Taal van de wiskunde 3

Willem van Ravenstein

bijgewerkt in december 2010

Voorwoord

Het doel van het wiskundeonderwijs is het leren beheersen van de taal van de wiskunde en het zinvol leren inzetten van de instrumenten van de wiskunde."

Uit "Standpunt van de Resonansgroep wiskunde ten aanzien van de wiskundevoorstellen havo en vwo voor 2007 en later" 13 november 2007

De leerling leert passende wiskundetaal te gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen en leert de wiskundetaal van anderen te begrijpen.

Taakgroep vernieuwing basisvorming, juni 2004

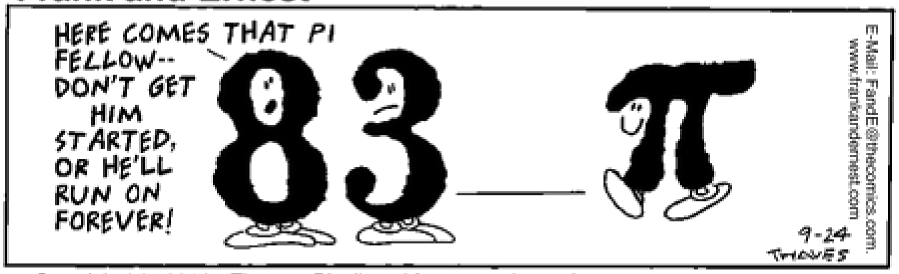
Inhoudsopgave

Laatst bijgewerkt op dinsdag 11 februari 2020

Hoofdstuk 1 – Eén, twee, drie, oneindig!

"An undefined problem has an infinite number of solutions."
Robert A. Humphrey

Frank and Ernest



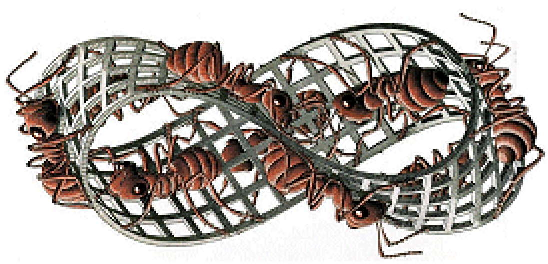
Wat is oneindig?

De verzameling van natuurlijke getallen bevat een oneindig aantal elementen. Ga maar na! Neem aan dat er 'een grootste natuurlijk getal n' zou bestaan... dan neem je gewoon n+1 en dan heb je een groter 'grootste getal'. De verzameling moet dan wel 'oneindig' zijn.

Maar wat is oneindig? Is het universum oneindig? Zo nee, is er dan een grens? En wat is er dan aan 'de andere kant' van die grens? Of is er niet aan de 'andere kant'?

Het is ook niet zo dat een oneindige verzameling alle mogelijke elementen moet bevatten. De verzameling van even getallen is zondermeer oneindig, terwijl er minstens evenveel oneven getallen zijn die helemaal niet in die verzameling voorkomen.

We zagen al eerder dat de som van alle getallen in een oneindige rij eindig kan zijn. Iets dat alleen maar groter wordt maar toch begrensd is? Kan dat? Oneindig wil dus ook niet zeggen oneindig groot.



All works by M.C. Escher (c) 2000 Cordon Art BV - Baarn - the Netherlands.

Het symbool voor oneindig is ∞, de 'omgevallen' 8. Je kunt spreken over +∞ en -∞, maar je kunt er niet mee rekenen. Oneindig is meer een 'proces' dan een 'toestand' zullen we maar zeggen en er zijn verschillende soorten 'oneindig'.

Het symbool voor oneindig ∞ wordt soms ook wel **de lemniscaat** genoemd. Maar of het daar iets mee te maken heeft?

> "Het symbool ∞ heeft waarschijnlijk weinig met de lemniscaat te maken. John Wallis voerde het symbool in 1655 in in zijn boek *Arithmetica Infinitorum*, ruim voor Bernoulli de vergelijking van de lemniscaat opstelde. Het verhaal gaat dat Wallis geïnspireerd werd door een van de Romeinse schrijfwijzen voor duizend: CIↃ. Als je dat maar snel genoeg opschrijft wordt dat vanzelf wel ∞."
> **De Lemniscaat - KP Hart**

Opdracht 1

- Maak van een strook papier de 'Band van Möbius' en knip hem midden door...

Aftelbaarheid

Neem eens aan dat je begint met 1 en dan verdubbelt en weer verdubbelt en weer... tot in het oneindige... Je krijgt dan de verzameling V={1, 2, 4, 8, 16, ... }. Dit is een oneindige verzameling, je kunt er mee doorgaan zolang je maar wilt...

V is 'slechts' een deelverzameling van $\mathbb{N}$. Je zou kunnen denken dat V dan wel 'kleiner' moet zijn dan $\mathbb{N}$. Dat is niet het geval...

V	1	2	4	8	16	...
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	...

Als we de elementen van V een nummer geven van 0 tot n-1, dan kunnen we een 1-op-1-relatie vast leggen zodat elke element van V overeenkomt met een element van $\mathbb{N}$.

Opdracht 2

Neem V_n als het n-de getal in de rij V.

a. Geef een expliciet voorschrift voor V.
b. Bereken n zodat V_n>100.000.

Opdracht 3

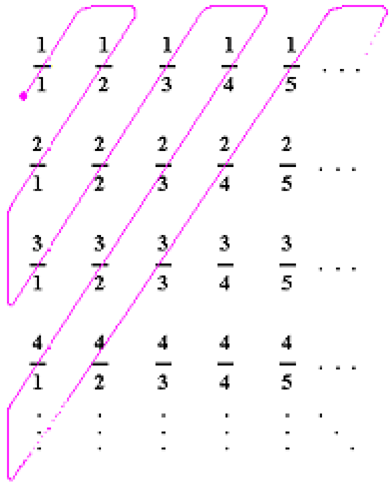
Je kunt hetzelfde doen als je $\mathbb{N}$ vergelijkt met $\mathbb{Z}$...

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	...

a. Welk element van $\mathbb{Z}$ komt overeen met 1001 van $\mathbb{N}$?
b. Welk element van $\mathbb{N}$ komt overeen met -20.000 van $\mathbb{Z}$?

Opdracht 4

..of zelfs $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$:



- Heb je op deze manier alle elementen van $\mathbb{Q}$ gehad? Zeker weten?

Aftelbaar

Oneindige verzamelingen waarbij je zo'n 1-op-1-relatie kan verzinnen met $\mathbb{N}$ noemen we **aftelbaar**. Je kunt elk element van zo'n verzameling laten corresponderen met een element uit de verzameling $\mathbb{N}$.

Opdracht 5

Aftelbaar of niet?

a. De verzameling van alle 4-vouden.
b. De verzameling van alle kwadraten.
c. De verzameling van alle priemgetallen.

Opdracht 6

Lees het artikel '**Oneindig'** van Robbert Dijkgraaf.
Het artikel staat in de werkruimte.

- Tijdens dat werkcollege wordt je geacht een aantal vragen over het artikel te kunnen beantwoorden.

Hoofdstuk 2 – Functies

In Almering(1992) kan je de volgende definitie van een **functie** vinden:

Laat A en B niet-lege verzamelingen zijn.
Het **cartesisch product** van A en B (notatie: $A\times B$) is de verzameling van alle geordende paren (a,b) met $a\in A$ en $b\in B$.

