De Grafische Rekenmachine Deeltijd

Antwoordenboekje

Willem van Ravenstein

versie 2
herzien in 2010

Inhoudsopgave

Den Haag, zondag 25 juli 2010
Herzien in 2010

Vermenigvuldigen, delen, optellen en aftrekken

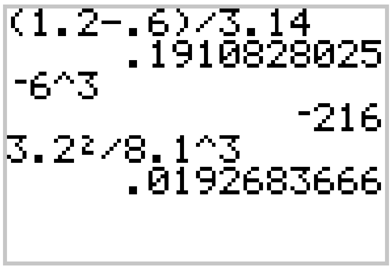
Opgave 1

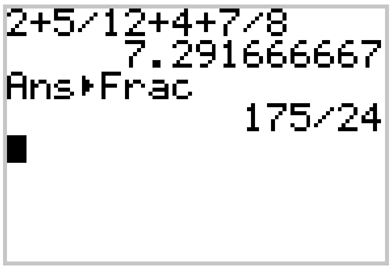
a. Bij 2+3·4 zal je hebben gezien dat de GR de voorrangsregels goed toepast. Vermenigvuldigen en delen gaan immers voor optellen en aftrekken, dus 2+3·4=2+12=14
b. Bij 10-5+6 zul je zien dat de GR de voorrangsregels ook goed toepast. Optellen en aftrekken doe je immers op de volgorde waarop ze staan, dus 10-5+6=5+6=11
c. De eerste keer dat je -4--6 probeert uit te rekenen op je GR zul je zien dat, in tegenstelling tot wat je misschien gewend bent, de GR twee verschillende mintekens kent. Het (-)-teken dat je gebruikt om het teken van een getal weer te geven en het minteken van aftrekken. Op je GR zal dit 'eenvoudige sommetje' dus zo uit moeten rekenen:

(-)	4	-	(-)	6	[ENTER]

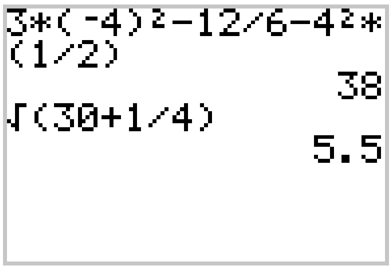
d. Ook hier gaat het goed! Vermenigvuldigen en delen doe je ook op de volgorde waarop ze staan. 12:4×-2=3×-2=-6

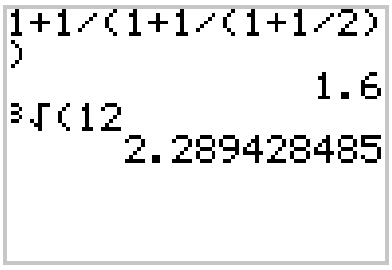
Opgave 2





Opgave 3





Breuken en haakjes

Antwoorden

Opdracht 1

a. $\frac{2}{3} \times \frac{6}{52} = \frac{1}{13}$

b. $4\frac{1}{3} \times 2\frac{2}{7} = 9\frac{19}{21}$

c. $\frac{2^3 - 1}{21} = \frac{1}{3}$

d. $\frac{2^{13} - 2^{12}}{2^{12} - 2^{11}} = 2$

Opdracht 2

a. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{8}{27}$

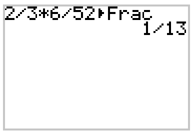
b. Neem $x = 3$ en bereken $2^{3x-1} - 23 = 233$

c. Neem $x = -2$ en bereken $\frac{x^4 - 1}{2^x} = 60$

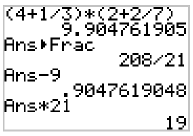
d. $\sqrt{5\frac{11}{49}} = 2\frac{2}{7}$

Toelichting

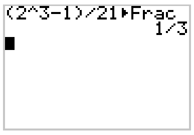
Opdracht 1



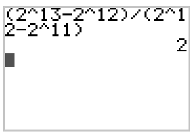
$\frac{2}{3} \times \frac{6}{52} = \frac{1}{13}$



$4\frac{1}{3} \times 2\frac{2}{7} = 9\frac{19}{21}$

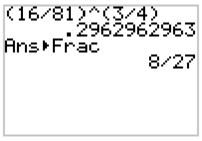


$\frac{2^3 - 1}{21} = \frac{1}{3}$

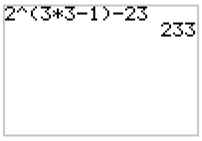


$\frac{2^{13} - 2^{12}}{2^{12} - 2^{11}} = 2$

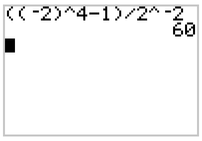
Opdracht 2



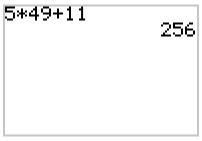
$\left(\frac{16}{81}\right)^{1\frac{1}{3}} = \frac{8}{27}$



$2^{3 \cdot 3-1} - 23 = 233$



$\frac{(-2)^4 - 1}{2^{-2}} = 60$



$\sqrt{5\frac{11}{49}} = \sqrt{\frac{256}{49}} = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$

Maar...

Deze 'sommetjes' kan je natuurlijk ook heel goed zonder rekenmachine... sterker nog... misschien kan je ze wel uit je hoofd... maar eigenlijk zou je hierbij helemaal geen rekenmachine nodig moeten hebben... 't kan heel goed met een potloodje en een papiertje...

Machten en wortels

Opgave 1

a. $3^{-2} = \frac{1}{9}$
b. $5^0 = 1$
c. $0^7 = 0$
d. $0^0 = ? \rightarrow$ niet gedefinieerd

Opgave 2

a. $\sqrt{\pi} \approx 1,77$
b. $\sqrt[4]{3} \approx 1,32$
c. $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}\right)^2 = 1,44$
d. $-4^{-1\frac{1}{3}} = -0,16$

Opgave 3

a. $\frac{6}{6^6} \cdot \sqrt[6]{66} \cdot 6! \approx 0,1861$
b. $\dfrac{\left(1+\frac{1}{e}\right)^{25} - \left(1-\frac{1}{e}\right)^{25}}{e^{\sqrt{25}}} \approx 16,9716$

Grote en kleine getallen

Opgave 1

$$1^2=1$$
$$11^2=121$$
$$111^2=12321$$
$$1111^2=1234321$$
$$11111^2=123454321$$
$$111111^2=12345654321$$
$$1111111^2=1234567654321$$
$$11111111^2=123456787654321$$
$$111111111^2=12345678987654321$$

Vraagje: wat is 1111111111^2 dan?

Opgave 2

a. $2.951266543 \cdot 10^{94}$

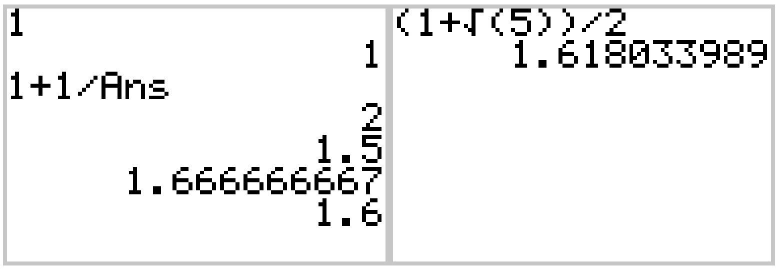
b. $1.711224524 \cdot 10^{98}$

c. $9.000000000 \cdot 10^{-100}$

d. Als 't goed is kan dit niet met je GR!

