineaire) vergelijkingen
- Tweedegraadsvergelijkingen
- Derdegraadsvergelijkingen of hoger…
- Gebroken vergelijkingen
- Wortelvergelijkingen
- Exponentiele en logaritmische vergelijkingen
- Goniometrische vergelijkingen
- Wel of niet oplosbaar?

Opdracht 1

Geef bij elk van onderstaande vergelijkingen (indien mogelijk) de categorie (zie boven) waartoe de vergelijking behoort en los de vergelijking op (indien mogelijk):

a. $\frac{1}{1+x} = 2x+3$

b. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c. $\sqrt{3x} - \sqrt{x-1} = 1$

d. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2t-1} = 256\sqrt{2}$

e. $(5x-1)^2 - (x-5)^2 = 12$

f. ${}^2\log(x-1) + 1 = {}^4\log(x^2+1)$

g. $|x-1| + |x+1| = 2$

h. $\sin x = \cos x$

i. ${}^3\log\left(2x^2-3\right) = 6$

Eenvoudige (lineaire) vergelijkingen

Eenvoudige lineaire vergelijkingen zijn vergelijkingen waarbij de variabele wordt vermenigvuldigd, waarbij er termen worden opgeteld. Vergelijkingen als x+3=4x-2 of 4x-16=0 laten zich eenvoudig oplossen. Dit soort vergelijkingen kan ook andere uitdrukkingen bevatten waarbij je zou kunnen zeggen dat je te maken met een lineaire vergelijking van ‘één of andere uitdrukking’.

Voorbeelden

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $\sqrt{x}+3=4\sqrt{x}-2$ of $4\cdot 2^{x-1}-16=0$. Deze vergelijkingen laten zich (vrijwel) op dezelfde manier oplossen als x + 3 = 4x - 2 en 7x – 12 = 0.

$\sqrt{x}+3=4\sqrt{x}-2$

$3=3\sqrt{x}-2$

$5=3\sqrt{x}$

$\sqrt{x}=1\frac{2}{3}$

$x=2\frac{7}{9}$

$4\cdot 2^{x-1}-16=0$

$4\cdot 2^{x-1}=16$

$2^{x-1}=4$

$x-1=2$

$x=3$

Opdracht 2

Los op:

a. $3\cdot {}^{2}\log(x)=0$

b. $\sin x+\frac{1}{2}\sqrt{3}=2\sin x$

Tweedegraadsvergelijkingen

In **hoofdstuk 3** kan je er van alles over vinden. Er zijn verschillende methoden die allemaal zo zijn voor- en nadelen hebben. De ‘kunst’ is om er achter te komen welke methode wanneer het handigst is. Je kunt nog ’s kijken naar **opdracht 6** van hoofdstuk 3.

Opdracht 3

a. $\left(\frac{4}{x}-1\right)^2=25$

b. $\sin^2 x-2\sin x+1=0$

c. $7\sqrt{x}-x=12$

Derdegraadsvergelijkingen

De algemene vorm van een derdegraadsvergelijking is $ax^3+bx^2+cx+d=0$ waarbij a≠0.

In 1545 verscheen een uitgebreid boek over Algebra geschreven door *Girolamo Cardano*. In dit boek “Ars Magna” beschrijft *Cardano* onder andere een methode om derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3+px+q=0$ op te lossen. *Cardano* heeft deze oplosmethode echter niet bedacht. Dat waren *Scipione del Ferro* en *Nicolo Tartaglia*. *Cardano* was wel de eerste die deze methode publiceerde, tot grote ergernis van *Tartaglia*.

Het oplossen van derdegraads vergelijkingen is een favoriet onderwerp voor profielwerkstukken. Je moet maar 's in google intikken 'derdegraads vergelijkingen oplossen'. De **formule van Cardano** kan je in vele vormen tegen komen. In de werkruimte bij deze cursus staat "abcd-formule?" van Mieke Janssen in het kader van een Master Thesis Project onder begeleiding van Prof. Dr. F.J. Keune. Je moet maar 's kijken.