- ✔ $A\times B=\{(a,b)|a\in A,\ b\in B\}$

Definitie

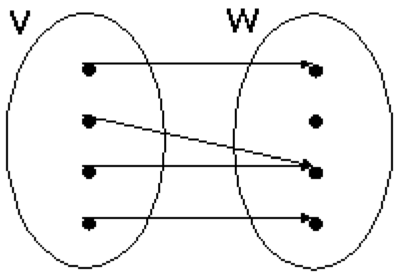
Laat A en B niet-lege verzamelingen zijn.
Beschouw de deelverzameling f van het Cartesisch product A×B met de volgende eigenschap:

- ✔ Voor alle $a\in A$ is er één en slechts één $b\in B$ met $(a,b)\in f$.

Met iedere $a\in A$ correspondeert dus precies één $b\in B$ zo dat $(a,b)\in f$. In plaats van $(a,b)\in f$ schrijven we vaak $b=f(a)$, waarin f een **afbeelding** of **functie** van A in B (notatie $f{:}A\in B$) definieert.

A heet de **definitieverzameling** of het **domein** van f. B heeft het **bereik** of **codomein** van f. Als $W\in A$ dan heet $f(W)=\{f(x)|x\in A\}$ het **beeld** van W onder f.

Heel vaak kan men een functie aangeven met een voorschrift, dat wil zeggen, een functie $f{:}A\in B$ wordt aangegeven met een voorschrift (=recept) dat aan iedere $a\in A$ een waarde $f(a)\in B$ toevoegt. We schrijven $a\in f(a)$, a noemen we een **origineel** van f(a). f(a) heet het **beeld** van a.



Deze definitie wijkt af van de definitie die gebruikelijk is in het voortgezet onderwijs. Tot nu toe was het niet noodzakelijk dat bij $f{:}A\to B$ er voor iedere $a\in A$ een beeld f(a) bestaat, dat wil zeggen, de functie hoeft niet op de hele verzameling van A gedefinieerd te zijn. Bij de definitie uit Almering(1992) moet f(a) voor alle $a\in A$ gedefinieerd zijn.

Houd dat in dit hoofdstuk in het achterhoofd. We noemen dit de 'strenge' definitie.

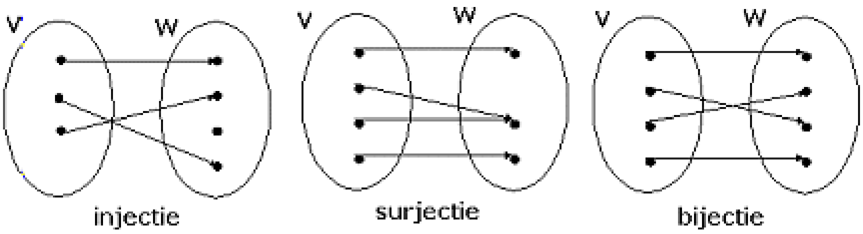
Opdracht 1

Gegeven zijn de functies $f{:}\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Geef het domein en bereik.

a. $f(x)=x$
b. $f(x)=x^2$
c. $f(x)=\sqrt{x}$
d. $f(x)=\sin(x)$
e. $f(x)=\frac{1}{x}$

Definitie

- $f: A \to B$ heet een **injectie** als voor alle $x, y \in A$ uit $f(x)=f(y)$ volgt dat $x=y$.
- $f: A \to B$ heet een **surjectie** als er voor alle $b \in B$ minstens één $a \in A$ is met $f(a)=b$.
- $f: A \to B$ heet een **bijectie** als f injectief en surjectief is.



Opdracht 2

Neem steeds f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Is f een injectie, surjectie of bijectie?

a. $f(x)=2x+3$
b. $f(x)=2$
c. $f(x)=x^2$
d. $f(x)=x \cdot \sin(x)$
e. $f(x)=(x-1)^3$

Stelling

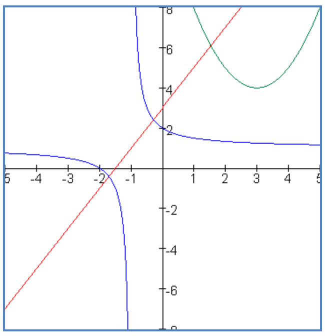
De afbeelding $f: A \to B$ heeft een **inverse** $g: B \to A$ dan en slechts dan als f bijectief is, dat wil zeggen:

- f heeft een **inverse** $\Leftrightarrow$ f is **bijectief**

Opdracht 3

Schrijf (indien mogelijk) x als functie van y:

a. $y=2x+3$
b. $y=\dfrac{1}{x+1}+1$
c. $y=(x-3)^2+4$



Opdracht 4

a. Goed of fout? Zoek de verschillen?

sin(x)=sin(2-x)	ln(x)=ln(2-x)
x=2-x	x=2-x
2x=2	2x=1
x=1	x=1

b. Als je nu kijkt naar het verschil tussen de functie y=sin(x) en y=ln(x) zou je nu in staat moeten zijn een 'wiskundig' antwoord te geven op de vraag wat het verschil is tussen y=sin(x) en y=ln(x). Doe dat en maak gebruik van de nieuwe begrippen uit dit hoofdstuk.

Opdracht 5

Los op:

a. $2^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

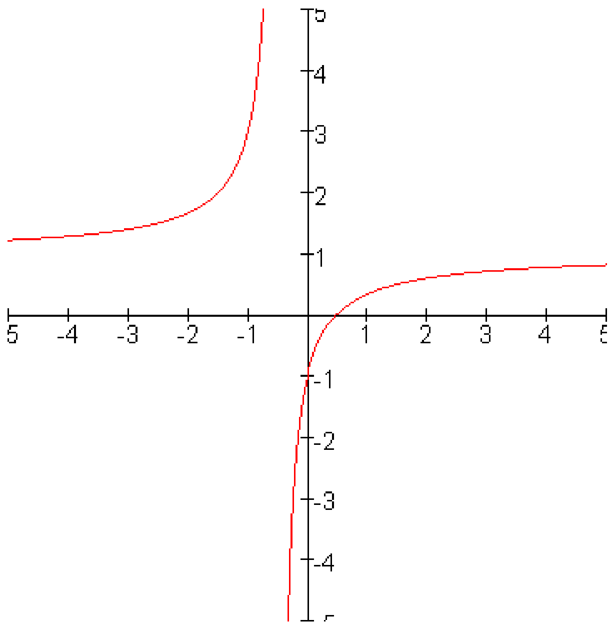
b. ${}^{2}\log(2x-3) = 2 \cdot {}^{4}\log(x)$

c. $\sin x = \sin \frac{1}{4}\pi$

Opdracht 6

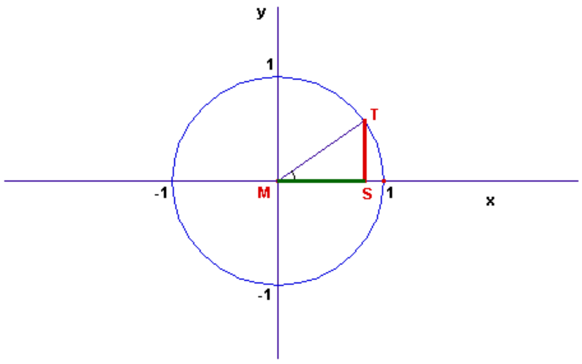
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$.

a. Geef het domein en bereik van f in intervalnotatie.
b. Bepaal de asymptoten van f.
c. De grafiek van f is puntsymmetrisch in P. Bepaal de coördinaten van P en laat zien dat f puntsymmetrisch is in P.
d. Heeft f een inverse? Zo ja, geef die inverse. Zo nee, leg uit waarom!