Bijzondere getallen

Opgave 1



...en dat tweede 'ding' is **geen antwoord** op de vraag...

Opgave 2

a. $2 \cdot \left(\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)^2 = 1$

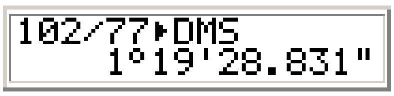
b. $\frac{2\pi}{\cos \pi} = -2\pi$

c. $\sqrt{\frac{1}{\pi^2 \cdot \frac{1}{\pi^4}}} = \pi$

d. $e^{\ln(2\pi)} - \ln\left(e^{2\pi}\right) = 0$

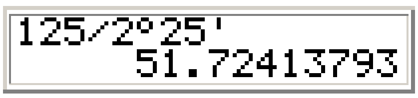
Uren, dagen, maanden, jaren...

Opgave 1



1 uur en 19 minuten

Opgave 2



51,7 km/uur.

Opgave 3

a. 1958
b. Februari
c. 23
d. Ja, zondag...

Logaritmen

Opgave 1

a. $4 \times 32 = 2^2 \times 2^5 = 2^7 = 128$
b. $256:16 = 2^8:2^4 = 2^4 = 16$
c. $\sqrt{}256 = \sqrt{}(2^8) = 2^4 = 16$

Opgave 2

a. $^2\log(6) = 2,585$
b. $^3\log(6) = 1,631$
c. $\log(6) = 0,778$
d. $^{0,5}\log(6) = -2,585$

Opgave 3

a. $^2\log(8) + {}^4\log(16) = 5$
b. $^{0,5}\log(32) + {}^2\log(32) = 0$
c. $^2\log(16) + {}^4\log(16) + {}^8\log(16) = 7^1/_3$
d. $^{0,1}\log(10000) = -4$

Opgave 4

$^3\log\left(2x^2 - 3\right) = 6$ $2x^2 - 3 = 3^6$ $2x^2 - 3 = 729$ $2x^2 = 732$ $x^2 = 366$ $x = -\sqrt{366}$ of $x = \sqrt{366}$	$^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4x}\right) = 4$ $\frac{1}{4x} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ $\frac{1}{4x} = \frac{1}{16}$ $4x = 16$ $x = 4$	$^2\log\left(4 - 30x^2\right) = -2$ $4 - 30x^2 = 2^{-2}$ $4 - 30x^2 = \frac{1}{4}$ $16 - 120x^2 = 1$ $120x^2 = 15$ $x^2 = \frac{1}{8}$ $x = -\sqrt{\frac{1}{8}}$ of $x = \sqrt{\frac{1}{8}}$ $x = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$ of $x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

Opgave 5

a. $1\frac{1}{2} \cdot 6^x = 54 \Leftrightarrow 6^x = 36 \Leftrightarrow 6^x = 6^2 \Leftrightarrow x = 2$

b. $7 \cdot 25^x = 1\frac{2}{5} \Leftrightarrow 25^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{-1} \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

c. $3^{2x+2} \cdot 9^x = 729 \Leftrightarrow 9^{x+1} \cdot 9^x = 9^3 \Leftrightarrow 9^{2x+1} = 9^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$

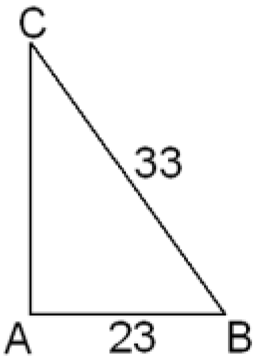
d. $\frac{4}{2^x} = 8^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 2^2 \cdot 2^{-x} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 2^{2-x} = 2^{1\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 2 - x = 1\frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$

Hoeken en goniometrische verhoudingen

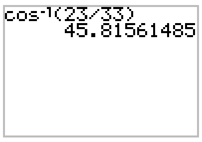
Opgave 1

a. Ongeveer 1070 m.
b. Ongeveer 2300 m.

Opgave 2



$\cos\angle B = \frac{23}{33}$



$\angle B \approx 46°$

Opgave 3

Invullen van $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ geeft :

$5^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos\alpha$

$25 = 36 + 48 - 84 \cdot \cos\alpha$

$25 = 84 - 84 \cdot \cos\alpha$

$-59 = -84 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{-59}{-84} = \frac{59}{84}$

$\alpha \approx 45°$

Opgave 4

$\frac{6}{\sin 35°} = \frac{9}{\sin\angle B}$

$6 \cdot \sin\angle B = 9 \cdot \sin 35°$

$\sin\angle B = \frac{9 \cdot \sin 35°}{6} \approx 0{,}860$

$\angle B \approx 59°$ of $\angle B \approx 121°$

Faculteiten, permutaties en combinaties

Opgave 1

a. $\binom{8}{3} = 56$

b. $(8)_3 = 336$

c. $8! = 40.320$

d. $\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k} = 16$

Opgave 2

a. 120
b. 20

Kansverdelingen

Opgave 1

0,1032

Opgave 2

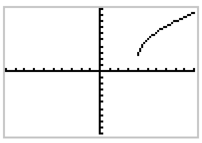
0,3451

Wat is een functie?

Opgave 1

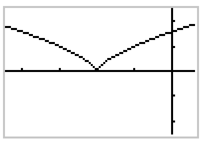
- f(-10)=110, f(10)=90 en het minimum van f is $-\frac{1}{4}$, (zie boven).
  Het bereik is $[-\frac{1}{4},110]$.

Opgave 2



- $x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$, dus $D_f=[4,\rightarrow\rangle$
- Het minimum van f is 2, dus $B_f=[2,\rightarrow\rangle$

Opgave 3



- $D_f=\mathbb{R}$
- $B_f=[0,\rightarrow>$

Grafieken tekenen, schetsen en plotten

a. Tja... wat moet je dan opschrijven? Niets dus... Misschien '**gedaan**' ?
b.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	8	3	0	-1	0	3	8
g(x)	8	7	6	5	4	3	2

c. Als je een tabel met functiewaarden hebt dan kan je de grafiek **tekenen**! Op papier dus... assenstelsel maken, getallen bij de assen, punten neerzetten en dan... enz...
d. f(-6)=24
e. De nulpunten van f zijn (-2,0) en (0,0). Het nulpunt van g is (4,0)
f. De snijpunten zijn (-4,8) en (1,3)
g. Het minimum van f is -1.
h. Het bereik van f is [-1,→> en het bereik van g is $\mathbb{R}$

Stijgen en dalen

Opgave 1

- stijgen: <←,-2> ∩ <2,→>
- dalen: <-2,2>
- toenemende stijging: <2,→>
- afnemende stijging: <←,-2>
- toenemende daling: <-2,0>
- afnemende daling: <0,2 >

Opgave 2

- Stijgen: <←,0>∩<1.2;→>
- Dalen: <0,1.2>
- Toenemende stijging:<-1.3,0>∩<1.2,→>
- Afnemende stijging: <←,-1.3>
- Toenemende daling:∅
- Afnemende daling:<0,1.2>

Raaklijnen

Opgave 1

a.

$$\text{rico} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - -3}{0 - -2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Snijpunt $y-as : (0,2) \Rightarrow b = 2$

$l : y = 2\frac{1}{2}x + 2$

b.

Vul $(3,2)$ in $y = 2\frac{1}{3}x + b \Rightarrow 2 = 2\frac{1}{3} \cdot 3 + b \Rightarrow b = -7$

$k : y = 2\frac{1}{3}x - 7$

c.