Naar aanleiding van alle verwarring heb ik zelf voor een soort van praktische aanpak gekozen. Je hoeft dat niet te kennen en je moet het zeker niet proberen te begrijpen… en ook niet uit je hoofd gaan leren, maar 't werkt wel…☺

De vergelijking $ax^3+bx^2+cx+d=0$ met a≠0 heeft als **een** oplossing:

$$p=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}$$
$$q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}$$
$$W=\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}$$
$$x=\sqrt[3]{\frac{-q+W}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-W}{2}}-\frac{b}{3a}$$

Je berekent eerste p, q en W en deze waarden invullen in de laatste uitdrukking geeft je dan een oplossing van de vergelijking. Dat is al een heel 'gedoe' en als dat allemaal goed gaat dan heb je slechts één oplossing van mogelijk 3 oplossingen.

Voorbeeld

We willen de vergelijking $x^3-12x^2+45x-50=0$ oplossen. Met de 'aanpak' hierboven geeft dit:

$$x^3-12x^2+45x-50=0$$
$$a=1,\ b=-12,\ c=45 \text{ en } d=-50$$
$$p=\frac{45}{1}-\frac{(-12)^2}{3\cdot 1^2}=45-48=-3$$
$$q=\frac{2\cdot(-12)^3}{27\cdot 1^3}-\frac{-12\cdot 45}{3\cdot 1^2}+\frac{-50}{1}=-128+180-50=2$$
$$W=\sqrt{2^2+\frac{4}{27}\cdot(-3)^3}=\sqrt{4-4}=0$$
$$x=\sqrt[3]{\frac{-2+0}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-2-0}{2}}-\frac{-12}{3\cdot 1}=\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{-1}+4=2$$

We stellen vast dat x=2 in ieder geval een oplossing is van de vergelijking.

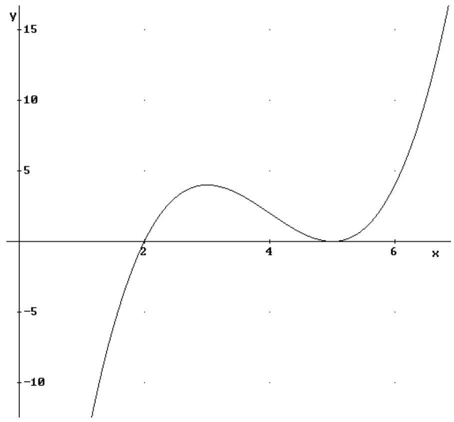
Maar als x=2 een oplossing is van de vergelijking $x^3-12x^2+45x-50=0$ dan moet je de vergelijking kunnen schrijven als. $(x-2)(.......)=0$. Op de puntjes zou dan een tweedegraads uitdrukking moeten komen staan. Als die uitdrukking ook nul kan zijn krijg je een tweedegraadsvergelijking die je op kan lossen.

Om (eventueel) andere oplossingen te vinden zou je een staartdeling kunnen maken. Dat gaat zo:

$$
\begin{array}{l}
x-2 / x^3-12x^2+45x-50 \setminus x^2-10x+25 \\
\quad x^3-2x^2 \\
\qquad -10x^2+45x-50 \\
\qquad -10x^2+20x \\
\qquad\qquad 25x-50 \\
\qquad\qquad 25x-50 \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

We zien:

$$
\begin{aligned}
&x^3-12x^2+45x-50=0 \\
&(x-2)\left(x^2-10x+25\right)=0 \\
&x-2=0 \vee x^2-10x+25=0 \\
&x=2 \vee (x-5)^2=0 \\
&x=2 \vee x=5
\end{aligned}
$$



Je zou misschien drie oplossingen verwachten, maar het zijn er twee deze keer. Bij een derdegraads vergelijking heb je één, twee of drie oplossingen, maar er is **altijd minstens één** oplossing!