Hoofdstuk 3 – Goniometrische functies

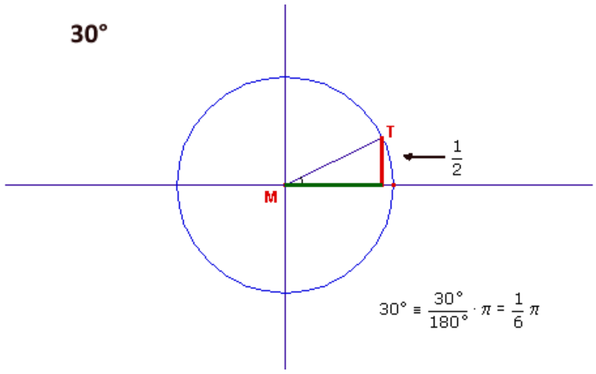
Eenheidscirkel

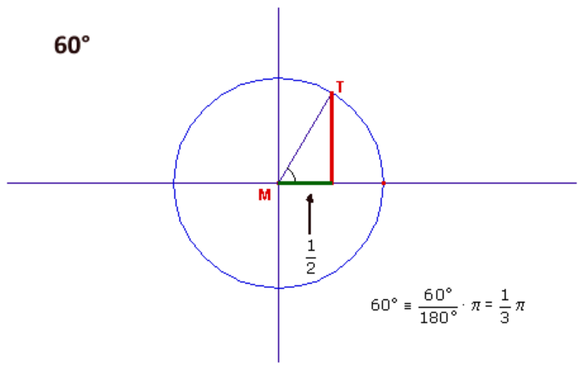


Hierboven zie je de eenheidscirkel. Het is een cirkel met een straal van 1. De 'hoek' is de hoek tussen het lijnstuk MT en het positieve deel van de x-as. Omdat de straal 1 is is de lengte van het 'rode lijnstuk' (verticaal) de sinus van de hoek en de lengte van het 'groene lijnstuk' (horizontaal) de cosinus van de hoek.

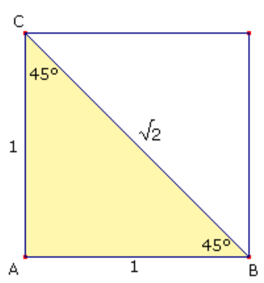
Met behulp van de eenheidscirkel kun je al veel goniometrische formules zelf afleiden. Je kunt vrijwel onmiddellijk zien dat $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

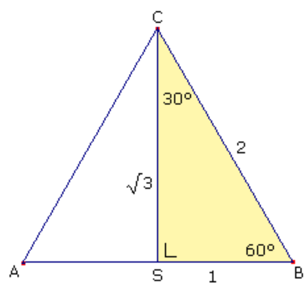
Je kunt ook zien wat radialen zijn. Het is namelijk de hoek uitgedrukt in de lengte van het cirkelboogje dat de 'hoek bestrijkt'. Een complete cirkel heeft een omtrek van 2π, dus een hoek van 30° komt overeen met $^{30}/_{180}$-ste deel van een halve cirkel en dat is $^{1}/_{6}\pi$.





De sinus van 30° is een half en de cosinus 60° is ook een half. Je kunt dat makkelijk onthouden als je bedenkt dat in een **30-60-90-driehoek** de lengte van de kortste zijde precies de helft is van de schuine zijde. De 'andere' bijzondere driehoek is de **45-45-90-driehoek**.





Daarmee kan je de sinus, cosinus en tangens van een aantal bijzondere hoeken makkelijk onthouden.

Opdracht 1

Vul in:

hoek in graden	hoek in radialen	sinus	cosinus	tangens
0°				
30°				
45°				
60°				
90°				
120°				
135°				
150°				
180°				

Tip: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Het oplossen van goniometrische vergelijkingen

Een vergelijking als sin(x)=$^1/_2$ heeft oneindig veel oplossingen. Als je zo'n vergelijking oplost dan word je geacht 'alle oplossingen' te geven:

a. $\sin\alpha = 0,5$

$\alpha = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

b. $\sin\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\alpha = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

c. $\sin\alpha = -1$

$\alpha = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

d. $\sin\alpha = 0$

$\alpha = 0 + k \cdot \pi$

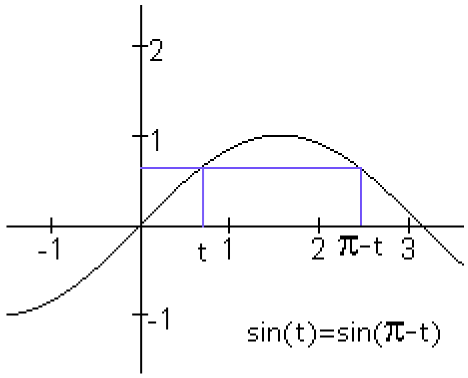
...met $k \in \mathbb{Z}$

Het **oplossen van goniometrische vergelijkingen** komt vaak neer op het toewerken naar een vergelijking van deze vorm:

- ✔ **sin α = sin β**

Daar spelen **2 zaken** een rol:

1. Als sin α = sin β dan zijn er op het domein $[0,2\pi]$ (meestal) **2 oplossingen**. Dit kan je goed zien aan de grafiek van y=sinx.



   Anders gezegd: sin α = sin β is waar voor: $\alpha=\beta$, maar ook voor $\alpha=\pi-\beta$.
2. Omdat de sinus een periodieke functie is zijn er bij een oplossing meteen ook **oneindig veel oplossingen** (modulo 2π).
   We noteren dat bijvoorbeeld dan als $\alpha={}^1/_6\pi + k\cdot 2\pi$ met $k\in \mathbb{Z}$

Als sin α = sin β dan: $\alpha=\beta+k\cdot 2\pi$ of $\alpha=\pi-\beta+k\cdot 2\pi$ met $k\in \mathbb{Z}$

Voorbeeld

Los op:

$\sin(\alpha) = \sin(\pi - 2\alpha)$

Uitwerking:

$\alpha = \pi - 2\alpha + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = \pi - (\pi - 2\alpha) + k\cdot 2\pi$

$3\alpha = \pi + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = 2\alpha + k\cdot 2\pi$

$\alpha = \frac{1}{3}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi$ of $\alpha = 0 + k\cdot 2\pi$

Oftewel:

$\alpha = \ldots, -\pi, -\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi, \pi, 1\frac{2}{3}\pi, \ldots$ of $\alpha = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots$

Voor **cosinus** en **tangens** geldt:

Als $\cos\alpha = \cos\beta$ dan:

$\alpha = \beta + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = -\beta + k\cdot 2\pi$

Als $\tan\alpha = \tan\beta$ dan:

$\alpha = \beta + k\cdot\pi$

Opdracht 2

Los algebraïsch op:

a. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

b. $\tan\alpha = -\sqrt{3}$

c. $\cos(2\alpha) = \cos(\pi - \alpha)$

d. $\sin\alpha = \cos\alpha$

Bijzonder gevallen

$\sin x = 0$	$\sin x = 1$	$\sin x = -1$
$x = 0 + k \cdot \pi$	$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$	$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$\cos x = 0$	$\cos x = 1$	$\cos x = -1$
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$	$x = 0 + k \cdot 2\pi$	$x = \pi + k \cdot 2\pi$