$m : y = -3$

Opgave 2

a.

$$\text{gemiddelde toename} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{0 - -3}{3} = 1$$

b.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} \approx \frac{f(1,01) - f(1)}{0,01} = \frac{-3,0199 - -3}{0,01} = -1,99 \approx -2$$

Opgave 3

De helling bij verschillende waarden van x staan hieronder:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$^{dy}/_{dx}$	-6	-4	-2	0	2	4	6

Opgave 4

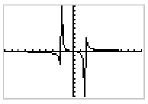
- y=3x-15

Asymptoten

Opgave 1

a.

$f: x \to \dfrac{x}{x^2 - 3} \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow$

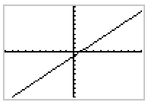


verticale asymptoten: $x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$

horizontale asymptoot: $y = 0$

b.

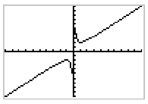
$g: x \to \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2} = x - 1$ voor $x \neq 2$



Dus een 'perforatie' bij $x = 2$, elders $y = x - 1$

c.

$h: x \to x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$



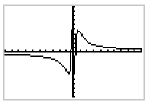
verticale asymptoot: $x = 0$

Als $x \to \infty$ dan $\dfrac{1}{x} \to 0 \Rightarrow h \to x$

schuine asymptoot: $y = x$

d.

$k: x \to 5 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ is wel een bijzonder geval



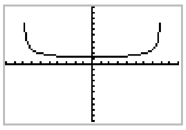
Probeer maar 's een aantal malen in te zoomen op (0,0)

horizontale asymptoot: $y = 0$

Opgave 2

a.

$f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{64 - x^2}} \Rightarrow 64 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -8 \leq x \leq 8$



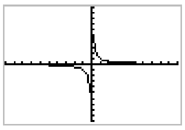
$D_f = \langle -8, 8 \rangle$

$\sqrt{64 - x^2} \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 64 \Rightarrow x \neq -8$ en $x \neq 8$

verticale asymptoten: $x = -8$ en $x = 8$

b.

$g(x) = \dfrac{\sqrt{64 - x^2}}{8x} \Rightarrow 8x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$



verticale asymptoot: $x = 0$

$64 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -8 \leq x \leq 8$

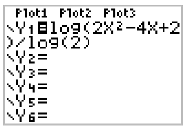
$D_f = [-8, 8]$

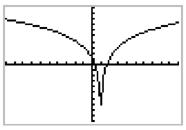
$g(-8) = 0$ en $g(8) = 0$

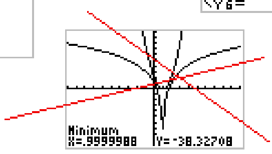
c.

$h(x) = {}^2\log\left(2x^2 - 4x + 2\right) \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

verticale asymptoot: $x = 1$

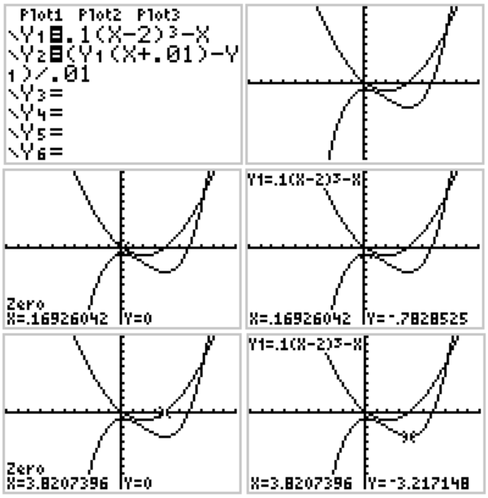




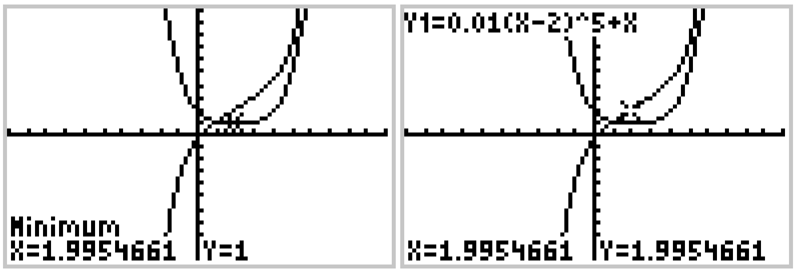


Hellingsfunctie

Opgave 1



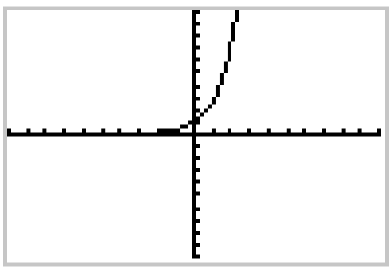
Maar dat is dan wel 'ongeveer', maar 't was ook slechts een benadering!



Ook ongeveer goed, maar de exacte oplossing is (2,2).

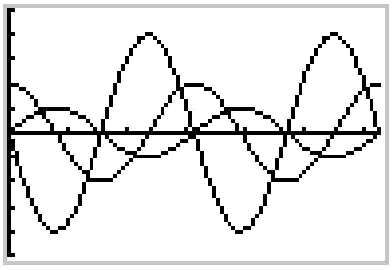
Opgave 2

De afgeleide van $f(x)=e^x$ is $f'(x)=e^x$.



Opgave 3

Allemaal buigpunten, maxima en minima:



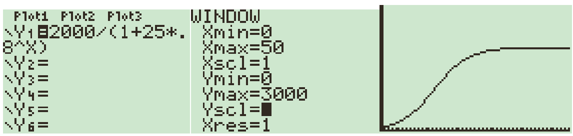
Opgave 4

Nee, tegenvoorbeeld: $y=x^4$

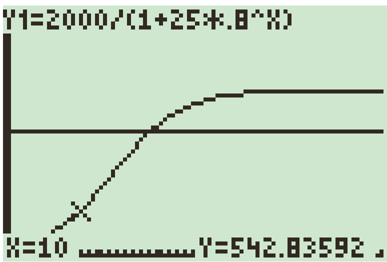
Toegepast

Opgave 1

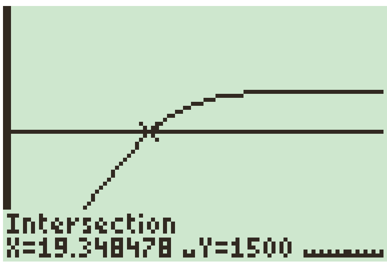
Eerst maar eens tekenen. Let op de haakjes! Het kijkvenster is even lastig... tenzij je goed naar de formule kijkt natuurlijk... maar met wat experimenteren moet het mogelijk zijn de grafiek goed in beeld te krijgen.



a. Gebruik **CALC** en dan **VALUE**:

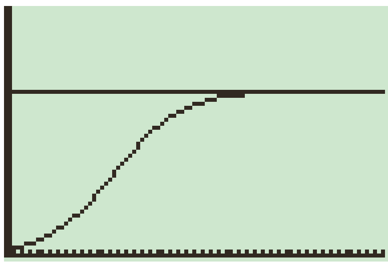


b. Neem Y2=1500 en gebruik **CALC** en **intersect**.