In de praktijk is het handiger om eerst even snel te controleren of 1 of -1 oplossingen zijn. Als x=1 een oplossing is dan is de som van de coëfficiënten gelijk aan nul. Als x=-1 een oplossing is dan is de som van de coëfficiënten met om en om het tegengestelde gelijk aan nul.

Voorbeelden

- x=1 is een oplossing van $x^3+2x^2+9x-12=0$ want 1 + 2 + 9 – 12 = 0
- x=-1 is een oplossing van $x^3+4x^2+15x+12=0$ want 1 – 4 + 15 – 12 = 0

Daarnaast is het handig om te kijken of x=2 of x= -2 een oplossing is. Is dat allemaal niet het geval… dan… zou je **de formule van Cardano** kunnen gebruiken.

TIP: met je grafische rekenmachine kan je ‘mooie oplossingen’ ook snel vinden.

Opdracht 4

Los exact op:

a. $x^3+4x^2+15x+12=0$

b. $x^3-3x^2-22x+24=0$

c. $x^3-3x^2-4x+12=0$

d. $x^3+2x^2-9x-18=0$

Vierde-, vijfde-, zesde-,… graads vergelijkingen

Voor vergelijkingen van graad vier is nog net een algemene oplossing te geven. We zullen het er hier niet over hebben. Voor wat betreft vergelijkingen van graad 5 of hoger:

> “Het duurde even voor men er achter kwam dat er voor vijfdegraadsvergelijking geen algemene oplossing bestaat over de rationele getallen in termen van radicalen. Paolo Ruffini leverde in 1799 al een nog niet helemaal correct bewijs, maar omdat hij daarbij toen nog ongebruikelijke groepentheoretische redeneringen gebruikte, werd zijn bewijs niet begrepen of geaccepteerd. Een correct bewijs werd door Abel geleverd. Dit resultaat staat bekend als de stelling van Abel-Ruffini. Voor het eerst gepubliceerd in 1824 is het een van de eerste toepassingen van de groepentheorie in de algebra. De stellling geldt ook voor vergelijkingen van hogere graden.”
>
> Uit: http://nl.wikipedia.org/wiki/Vijfdegraadsvergelijking

Maar dat betekent natuurlijk niet dat je geen enkele vergelijking met hogere machten op zou kunnen lossen:-)

Gebroken vergelijkingen

Bij gebroken vergelijkingen maak je vaak gebruik van kruislings vermenigvuldigen. Soms moet je de breuken gelijknamig te maken.

Voorbeelden

I.

$$\frac{a+7}{2a-4}=5$$

$$a+7=5(2a-4)$$

$$a+7=10a-20$$

$$9a=27$$

$$a=3$$

II.

$$\frac{x}{x+1}=\frac{3}{x-1}$$

$$x(x-1)=3(x+1)$$

$$x^2-x=3x+3$$

$$x^2-4x-3=0$$

$$(x-2)^2-7=0$$

$$x=2-\sqrt{7} \text{ of } x=2+\sqrt{7}$$

III.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x^2-1}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}+\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x^2-1}$$

$$\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x^2-1}$$

$$\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x^2-1}$$

$$x=\frac{1}{2}$$

Opdracht 5

Los exact op:

a. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^3}$

b. $\frac{2x}{x-3}=\frac{2x-1}{x}$

Wortelvergelijkingen

In **hoofdstuk 5** heb je een aantal voorbeelden gezien van wortelvergelijkingen. Het was ‘zaak’ om de wortels weg te werken door middel van kwadrateren. Daarna is het wel van belang om de oplossingen te controleren.