Opdracht 3

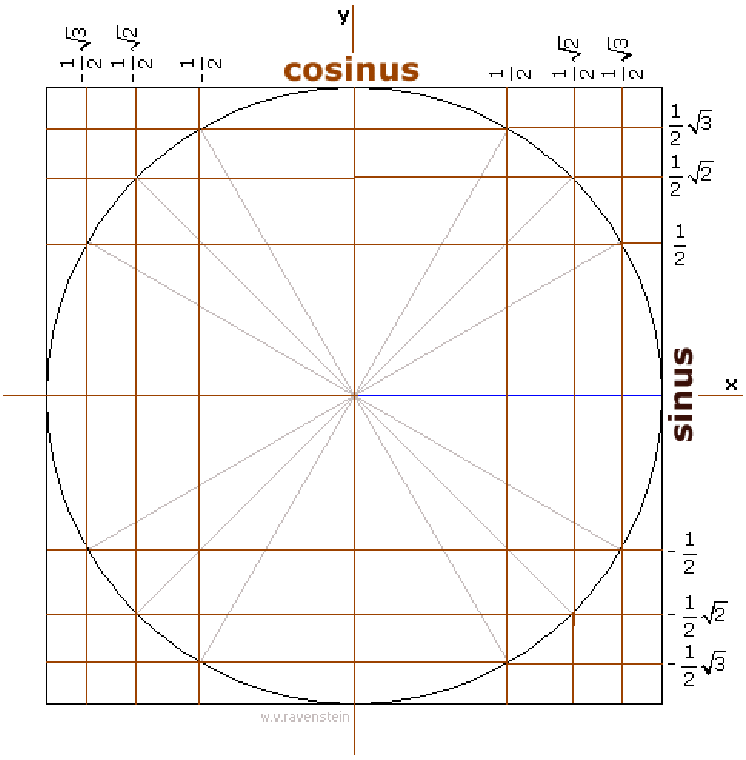
Los algebraïsch op:

a. $2 \cdot \sin^2\alpha = 1$

b. $\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$

c. $3 \cdot \sin 2\alpha = \sqrt{3} \cdot \cos 2\alpha$

d. $\cos 2\alpha + \cos\alpha = 0$



Hoofdstuk 4 – Limieten en differentiaalrekening

Definitie

Stel f is een functie gedefinieerd op een deelverzameling van $\mathbb{R}$.
f(x) heeft bij x=a een **limiet** als er bij iedere van te voren gekozen $\varepsilon>0$ een $\delta>0$ te vinden is, met de eigenschap: $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$

Notatie: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$

Hoe dat precies in z'n werk gaat is nog wel een beetje lastig. Bij de cursus **Analyse: functies van meer variabelen** komen we daar nog uitgebreid op terug. Veel begrippen zoals differentiëren en integreren zijn van het limietbegrip afgeleid. De precieze definitie van limiet doet bij eerste kennismaking moeilijk aan en het is lastig om goed te begrijpen waar het om gaat. Maar zoals gezegd, we komen er later op terug...

De limiet van een quotiënt van twee functies

Als f en g continu zijn in a dan is de limiet $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ door invullen van de functiewaarde te berekenen, tenzij g(a)=0. Is $f(a)\neq 0$ en g(a)=0 dan bestaat de limiet niet. Over de situatie f(a)=0 en g(a)=0 ('nul gedeeld door nul') valt veel te zeggen... Ook als f en g beide naar $\pm\infty$ gaan moet je uitkijken...

Soms is het mogelijk een factor in teller en noemer weg te delen, zodat je daarna de limiet door invullen kan bepalen.

In het algemeen geldt dat als je je streng aan de regels houdt dan kan het bijna niet mis gaan. Er bestaan naast de **rekenregels** ook nog een hele verzameling **standaardlimieten**.

Het zou nu wat ver gaan om hier heel diep op in te gaan. Ter illustratie geef ik een aantal voorbeelden.

Voorbeelden

Invullen:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{2^2-2\cdot 2+2}{2^2-1}=\frac{2}{3}$$

Delen door de hoogste macht van 'x':

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

Factoren wegdelen:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0$$

Opdracht 1

Bereken de volgende limieten:

a.

$$\lim_{x\to 3} \frac{-2x + 6}{x^2 - 4}$$

b.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + x}$$

c.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$$

d.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$$

Opdracht 2

Bij sommige limieten hierboven kon je uit de teller en noemer een factor 'wegdelen'. Je zou je af moeten vragen of dat wel kan!? Je kon toch niet delen door nul? En die factor die je 'wegdeelt' gaat toch naar nul toe?

- Hoe zit dat precies?

Definitie

Zij $f{:}D\to \mathbb{R}$ en zij a een inwendig punt van D.
f heet **differentieerbaar in a** als:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

bestaat, met andere woorden als er een getal $b\in \mathbb{R}$ bestaat zo dat

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b$$

Dit getal heet de **afgeleide** van f in a; notatie b=f'(a).

Opmerking
Men kan bovenstaande limiet ook noteren als:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Almering(1992)

Voorbeeld

De afgeleide in x van $f{:}D \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x)=x^2-4x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 4(x+h) - \{x^2 - 4x\}}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h - x^2 + 4x}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{4x} - 4h - \cancel{x^2} + \cancel{4x}}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} 2x + h - 4 \approx 2x - 4$$

Opdracht 3

Bereken de afgeleide m.b.v. de definitie van $f{:}D \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x)=(x+4)^3$

Met behulp van de definitie kan je allerlei 'rekenregels' voor het differentiëren bewijzen. Dat gaan we nu niet doen, maar je zult de 'rekenregels' bij **analyse** ook nog wel tegen komen.

- Somregel
- Productregel
- Quotiëntregel
- Kettingregel

http://www.wisfaq.nl

Hoofdstuk 5 – Bijzondere getallen, letters en symbolen

In de wiskunde gebruiken we een hele verzameling van symbolen. Hieronder zie je daar een aantal van:

$+$	plus
$-$	min
$:$	gedeeld door, verhouding
$/$	gedeeld door
$\times$	keer, maal
$\cdot$	keer, maal, scalair product
$=$	is gelijk aan
$\equiv$	is identiek aan, is per definitie
$\neq$	is niet gelijk aan
$\approx$	is ongeveer gelijk aan
$>$	is groter dan
$\geq$	is groter dan of gelijk aan
$<$	is kleiner dan
$\leq$	is kleiner dan of gelijk aan
$\pm$	plus of min, foutenmarge
$\mp$	min of plus
$\mathbb{C}$	verzameling van complexe getallen
$\mathbb{Z}$	verzameling van gehele getallen
$\mathbb{N}$	verzameling van natuurlijke getallen
$\mathbb{Q}$	verzameling van rationale getallen
$\mathbb{R}$	verzameling van reële getallen
$\forall$	voor alle
$\exists$	bestaat er
$\{\ \}$	verzameling
$\sqrt{}$	wortel
$*$	operatie
$\angle$	hoek
$\parallel$	is evenwijdig met
$\sim$	is gelijkvormig met
$\perp$	loodrecht

$\cap$	doorsnede
$\cup$	vereniging
$\subset$	is een deelverzameling van
$\not\subset$	is niet een deelverzameling van
$\in$	is een element van
$\notin$	is niet een element van
$\varnothing$	lege verzameling
Δ	toename
$\%$	procent
$'$	eerste afgeleide, minuten (hoeken)
$''$	tweede afgeleide, seconden (hoeken)
$^\circ$	graden
$\Leftrightarrow$	is equivalent met
$\Rightarrow$	implicatie
$!$	faculteit
∞	oneindig
$\int$	integraal
$\rightarrow$	nadert naar
$\sum$	som
$\prod$	product

bron: http://www.tcaep.co.uk/science/symbols/maths.htm

Volgens mij hoor je deze allemaal te kennen...!? En zo niet, dan van af nu wel!