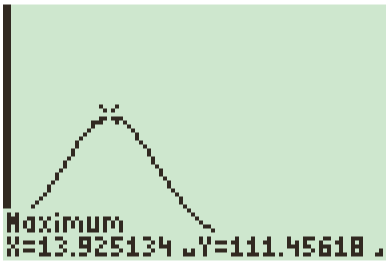


c. Een mogelijk aanpak is om Y2=Y1(x+1)-Y1(x) te nemen, het kijkvenster aan te passen... en met **CALC** en **maximum** te kijken waar

d. Een wiskundige benadering: stel vast dat als x groter wordt de uitdrukking onder de deelstreep naar 1 gaat, zodat de functiewaarde naar 2000 gaat. Met de GR kan je 't een en ander 'controleren' door het kijkvenster aan te passen of door y=2000 te tekenen:

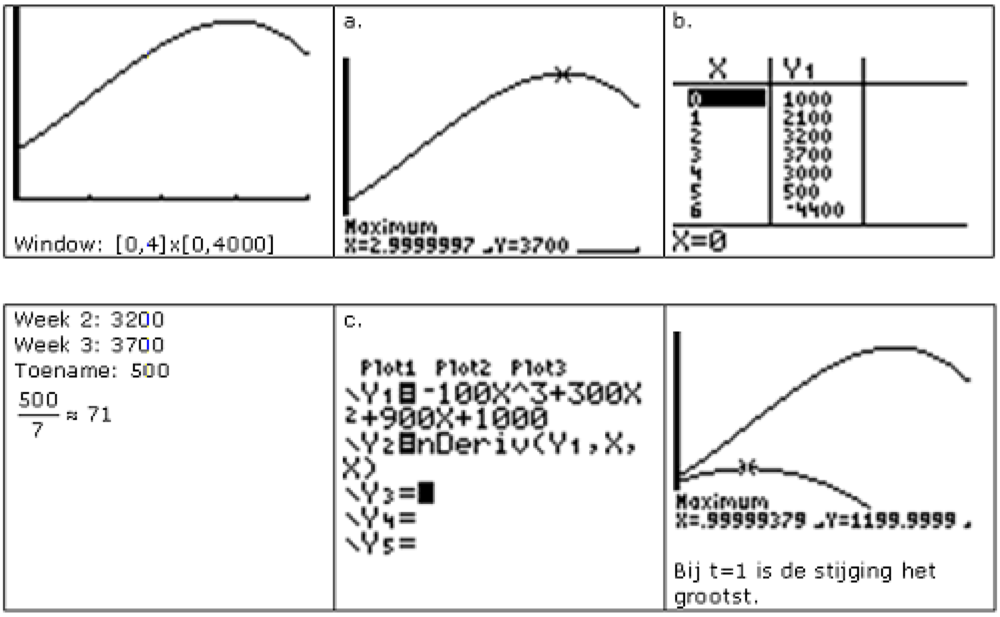


de toename het groots is.



Uiteraard zijn er meer manieren...

Opgave 2



Benaderen van integralen

Opgave 1

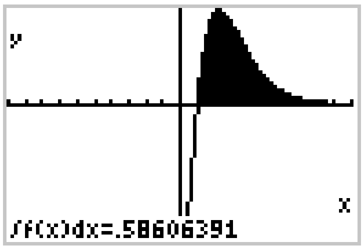
- Vul maar 's in of (-50,0), (0,20) en (50,0) voldoen. Zo ja... dan is het een goede formule voor deze parabool.
  Zelf bedenken kan ook. f(x)=a(x+50)(x-50) (nulpuntenformule) en vul (0,20) in en bereken de waarde van a. Je zal dan zien dat a=$-{}^{1}/_{125}$.

- Werk de haakjes weg!
  $-\frac{1}{125}(x+50)(x-50)=$
  $-\frac{1}{125}\left(x^2-50x+50x-2500\right)=$
  $-\frac{1}{125}\left(x^2-2500\right)=$
  $-\frac{1}{125}x^2+20=$
  $20-\frac{x^2}{125}$

Opgave 2

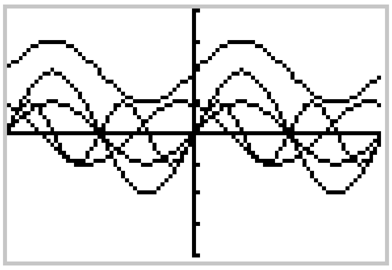
- $F(x)=20x-\frac{x^3}{375}+C$

Opgave 3



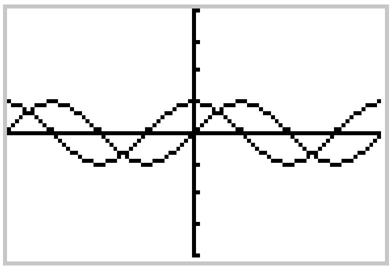
De grafieken van sinus en cosinus

Opgave 1



- a. $y=2\cdot\sin x$ →Vermenigvuldiging met factor 2 t.o.v. de x-as
  b. $y=\sin x+2$ →Translatie over (0,2)
  c. $y=\sin(x+2)$ →Translatie over (-2,0)
  d. $y=\sin(2x)$ →Vermenigvuldiging met factor 0,5 t.o.v. de y-as

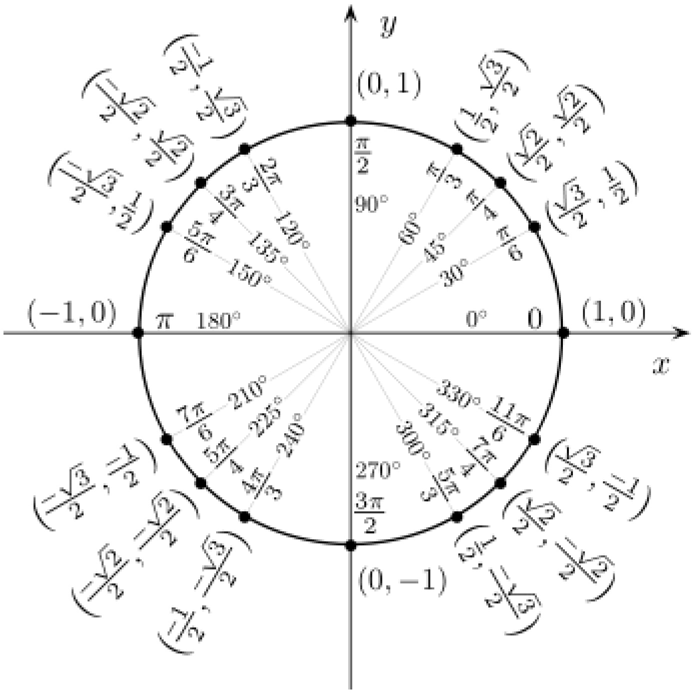
Opgave 2



- Translatie over ($^1/_2\pi$,0)

Opgave 3

hoek	**sinus**		**cosinus**	
0°	½√0	0	½√4	1
30°	½√1	½	½√3	½√3
45°	½√2	½√2	½√2	½√2
60°	½√3	½√3	½√1	½
90°	½√4	1	½√0	0



Het omrekenen van graden en radialen en omgekeerd

Opgave 1

a. $^{1}/_{15}\pi$
b. 1,964

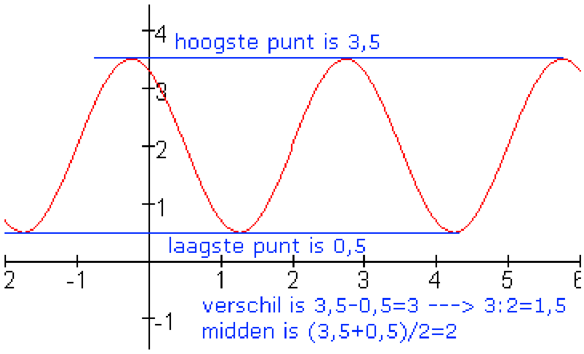
Opgave 2

a. 22°30'0"
b. 572°57'28"
c. 49°37'11"