Exponentiele en logaritmische vergelijkingen

Op de ‘oude’ formulekaart stonden een aantal oplossingen voor standaard vergelijkingen. Hieronder zie je staan met van elk een voorbeeld:

$x^n = c \Rightarrow x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$

Voorbeeld:
$x^5 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[5]{6}$

$g^x = a \Rightarrow x = {}^g\log a = \frac{\log a}{\log g}$

Voorbeeld:
$2^x = 6 \Rightarrow x = {}^2\log 6$

${}^g\log x = b \Rightarrow x = g^b$

Voorbeeld:
${}^3\log x = 2 \Rightarrow x = 3^2 = 9$

Deze standaardoplossingen gebruik je onder andere bij het oplossen van exponentiele en logaritmische vergelijkingen als hieronder.

$${}^3\log\left(2x^2-3\right)=2$$
$$2x^2-3=3^2$$
$$2x^2-3=9$$
$$2x^2=12$$
$$x^2=6$$
$$x=-\sqrt{6} \text{ of } x=\sqrt{6}$$

$$7^{2x+5}=8$$
$$2x+5={}^7\log(8)$$
$$2x={}^7\log(8)-5$$
$$x=\frac{1}{2}\cdot{}^7\log(8)-2\frac{1}{2}$$

Opdracht 6

Los exact op:

a. $2^x = 4^{4x+6}$

b. $\left(\frac{1}{10}\right)^{2x} - 100^{x^2-2} = 0$

c. ${}^2\log(x) = {}^4\log(4x+6) - 2$

d. ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4x}\right) = {}^4\log(x)$

Bij de vergelijkingen van **opdracht 6** maak je (als het goed is) gebruik van de volgende eigenschappen:

Als $a^b = a^c$ dan $b = c$

Als ${}^g\log(a) = {}^g\log(b)$ dan $a = b$

Maar is dat wel juist? Klopt dat altijd? Hoe komt dat precies?

Goniometrische vergelijkingen

Je hebt (op de vorige bladzijde) gezien dat als (bijvoorbeeld) ${}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(b)$ dan is a=b. Nu zou je denken dat 'zoiets' de normaalste zaak van de wereld is, maar dat is niet het geval.

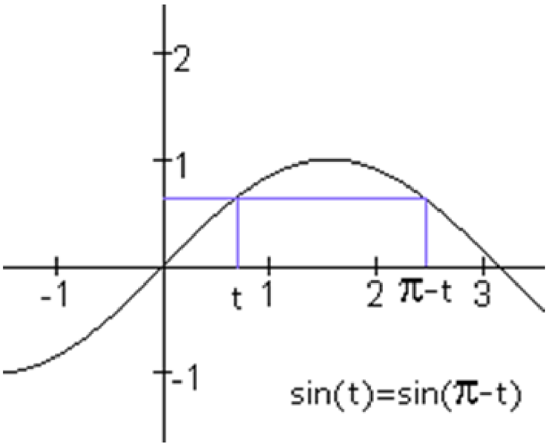
Als $a^2 = b^2$ dan geldt niet 'automatisch' dat a = b. Als a = 2 en b = -2 dan is wel $a^2 = b^2$ maar $a \neq b$. In dit geval zou je moeten zeggen:

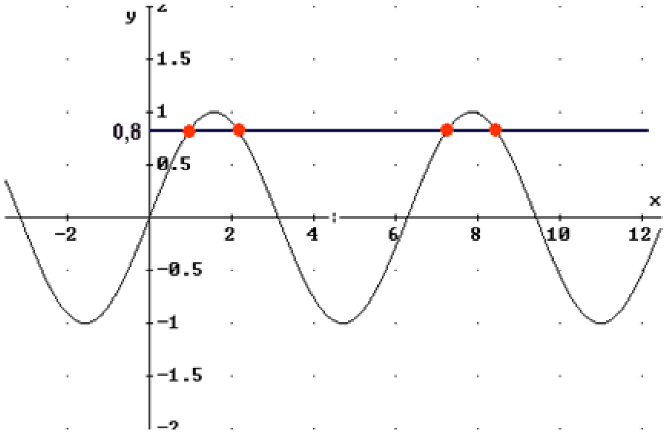
- Als $a^2 = b^2$ dan a = b of a = -b.