Veel mensen gebruiken de symbolen als **afkortingen**. Ze schrijven dingen als 'hoeveel % van het totaal is dat?' of 'de lijnen p en q staan $\perp$ op elkaar...'. In het algemeen moet je dat **niet doen**.

Opdracht 1

- Zorg dat je alle bovenstaande symbolen kent. Staan er 'dingen' in die je niet kent? Of niet weet wat het is? Vraag er naar. In het werkcollege kunnen we ze dan bespreken!

Opdracht 2

Goed of fout? Leg uit!

a. $\sqrt{2}=1,41421...$
b. $\sqrt{2}$ is ongeveer $\pm 1,41$
c. $\sqrt{2}$ is $\pm 1,41$
d. $\cos(t \pm u)=\cos t \cos u \mp \sin t \sin u$
e. $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
f. De afgeleide van f(x) is f'(x).
g. Gegeven: ΔABC en ΔPQR met $\angle A=\angle P$, $\angle B=\angle R$ en $\angle C=\angle Q$.
Hieruit volgt: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.
h. $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$

Opdracht 3

Definitie:

f(x) heeft bij x=a een **limiet** als
$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \left[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\right]$
Notatie: $\lim_{x \to a} f(x)=b$

- Schrijf in 'gewoon' Nederlands wat er op de tweede regel staat.

Opdracht 4

Er zijn mensen die serieus menen dat roulette het spel van de duivel is. En niet zonder reden. Wanneer je alle cijfers tussen 1 en 36 bij elkaar optelt, krijg je **666**. Volgens **Openbaringen 13:18** het cijfer van het beest.

- Maar, klopt dat wel? Is 1 + 2 + … + 36 = 666 ?

Als je dit interessant vindt moet je ook het artikel **Van Hitler tot Hoenderloo** van Peter Burger lezen. Je kunt het vinden in de leesmap Taal van de wiskunde. Dit artikel is verschenen in Skepsis van de Stichting Skepsis Utrecht.

Bijzonder getallen:

1. π, ook wel de constante van Archimedes of getal van Ludolph genoemd.
2. *e*, ook wel de constante van Napiers genoemd (zie onder).
3. $\sqrt{2}$, ook wel de constante van Pythagoras genoemd.
4. ϕ, beter bekend als de 'gulden snede'.
5. i, dat is dat getal dat in het kwadraat -1 is...
6. 0 en 1 zijn ook bijzonder...
7. priemgetallen
8. samengestelde getallen
9. ...

Conclusie: alle getallen zijn bijzonder...

Opdracht 5

- Wat is het kleinste priemgetal waarvan zowel het voorgaande als het volgende oneven getal geen priemgetal is?

Opdracht 6

Dit is voor veel mensen de mooiste formule in de wiskunde:

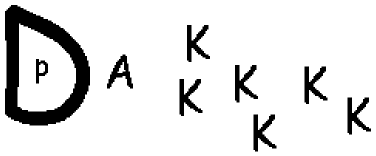
$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

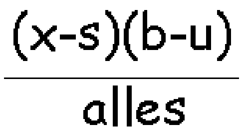
- Hoe wordt bovenstaande formule ook wel genoemd?
- Waarom zou dit 'mooi' zijn?

Opdracht 7

In de bijlage kan je nog een lijstje vinden van symbolen uit het Griekse alfabet. De meeste daarvan zal je ook moeten kennen.

- Uit de analyse ken je symbolen als Δx en dx, maar waar komt het ∂-teken vandaan in de notatie ∂f of ∂x (bij partiële afgeleiden)?





Hoofdstuk 6 - Wiskundetaal ontwikkelen

"Wiskunde is geen einddoel, maar een weg ergens naar toe. Die weg samen te vinden is een kunst, eist creativiteit, de weg te bewandelen is een kunde."
bron: **Erasmus College Zoetermeer**

De nieuwe wet- en regelgeving voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs is ingegaan op 1 augustus 2006. Kenmerkend voor de vernieuwing is dat scholen veel meer beleidsvrijheid hebben dan voorheen en dat de ruim 300 kerndoelen van de basisvorming vervangen zijn door 58 globale, meer op het leerproces gerichte doelen. Bij deze grotere beleidsvrijheid is het van belang te weten wat verplicht is en op welke gebieden scholen ruimte hebben voor eigen keuzes.

Kerndoel 19:

"De leerling leert passende wiskundetaal te gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen en leert de wiskundetaal van anderen te begrijpen."

In dit kerndoel gaat het erom dat leerlingen **leren om wiskunde te communiceren**. Dat wil zeggen: Probleemsituaties die al dan niet in een wiskundige context zijn gepresenteerd te beschrijven in termen van:

- wiskundige begrippen
- verbanden en structuren
- verantwoording geven van gemaakte stappen
- notaties/conventies gebruiken
- wiskundetaal omzetten naar de taal die nodig is bij het gebruik van ondersteunende apparatuur (zakrekenmachine, spreadsheet) en terug
- begrijpen en gebruik maken van formele en abstracte taal.

In dit hoofdstuk bekijken we kerndoel 19 aan de hand van drie verschillende niveau's:

1. vmbo b
2. vmbo kgt
3. havo vwo

Hopelijk krijgen we dan een beter idee hoe je met zo'n globale beschrijving van kerndoelen om zou kunnen gaan.

bron: **concretisering van de kerndoelen wiskunde – SLO**

Formuleren en lezen van wiskundetaal

"De wiskundetaal bestaat onder andere uit rekenkundige, wiskundige en meetkundige uitdrukkingen, meetkundige tekeningen en schema's, modellen, formele en informele notaties, schematische voorstellingen, tabellen, grafieken en opdrachten voor computer en rekenmachine."

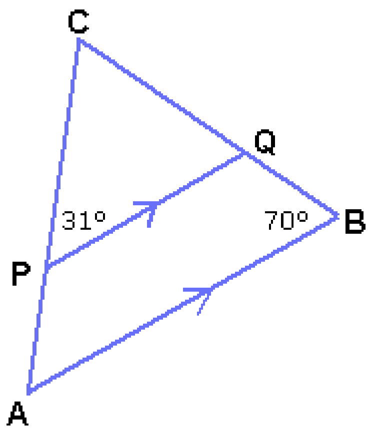
Het hangt (uiteraard) van het niveau af wat je dan precies bedoelt. Hieronder zie je beschrijvingen per schooltype.

vmbo b	**vmbo kgt**	**havo/vwo**
Het taalgebruik kenmerkt zich door het beschrijven van de handelingen die een leerling moet verrichten.	Het taalgebruik wortelt in de wijze waarop binnen het vmbo b wordt gewerkt. Regelmatig wordt geproefd aan beschrijvingen van eigenschappen en structuren.	Het taalgebruik ontwikkelt zich van het beschrijven van handelingen naar het beschrijven van eigenschappen en structuren, ook in formeel taalgebruik.

Opdracht 1

Laten we eens als voorbeeld deze opgave nemen:

Opgave



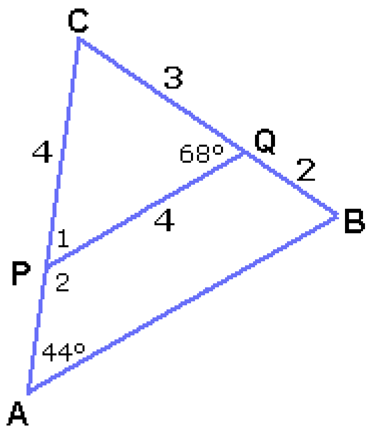
- Bereken ∠A en ∠C.

- Hoe zou je deze opgave uitleggen?
- Is je uitleg geschikt voor vmbo b, vmbo kgt of havo/vwo?
- Aan welke eigenschappen kan je denken in het kader van 'formeel taalgebruik'?