Cirkelbeweging en harmonische beweging

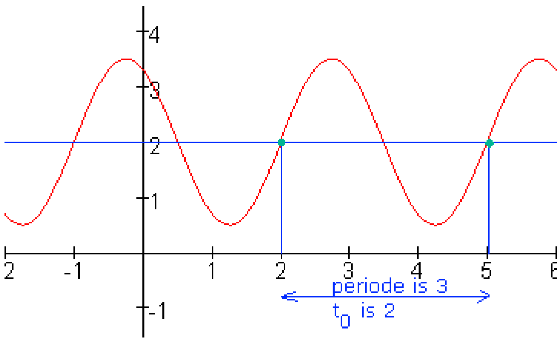
Opgave 1

a. Kijk eerst naar het hoogste en laagste punt. Je weet dan de evenwichtsstand en de amplitude:



We zien: A=1,5 en c=2

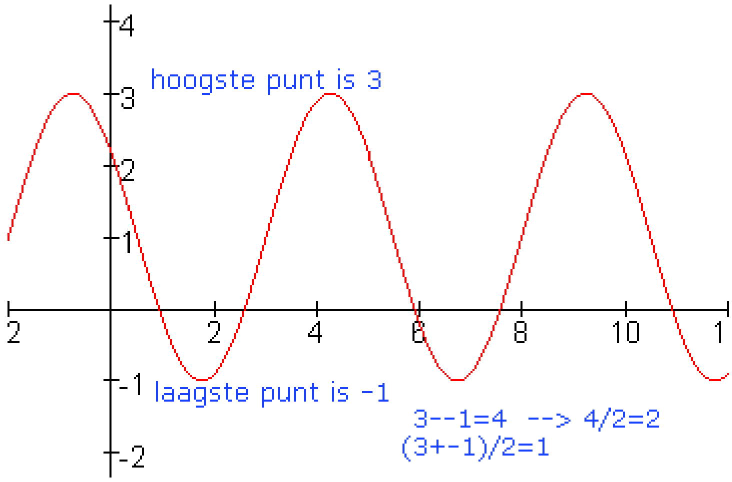
Kijk dan naar de periode en t_0:

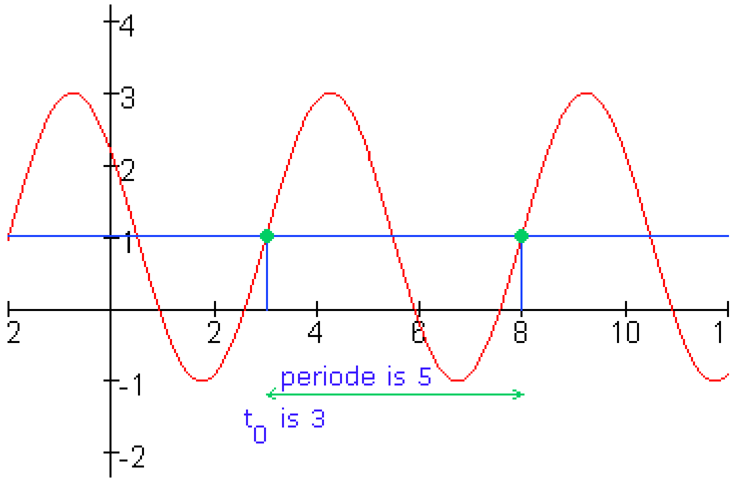


We zien T=3 en t_0=2. De formule wordt:

$$h(t) = 2 + 1{,}5 \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{3}(x-2)\right]$$

b. Hetzelfde nog een keer maar dan zonder toelichting:





$$h(t) = 1 + 2 \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{5}(x-3)\right]$$

Eb en vloed

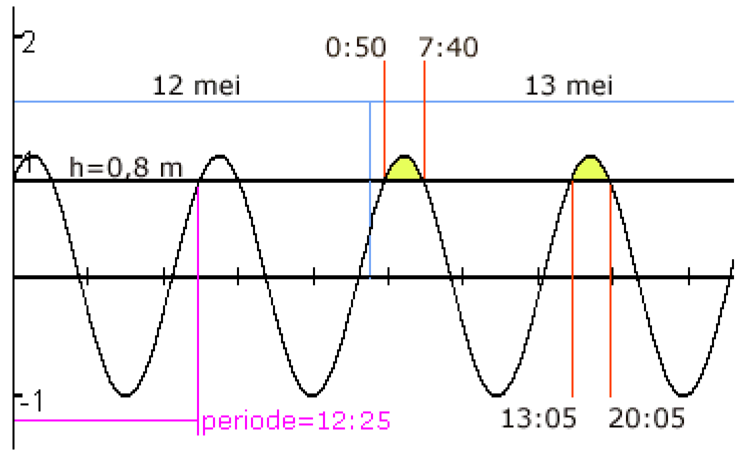
Opgave 1

Op 12 mei om 13:00 uur is de waterhoogte 0,8 m. Om 16:15 hebben we een maximum, dus om 19:30 is de waterhoogte weer 0,8 m.

Wat is een getijbeweging? Tja... eh... Zou dat misschien een complete cyclus van hoogwater (vloed) naar laagwater (eb) en weer terug kunnen zijn? Dus de periode is 12:25 uur.

Dat betekent dat het na 12:25 weer 0,8 m is. En na 24:50 uur weer... o wacht eens, dan is het 13 mei! Om 0:50 is de waterhoogte 0,8 m. Het maximum is om 3:75, ik bedoel 4:15 en om 7:40 is het weer 0,8 m. Dus tussen 4:15 en 7:40 is het water hoger dan 0,8 m.

Vervolgens om 16:40 uur en 20:05 is het weer 0,8 m. Dus van 13:15 tot 20:05 hebben een waterhoogte van 0,8 m of hoger....



Formules

Gegeven : $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ en $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2^e

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

Invullen in : $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\left(1 - \sin^2\alpha\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

3^e

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) \Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Vergelijkingen

Opgave 1

a. $\sin\alpha = 0,5$

$\alpha = \frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = \frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi$

b. $\sin\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\alpha = 1\frac{1}{4}\pi + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = 1\frac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi$

c. $\sin\alpha = -1$

$\alpha = 1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

d. $\sin\alpha = 0$

$\alpha = 0 + k\cdot\pi$

Opgave 2

Los op:

$\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin(\alpha + \pi)$ met $\alpha \in [0, 2\pi]$

Uitwerking:

$\alpha + \frac{1}{2}\pi = \alpha + \pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha + \frac{1}{2}\pi = \pi - (\alpha + \pi) + k \cdot 2\pi$

$\alpha + \frac{1}{2}\pi = \pi - \alpha - \pi + k \cdot 2\pi$

$\alpha + \frac{1}{2}\pi = -\alpha + k \cdot 2\pi$

$2\alpha = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\alpha = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$\alpha = \frac{3}{4}\pi$ of $\alpha = 1\frac{3}{4}\pi$