Bij goniometrische functies is het nog veel 'doller':

- Als sin(a) = sin(b) dan $a = b + k \cdot 2\pi$ of $a = \pi - b + k \cdot 2\pi$

Je kunt daarbij denken aan het volgende plaatjes:





Hoofdregels

$\sin\alpha = \sin\beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\cdot 2\pi \vee \alpha = \pi - \beta + k\cdot 2\pi$

$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\cdot 2\pi \vee \alpha = -\beta + k\cdot 2\pi$

$\tan\alpha = \tan\beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\cdot \pi$

Opdracht 7

Los op:

a. $\sin\alpha = 1$

b. $\cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

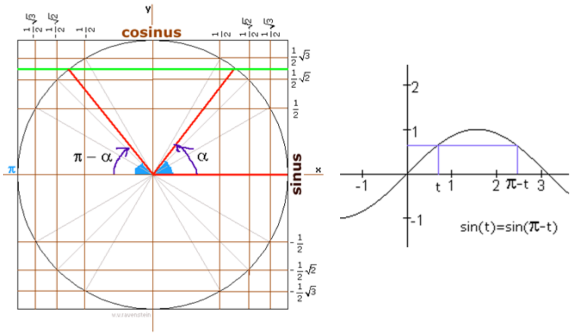
c. $\tan\gamma = 1$

d. $2 \cdot \cos\alpha = 1$

e. $\sin\alpha = \cos\alpha$

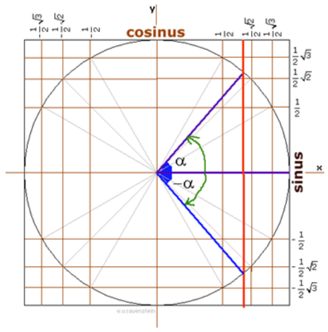
f. $\cos\alpha = \tan\alpha$

sinα= sinβ



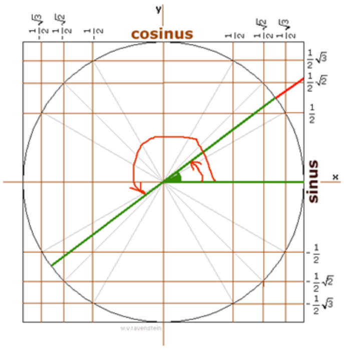
$$\alpha = \beta + k \cdot 2\pi \vee \alpha = \pi - \beta + k \cdot 2\pi$$

cosα= cosβ



$$\alpha = \beta + k \cdot 2\pi \vee \alpha = -\beta + k \cdot 2\pi$$

tanα= tanβ



$$\alpha = \beta + k \cdot \pi$$

Voorbeeld

$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha)$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Volgens de hoofdregel:} \\ \sin\alpha = \sin\beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\cdot 2\pi \vee \alpha = \pi - \beta + k \cdot 2\pi\end{array}}$

$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha)$

$\sin\alpha = \sin\beta \Rightarrow \alpha = \beta + k \cdot 2\pi \vee \alpha = \pi - \beta + k \cdot 2\pi$

$2\alpha = \alpha + k \cdot 2\pi$ of $2\alpha = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi$

Als je die stap gemaakt hebt volgt de rest op deze manier:

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha)$$
$$2\alpha = \alpha + k\cdot 2\pi \text{ of } 2\alpha = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi$$
$$\alpha = k \cdot 2\pi \text{ of } 3\alpha = \pi + k \cdot 2\pi$$
$$\alpha = k \cdot 2\pi \text{ of } \alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Opdracht 8

Los op:

a. $\sin 3\alpha = \sin 2\alpha$

b. $\cos\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$

c. $\tan\alpha = \tan 2\alpha$

EINDE