Het is niet eenvoudig, maar denk er ’s over na. Tijdens het werkcollege zullen we ‘t daar dan nog ’s ernstig over hebben.

Opdracht 2
De volgende opgave is een stuk 'ingewikkelder'. Deze opgave is bedoeld voor havo/vwo.

Opgave



PC=4, CQ=3, QB=2, PQ=4, ∠PQC=68° en ∠A=44°.
Bereken de lengte van AB en PA.

- Welke handelingen moeten leerlingen uitvoeren?
- Beschrijf de eigenschappen en structuren, ook in formeel taalgebruik.

Het is niet eenvoudig, maar denk er ’s over na. Tijdens het werkcollege zullen we ‘t daar dan nog ’s ernstig over hebben.

Gebruik maken van nomenclatuur en conventies
"Hetzelfde begrip, dezelfde berekening of dezelfde redenering is vaak op meerdere correcte manieren te verwoorden. Echte eenmaal gemaakte afspraken worden consequent toegepast. De leerlingen leren afspraken toe te passen over het gebruik van wiskundige tekens, volgorde van bewerkingen, notatie van variabelen en formules, eenheden, voorvoegsels. Zij leren de naam en de betekenis van een aantal wiskundige termen (bijvoorbeeld: veelhoek; loodrecht)."

vmbo b	**vmbo kgt**	**havo/vwo**
Naamgeving van variabelen is contextgebonden. Hoe hebben zij gehandeld en gedacht? Berekeningen worden wel volgens de geldende conventies weergegeven. ('Dan doe ik die 8 keer die 17' wordt 'dan doe ik: 8 x 17').	Naamgeving van variabelen is (op den duur) niet contextgebonden. Het noteren van handelingen en denkwijzen wordt formeler, met behoud van de band met de context. Leerlingen kunnen in voorkomende gevallen werken met een formule van de vorm y = 2x + 3, maar altijd terugvallen op de betekenis van x en y in de achterliggende situatie bij het redeneren.	Variabelen worden op zichzelf staande objecten. Het noteren van handelingen en denkwijzen gebeurt ook in formele wiskundige situaties. Leerlingen kunnen bewerken uitvoeren met een formule van de vorm y = 2x + 3, of een vergelijking oplossen, zonder dat zij terug kunnen vallen op een achterliggende situatie.

Voorbeeld

Je ziet hier een opgave uit het examen **VMBO bb** van 2006:

LOTERIJ

Er is een loterij waarbij je één of meerdere loten kunt kopen met daarop jouw postcode.
Een notaris kiest willekeurig de postcode waarop de hoofdprijs valt.
Deze hoofdprijs wordt eerlijk verdeeld over de gekochte loten met de winnende postcode.

Zoals je hieronder kunt zien, viel de prijs van 2,4 miljoen euro op postcode 5505 ND.

De hoofdprijs is in Veldhoven gevallen.
€ 2,4 miljoen
op postcode 5505 ND

1p O **18** Er zijn in Veldhoven 20 adressen met de postcode 5505 ND.
→ Hoeveel euro wordt er per lot uitbetaald als alle 20 adressen met 1 lot mee zouden doen?

Hoe meer loten er zijn met de winnende postcode, hoe lager het bedrag dat per lot uitbetaald wordt.
Het bedrag dat per lot op postcode 5505 ND uitbetaald wordt, kun je met onderstaande woordformule berekenen:

bedrag = 2 400 000 : *aantal loten*

Het *bedrag* is in euro.

2p O **19** De tabel hieronder hoort bij de bovenstaande woordformule.
→ Vul deze tabel verder in.

aantal loten	6	12	18	24	30
bedrag (in euro)	400 000		133 333		

Opdracht 3

- Hoe kan je zien dat dit een examenopgave is voor het **VMBO**?
- Wat zou je kunnen veranderen als je dezelfde context zou willen gebruiken bij **VMBO kgt** of **havo/vwo**?
- Welke wiskundige termen en of begrippen spelen hier een rol?

In **VWO 3** gaat het er heel anders aan toe. In **Moderne Wiskunde VWO 3** kan je dit soort opgaven en uitleg tegen komen:

Voor welke waarde van p raken de grafieken bij de formules $y = x^2 - 2x$ en $y = -4x + p$ elkaar?

Stap 1: Stel de bijbehorende functievoorschriften aan elkaar gelijk.
Stap 2: Herleid de vergelijking op nul.
Stap 3: Schrijf de discriminant van de zo verkregen vergelijking op.
Stap 4: Los op voor welke waarde van de parameter p de discriminant nul is.

Opdracht 4

Je ziet in het voorbeeld dat er geen context is en relatief weinig tekst!

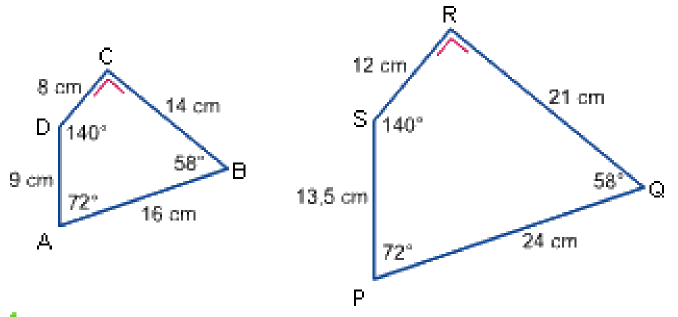
- Welke formele taal wordt hier gebruikt?
- Is dit nu een voorbeeld van een 'formele wiskundige situatie'? Leg uit.

Opdracht 5

In onderstaand voorbeeld gaat het om gelijkvormigheid en de vraag hoe je kunt na gaan of twee figuren gelijkvormig zijn.

Hoe kun je nagaan of twee figuren gelijkvormig zijn? - Oefenen

Bekijk de figuren en kies de juiste beweringen.



- V De overeenkomstige hoeken zijn gelijk.
- Omdat de overeenkomstige hoeken gelijk zijn, zijn ABCD en PQRS gelijkvormig.
- V Vierhoeken zijn gelijkvormig als de overeenkomstige hoeken gelijk zijn en de overeenkomstige zijden met dezelfde factor zijn vermenigvuldigd.
- V Deze vierhoeken zijn gelijkvormig, want bij alle overeenkomstige zijden is de factor 1,5.
- De vierhoeken zijn niet gelijkvormig, want de factor 1,5 past niet bij AB en de overeenkomstige zijde van AB in de vierhoek PQRS.

Kijk eens kritisch naar bovenstaande opgave en de antwoorden.

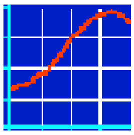
- Klopt het allemaal wat er staat?
- De boodschap is dat 'twee figuren gelijkvormig zijn als de overeenkomstige hoeken gelijk zijn **en** de overeenkomstige zijden met dezelfde factor zijn vermenigvuldigd'. Is dat zo? Weet je dat zeker? Waarom is het niet genoeg dat de overeenkomstige hoeken gelijk zijn of de overeenkomstige zijden evenredig zijn? Is dat altijd zo? Leg uit.