Opgave 3

a. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

b. $\tan\alpha = -\sqrt{3}$

$\alpha = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$

c. $\cos(2\alpha) = \cos(\pi - \alpha)$

$2\alpha = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi$ of $2\alpha = -(\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$

$3\alpha = \pi + k \cdot 2\pi$ of $2\alpha = -\pi + \alpha + k \cdot 2\pi$

$\alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $\alpha = -\pi + k \cdot 2\pi$

$\alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $\alpha = \pi + k \cdot 2\pi$

$\alpha = \ldots, -\pi, -\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi, \pi, 1\frac{2}{3}\pi, 2\frac{1}{3}\pi, \ldots$

$\alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

d. $\sin\alpha = \cos\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$

$\tan\alpha = 1$

$\alpha = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

Opgave 4

a. $2 \cdot \sin^2 \alpha = 1$

$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$

$\sin \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\alpha = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$\alpha = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

b. $\cos^2 \alpha + \frac{1}{2}\cos \alpha - \frac{1}{2} = 0$

$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) = 0$

$x = \frac{1}{2}$ of $x = -1$

$\cos \alpha = \frac{1}{2}$ of $\cos \alpha = -1$

$\alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = \pi + k \cdot 2\pi$

$\alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = \pi + k \cdot 2\pi$

c. $3 \cdot \sin 2\alpha = \sqrt{3} \cdot \cos 2\alpha$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\tan 2\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$2\alpha = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$

$\alpha = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

d. $\cos 2\alpha + \cos \alpha = 0$

$\cos 2\alpha = -\cos \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha - \pi)$

$2\alpha = \alpha - \pi + k \cdot 2\pi$ of $2\alpha = -(\alpha - \pi) + k \cdot 2\pi$

$\alpha = -\pi + k \cdot 2\pi$ of $2\alpha = -\alpha + \pi + k \cdot 2\pi$

$\alpha = \pi + k \cdot 2\pi$ of $3\alpha = \pi + k \cdot 2\pi$

$\alpha = \pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$\alpha = \ldots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \ldots$ of…

… $\alpha = \ldots, -3\pi, -2\frac{1}{3}\pi, -1\frac{2}{3}\pi, -\pi, -\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi, \pi, 1\frac{2}{3}\pi, 2\frac{1}{3}\pi, 3\pi, \ldots$

$\alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Wat is een matrix?

Bij verschillende stappen gebruik ik **[QUIT]** om terug te keren naar het rekenscherm...
In het rekenscherm roep je de matrix en vector op via **[MATR!X][NAMES]**.

$$M \cdot k = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,10 \\ 0,05 & 0,90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 \\ 185 \end{pmatrix}$$

Bewerkingen met matrices

Opgave 1

```
[A]²*[B]
      [[127.75]
       [172.25]]
round([A]²*[B],0
)
         [[128]
          [172]]
```

$$\begin{pmatrix} 0,95 & 0,10 \\ 0,05 & 0,90 \end{pmatrix}^2 \times \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128 \\ 172 \end{pmatrix}$$

Kennelijk is dat hetzelfde als:

$$\begin{pmatrix} 0,95 & 0,10 \\ 0,05 & 0,90 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 \\ 185 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,95 & 0,10 \\ 0,05 & 0,90 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 115 \\ 185 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128 \\ 172 \end{pmatrix}$$

Er geldt: $M(M \cdot k) = M^2 \cdot k$ en dat isniet zo vanzelfsprekend als het misschien lijkt!

Opgave 2

```
          [103]]
         [[198]
          [103]]
         [[198]
          [103]]
         [[198]
          [103]]
```

Dat is wel een beetje vreemd, want er is een klant bijgekomen! Bovendien (maar dat zien we straks) klopt het niet. Dat heeft natuurlijk iets te maken met **afronden**.

Opgave 3

```
[A]^100*[B]
 [[199.9999913]
  [100.0000087]]
```

Dat er nu iets anders uitkomt... . Om te laten zien dat 200|100 'echt' wel de stabiele verdeling is moet je laten zien dat dit geldt:

$$\begin{pmatrix} 0,95 & 0,10 \\ 0,05 & 0,90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}?$$

Matrixvermenigvuldiging

Opgave 1

I.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow 1\text{x}2\text{x}2\text{x}1 = 1\text{x}1$$

II.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow 3\text{x}2\text{x}2\text{x}3 = 3\text{x}3$$

III.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2\text{x}3\text{x}3\text{x}2 = 2\text{x}2$$

IV.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 4\text{x}1\text{x}4\text{x}1 \text{ ? } \color{red}{\text{kan niet}}$$

V.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1\text{x}4\text{x}4\text{x}4 = 1\text{x}4$$

Opgave 2

In de matrix B staan bij Japan de bedragen in yen, maar in de matrix K staat de waarde van de yen uitgedrukt in 100yen, dus dat kan niet goed gaan.

Een directe-wegen matrix

Opgave 1

a. 11, 12, 21, 22, 68, 69, 78, 79, 88, 89, 98 en 99
b. 8+6+5+8+12+2+11+6+11=69
c. 36+24+66=126
d. 86

Opgave 2

a.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b.

```
[I]^3
[[4  6  10 13 9…
 [6  2  10 8  4…
 [10 10 24 23 1…
 [13 8  23 26 1…
 [9  4  15 15 8…
```

Dat zijn er 10

c. Er zijn 49 vierstapswegen van 1 naar 4. Deze routes zijn niet allemaal even waarschijnlijk. De kans op 1-4-4-4-4 bijvoorbeeld is anders dan de kans op 1-4-1-2-4. Ga maar na!

d. Er zijn 146 vijfstapsroutes van 5 naar 5. Maar op grond van c. kan je daar verder niet zoveel mee. In plaats van een directe-wegen-matrix kan je dan beter de kansen in de matrix zetten en dan M^3 uitrekenen. Je kunt dan de gevraagde kans aflezen. De kans is $\frac{28}{225}$.

Populatievoorspellingsmatrix

Opgave 1

```
     [7352704  ]]
  [[735270400]
    [2921775   ]
    [22013760  ]]
[[2201376000]
  [36763520   ]
  [2191331    ]]
```

De populatie neemt toe!
Vraag: kan je dat zien aankomen omdat $0{,}05 \cdot 0{,}75 \cdot 100 = 3{,}75$?

Opgave 2

1. P(4-jarig)=0,005·0,5=0,0025
   P(6-jarig)=0,005·0,5·0,4=0,001
2. De populatie vertoont periodiciteit? Of zou de populatie naar een stabiele verdeling convergeren?

$$\begin{pmatrix}800\\125\\85\\25\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}25000\\4\\63\\34\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}34000\\125\\2\\25\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}25000\\170\\63\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1000\\125\\85\\25\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}25000\\5\\63\\34\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}34000\\125\\3\\25\end{pmatrix}\to\dots$$

   Je kan ook eens M^{100} uitrekenen. Welke conclusie kan je daar uit trekken?

Stelsels lineaire vergelijkingen oplossen

Opgave 1

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\42\end{pmatrix}$$

Rijen × kolommen:

$3x + 4y = 24$

$2x - 6y = 42$

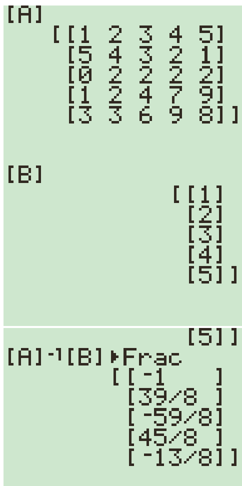
Opgave 2

Zet in een 5x5-matrix [A] de coëfficiënten van de vergelijking, zoals in het plaatje hiernaast.