Gebruiken en begrijpen van formele en abstracte taal

"In het verwerven en hanteren hiervan bestaan grote onderlinge verschillen tussen leerlingen op alle niveaus. De stimulans om de situatie te beschrijven aan de hand van vaste (formele) afspraken zal altijd aanwezig moeten zijn. Een analoge benadering geldt voor het beschrijven van de situatie in wiskundige (abstracte) termen, los van de context. Echter wel van mondjesmaat op voorbeeld niveau voor vmbo bb leerlingen tot vrijwel continu op havo/vwo niveau. Voor veel leerlingen (ook op havo/vwo) is de mogelijkheid om de vertaling naar de (een) concrete situatie te kunnen maken wezenlijk bij het leren van wiskunde en zal dus steeds aanwezig moeten zijn. Het vertalen van rekenhandelingen naar de toetsen van rekenmachine of naar de spreadsheet en de terugvertaling en interpretatie van de resultaten eist veel van het formele en abstracte denken."

vmbo b	**vmbo kgt**	**havo/vwo**
Wiskundige objecten en eigenschappen worden gebruikt binnen de context waarbinnen ze zijn gepresenteerd. Bij het verantwoorden is opbouw en ondersteuning vanuit de context en formulering binnen de context altijd toegestaan. Het formele karakter beperkt zich tot een begrijpelijke weergave van een redenering of uitvoering van een procedure, in de juiste volgorde. De leerling kan daarbij gebruik maken van eigen taal en formuleringen. De vertaling van berekeningen, kaal en binnen de context, naar de ZRM en de interpretatie van de uitkomst is een continu punt van aandacht.	Wiskundige objecten en eigenschappen, gebruikt binnen verschillende contexten, worden met elkaar in verband gebracht. Beschrijving van objecten, eigenschappen en redeneringen gebeurt een aantal malen met behulp van formele taal, echter in direct verband met de context. Berekeningen worden vertaald naar de ZRM of spreadsheet en de uitkomsten geïnterpreteerd.	Wiskundige objecten worden op den duur objecten op zich. Bijvoorbeeld: Een vergelijking is een structuur waar je bepaalde handelingen mee mag verrichten, zonder dat je hoe te vertalen naar een achterliggende situatie. N.B. Dit is een gewenst eindresultaat, voor veel leerlingen is gedurende lang tijd de mogelijkheid tot terugvertaling van wezenlijk belang voor behoud van begrip. Redeneringen en manipulaties worden opgebouwd, ondersteund en verantwoord vanuit de achterliggende wiskundige structuur. Begrippen, redeneringen en procedures worden in toenemende mate gepresenteerd en verwoord met behulp van formeel taalgebruik. Wiskundige handelingen worden vertaald naar ZRM of software en de uitkomsten geïnterpreteerd.

Opdracht 6



Op **Kies je antwoord – grafieken** (de link kan je in de werkruimte vinden) kan je een applet vinden dat bedoeld is om het begrip van en het lezen van grafieken te verbeteren.

Het programma biedt opgaven waarin leerlingen het verhaal bij verschillende grafische voorstellingen (grafieken, cirkeldiagrammen, histogrammen e.d.) moet afmaken.

De grafieken aan het begin zijn tamelijk eenvoudig, het zijn met name lijngrafieken, de grafieken aan het eind zijn lastiger en met name bedoeld voor havo/vwo leerlingen.

In het licht van het bovenstaande, beantwoord de volgende vragen:

- Om welke wiskundige objecten en eigenschappen gaat het bij het applet?
- Welke formele taal kom je tegen in het applet?
- Heeft het 'lastiger worden' van de grafieken aan het eind te maken met het taalgebruik?

Uitleggen en begrijpen

"Het verwoorden van wiskundige begrippen en activiteiten en het begrijpen van een uitleg daarvan (aan medeleerling, docent, tekst) staat centraal. Onderscheid kunnen maken tussen opdracht, verwerking van de opdracht, verantwoording van de verwerking en het resultaat is hierbij een belangrijke vaardigheid."

vmbo b	**vmbo kgt**	**havo/vwo**
De leerling kan helder verwoorden welke stappen hij/zij heeft gemaakt bij het doen van wiskundige activiteiten. De leerling kan stapsgewijs een oplossingsmethode uitvoeren. De leerling kan een uitleg in termen van te maken stappen begrijpen (en toepassen bij eigen wiskundige activiteiten).	De leerling kan uitleg van procedures en algoritmen en beschrijvingen van (wiskundige) kenmerken begrijpen en in eenvoudige gevallen zelf weergeven. Beschrijvingen in dagelijkse taal worden omgezet in berekeningen en/of woordformules en omgekeerd.	De leerling kan in het communiceren met medeleerlingen, docent en door middel van geschreven teksten gebruik maken van procedures/algoritmes en beschrijvingen van (wiskundige) kenmerken. Beschrijvingen in dagelijkse taal worden omgezet in formele wiskundige taal en omgekeerd.

Opdracht 7

Een leerling vraagt: "Wat is een symmetrisch vlak? Wat is diagonaalvlak?" Je antwoord zal afhankelijk zijn van het niveau van de leerling...

- Neem eens aan dat het een VWO-leerling is. Wat zou je zeggen?
- Neem eens aan dat het een VMBO-leerling is. Wat zou je dan anders doen?

Je kunt veel leren van fouten die leerlingen maken. Soms lukt het leerlingen niet om de omslag te maken naar een meer wiskundige, formele manier van tegen dingen aankijken. Ik gaf al eerder het voorbeeld van 'min en min dat is toch plus?'. Het is vaak een klok-en-klepel-verhaal. Ergens is er wel iets blijven hangen, maar 'echt' gelukt kan je 't niet noemen.

Voorbeeld

Dit kan een domme vraag zijn, maar in de instaptoets van Wiskunde B staat de volgende vergelijking:
$(x + 3)^2 = (x + 2)^2$.
Dit kun je uit haakjes halen:
$x+3 \cdot x+3 = x+2 \cdot x+2$
Nu komt het probleem, als ik links twee x-en weghaal, mag ik dat rechts ook, dan krijg ik dit:
$3 \cdot 3 = 2 \cdot 2$
En dat is heel erg fout! Hoe kan dit verklaard worden?
(trouwens, ik had als oplossing x=0, klopt dat?)

Opdracht 8

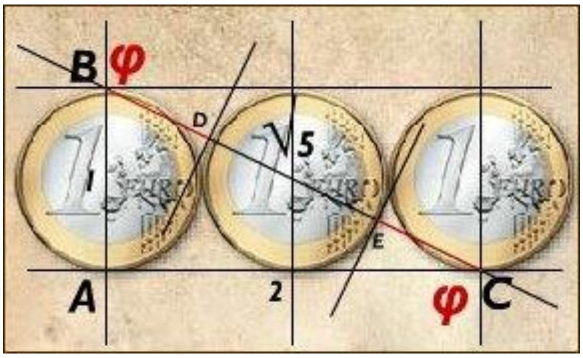
- Wat gaat er in bovenstaand voorbeeld allemaal mis? Wat zou je doen? Of is hier geen beginnen meer aan?

Tenslotte

Bij wiskunde start je vaak met concrete voorbeelden, die gaandeweg steeds wiskundiger worden beschreven, dus van concreet taalgebruik naar een abstracte beschrijving. Zo'n abstracte beschrijving is geen overbodige luxe. Bij het oplossen van vergelijkingen zijn dingen als 'je haalt links en rechts wat weg' of 'dat haal je naar de andere kant' misschien leuk voor een tijdje, maar dat is natuurlijk niet wat er gebeurt. Het zijn 'truukjes' of 'maniertjes', maar geen wiskunde. Een meer formele, wiskundige beschrijving zou zijn dat je zegt dat je bij het oplossen van een vergelijking op beide leden dezelfde bewerkingen mag uitvoeren. Als twee 'dingen' gelijk zijn en je voert daar dezelfde bewerking op uit dan blijven ze gelijk... toch?

Hoofdstuk 7 – Wiskunde en wiskundeonderwijs

"Wiskunde is een ongelooflijk knap opgebouwd systeem van stellingen, beweringen, redeneringen... wat iedere keer weer blijkt te kloppen, wanneer je een andere tak van de wiskunde bestudeert."
bron: **Erasmus College Zoetermeer**



Je hebt in deze cursus al aardig wat 'kanten' van wiskunde gezien: Wiskunde is een wetenschap, een taal, een hulp- en steunvak, een schoolvak, een activiteit van de menselijke geest, een houding, logisch denken, ...

In dit laatste hoofdstuk alleen nog wat restjes. Het is nu het moment om de proeftoets te gaan maken, na te kijken en vragen te stellen indien nodig.

Om leerlingen en ouders uit te leggen waar het om gaat bij het leren van wiskunde schreef ik meestal de volgende **3 stellingen** op het bord:

1. Wiskunde is **leuk**
2. Wiskunde leer je door te **doen**
3. Wiskunde **bouw je op**

Leuk

Eigenlijk mag je tegenwoordig dit woord niet meer gebruiken, maar ik bedoel daarmee dat je, als je wiskunde wilt leren, je daar wel plezier in moet hebben. Je moet lol hebben in het uitzoeken van dingen, het 'echt' willen doorgronden en geen genoegen nemen met 'half begrepen' regeltjes en maniertjes. Zie je daar de lol niet van in dan wordt het niks... In de praktijk vinden de leerlingen in klas 1 wiskunde meestal wel een leuk vak. Als dat niet zo is dan is er meestal wel iets mis. Maar ook als student van de lerarenopleiding moet je plezier hebben in het bezig zijn met wiskunde. Waarom zou je daar anders les in willen geven? Als je er geen lol in hebt dan is er iets mis denk ik...

Doen

In het begin van mijn loopbaan als docent heb ik mij altijd heel erg verbaasd over het feit dat leerlingen bij een proefwerk van die 'domme dingen' deden. Hoe kan dat nou? Ik had het toch zo goed uitgelegd en dan nog dit soort fouten maken? Hoe kan dat nou? Het blijkt dat ondanks 'geweldig goede uitleg' leerlingen relatief weinig opsteken van sommetjes maken, nakijken en bespreken. De uitleg klinkt wel heel logisch en begrijpelijk, maar 't blijft meestal niet 'echt hangen'. Nee, wiskunde kan je echt alleen leren door te doen, door zelf te puzzelen, dingen tot de bodem uit te zoeken en je in de problemen vast te bijten en niet los te laten voordat je er uit bent.

Denk dus niet dat als je maar goed oplet tijdens werkcolleges dat het dan allemaal wel gaat lukken. Zo werkt het niet. Misschien op korte termijn en als de stof niet al te moeilijk is, maar uiteindelijk krijg je daar op de lange duur last mee... Je moet het echt zelf doen en je zult zien dat het dan ook vele malen leuker wordt... De lol neemt exponentieel toe, zullen we maar zeggen. Het leren van abstracties is moeilijk, je moet er moeite voor doen, maar dan heb je ook wat.

Bouwwerk

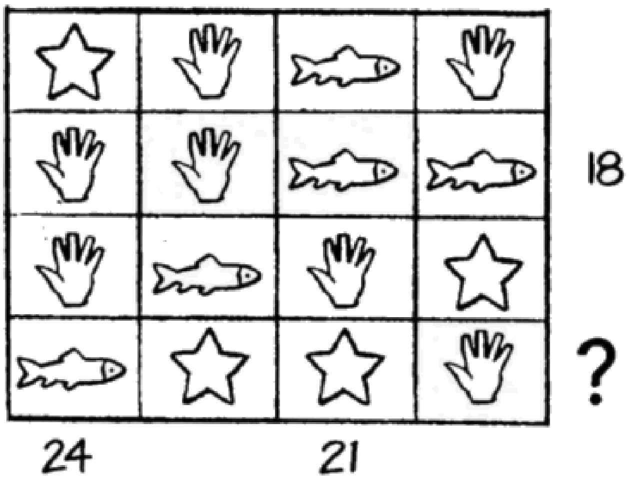
Ik beschouw het leren van wiskunde altijd als het bouwen van een huis. Je kunt niet hier en daar zo 's wat fundering of muren weg laten.

> "...als je als leerling wilt gaan nadenken over het oplossen van vergelijkingen, moet je rekenkundige bewerkingen met onbekenden kunnen uitvoeren. Als je wilt kunnen rekenen met onbekenden moet je goed kunnen rekenen met bekende getallen. En 'goed' hier vereist bijvoorbeeld dat je een goed getalbegrip hebt - dat je begrijpt dat je elk getal met elk ander getal kunt vermenigvuldigen, dat verschillende producten hetzelfde resultaat op kunnen leveren, dat een positief getal vermenigvuldigd met een negatief getal een negatief getal oplevert, dat vermenigvuldiging met nul nul oplevert, en zo verder."
>
> M.Peletier

...en zo is het maar net! Je stapelt kennis op kennis op kennis... Zitten er grote gaten in je kennis dan kan je eigenlijk niet verder. Repareren zou ik zeggen!

Opdracht 1

Welk getal staat er op de plaats van het vraagteken?



En verder?

Maar hoe zit het eigenlijk dan met **jullie**? Wiskundegewijs zullen we maar zeggen... Geldt zo'n verschuiving van **concreet** naar **abstract** ook niet voor de wiskunde die jullie zouden moeten leren? En zo ja, hoe gaat dat dan? En lukt dat dan ook? Is VWO-stof ook echt abstracter? Hoeveel 'onbegrepen' regeltjes gebruik je zelf eigenlijk?

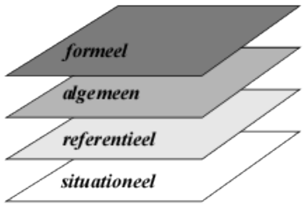
Opdracht 2

- Je weet waarschijnlijk dat de afgeleide van f(x)=ln(x) gelijk is aan $f'(x) = \frac{1}{x}$.

  Maar waarom is dat zo? Zou je dat kunnen bewijzen?

Het einde?

Gravemeijer[1] onderscheidt vier niveaus van wiskundige activiteit. Het idee van zich ontwikkelende modellen is dat modellen die in eerste instantie verwijzen naar een concrete context met betekenis voor de leerlingen, zich geleidelijk aan ontwikkelen tot algemene modellen voor redeneren binnen een wiskundig kader.



Vier niveaus van wiskundige activiteit (Gravemeijer, 1994, 1999)

Kernbegrippen in de domein-specifieke instructietheorie van realistisch wiskundeonderwijs zijn geleide heruitvinding, progressief mathematiseren, horizontaal en verticaal mathematiseren, didactische fenomenologie en zich ontwikkellende modellen. Je zal ze bij **vakdidactiek** allemaal tegen komen...

EINDE

W.v.Ravenstein | februari 2009 | bijgewerkt december 2010

Bijlage

Α	α	alpha	Ν	ν	nu
Β	β	beta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	Ο	ο	omikron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
Ε	ε	epsilon	Ρ	ρ	rho
Ζ	ζ	zeta	Σ	σ	sigma
Η	η	eta	Τ	τ	tau
Θ	θ	theta	Υ	υ	upsilon
Ι	ι	iota	Φ	φ	phi
Κ	κ	kappa	Χ	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
Μ	μ	mu	Ω	ω	omega

[1] Gravemeijer, K. (1994). Developing realistic mathematics education. Utrecht: CD-ß Press.
Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. Mathematical Thinking and Learning, 1, 155-177.