Zet in een 5x1-matrix [B] de getallen van de rechter leden van de vergelijkingen, zoals in het plaatje hiernaast.

Met **[A]$^{-1}$[B]→Frac** bereken je op eenvoudige wijze de oplossing van dit stelsel.

a=-1, b=$4\,{}^{7}/_{8}$, c=$-7\,{}^{3}/_{8}$, d=$5\,{}^{5}/_{8}$ en e=$-1\,{}^{5}/_{8}$.



Opgave 3

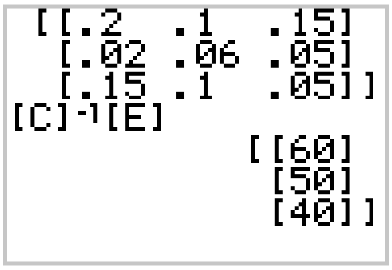
Ik 'vertaal' de gegevens eerste naar een matrix en wel zo dat het ook 'echt' ergens op slaat. Deze matrix ziet er dan zo uit:

$$\begin{array}{r}\\ \text{proteine}\\ \text{vet}\\ \text{vocht}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}\\ \begin{pmatrix}0,20 & 0,10 & 0,15\\0,02 & 0,06 & 0,05\\0,15 & 0,10 & 0,05\end{pmatrix}\end{array}$$

Vervolgens stel ik vast dat het neer komt op 't volgende probleem:

$$\begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}02 & 0{,}06 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}05 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 6{,}2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Zet ik de matrix in **[c]** en de gewenste uitkomst in **[E]** dan geeft de GR met de **inverse matrix** het antwoord:



Rijen en reeksen

Opgave 1

Dat zal dan wel een derdegraads veelterm zijn. De 'derde verandering' is dan constant....

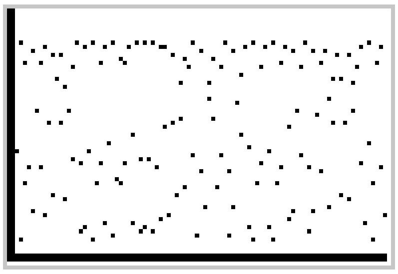
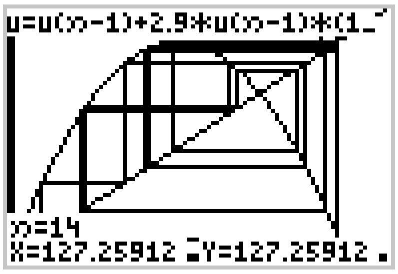
Opgave 2

Zie opgave 3

Opgave 3

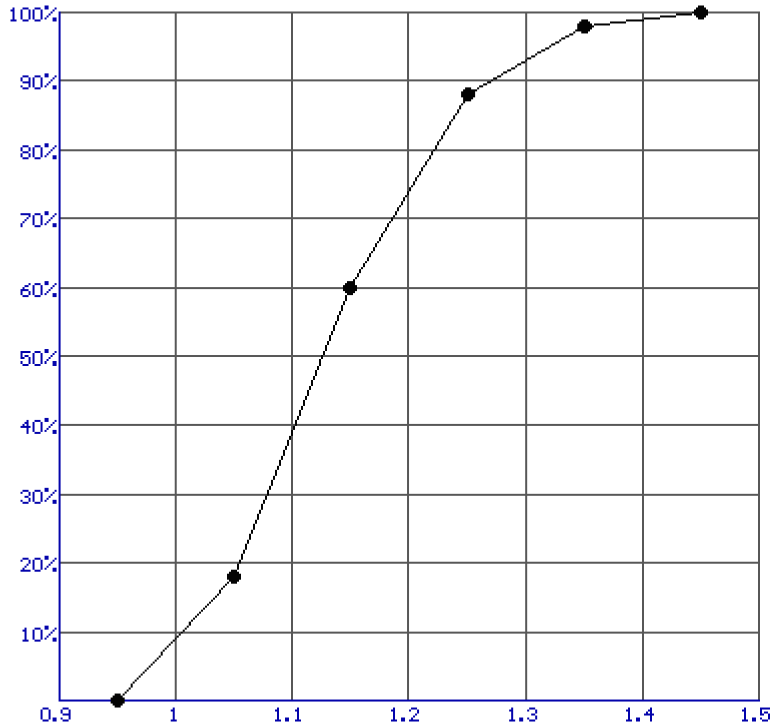
a. €100·1,05 + €50 = €155
b. Ongeveer €792
c. Na 21 jaar.

Opgave 4

Frequenties

Opgave 1



Centrummaten

Opgave 1

Het gemiddelde is 14,56 en **NIET** 14,06!

Dit laatste antwoord is een fout die je snel maakt. Om het gemiddelde uit te rekenen gebruik je de klassemiddens. Je gaat er dan vanuit dat het klassemidden van een klasse het gemiddelde van die klasse is (Zeker weten doe je dat niet, maar wat moet je anders?).

Opgave 2

Het gemiddelde is 4,1.
De mediaan is 4.
De modus is 4.

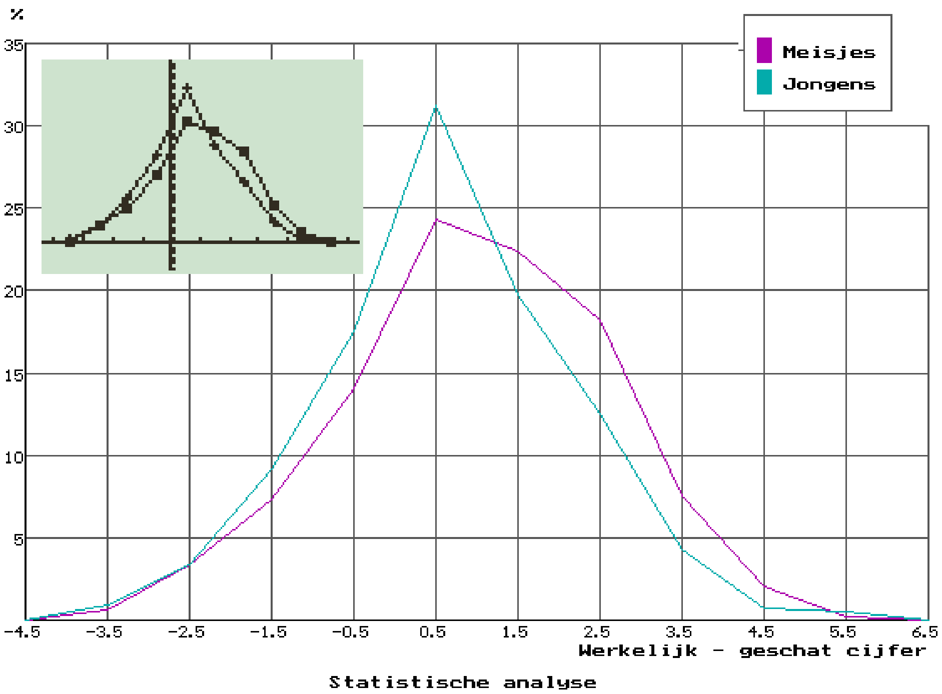
Spreidingsmaten

lijst	bewerking	gemiddelde	standaarddeviatie	gemiddelde	standaard deviatie
L1	L1	5,6	3,6	m	s
L2	L1+2	7,6	3,6	m+2	s
L3	2·L1	11,1	7,2	2·m	2·s
L4	2·L1+2	13,1	7,2	2·m+2	2·s
L5	100-L1	94,4	3,6	100-m	s
L6	1000-100·L1	443	356	1000-100·m	100·s

Grafische voorstellingen

Opdracht

Meest geschikte grafieksoort lijkt mij de frequentiepolygoon:

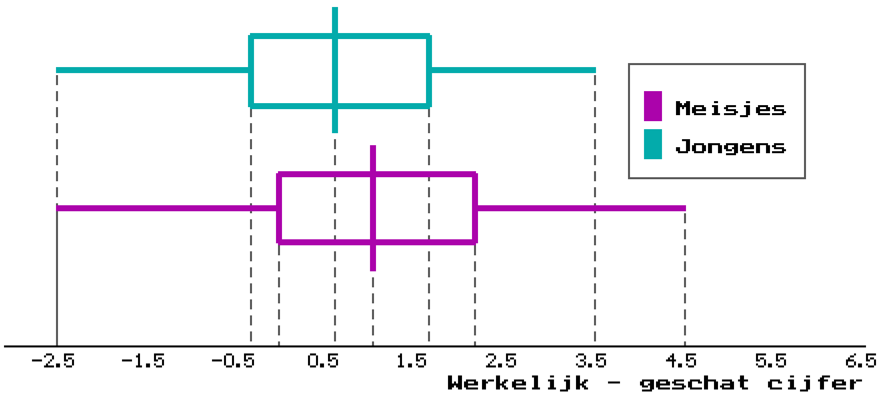


Hieronder zie je dan een overzichtje van de verschillende centrum- en spreidingsmaten:

STATISTICS #1 [GRM19]		STATISTICS #2 [GRM19]	
N	= 100	N	= 100
MEAN	= 0.99	MEAN	= 0.63
σn	= 1.61	σn	= 1.52
$\sigma n-1$	= 1.62	$\sigma n-1$	= 1.52
RANGE	= 9	RANGE	= 9
MD	= 1.31	MD	= 1.16
$x-\sigma, x+\sigma$	= -0.62,2.6	$x-\sigma, x+\sigma$	= -0.88,2.15
SD-RANGE	= 79 (79%)	SD-RANGE	= 68 (68.5%)
MODE	= 0.5	MODE	= 0.5
MEDIAN	= 1.02	MEDIAN	= 0.61
Q1	= -0.02	Q1	= -0.34
Q3	= 2.16	Q3	= 1.65

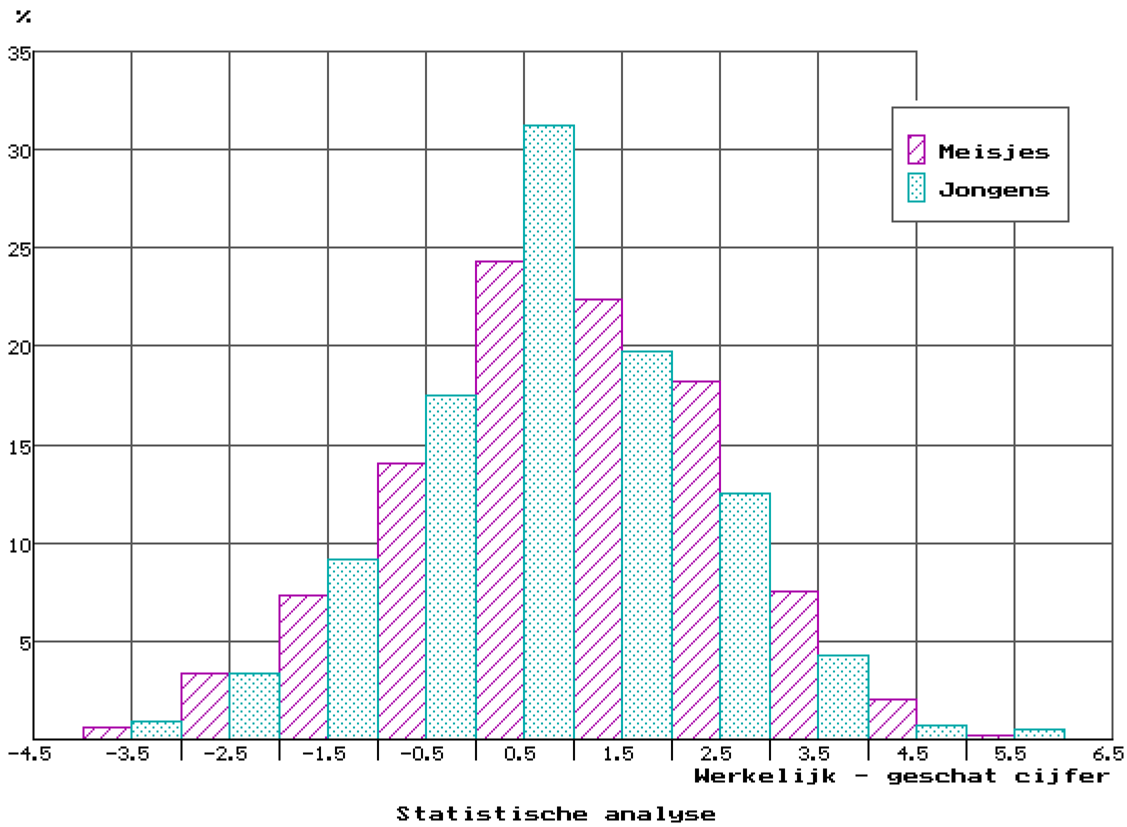
Conclusie: meisjes schatten hun prestaties in het algemeen iets lager in dan jongens.

Hoewel een boxplot ook wel aardig is:



Statistische analyse

Of zoiets:



Formules en verbanden

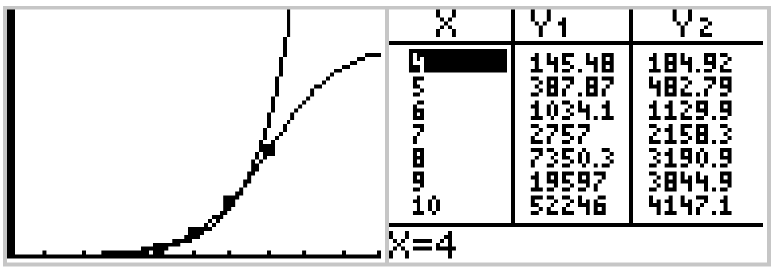
Opgave 1

$y = x^4 - 5x^2 + 4$

(-2, 0), (-1, 0), (1, 0) en (2, 0)

De nulpunten kan je trouwens zelf makkelijk berekenen!

Opgave 2



- 50.000
- 4100

Opgave 3

```
QuarticReg
 y=ax⁴+bx³+…+e
 a=0
 b=.3333333333
 c=⁻2
 d=2.666666667
↓e=1
```

```
SinReg
 y=a*sin(bx+c)+d
 a=1
 b=1.570796327
 c=⁻3.71429E⁻13
 d=1
```

1.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2\frac{2}{3}x + 1$$

2.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot x\right) + 1$$

Opvallend?

- De eerste functie is geen vierdegraads functie maar een derdegraads functie. Vergelijk '3 punten op een lijn' geeft ook geen parabool!
- De waarde van de parameter **c** lijkt iets, maar is niks... . De GR blijft toch een 'benaderaar'. $-3{,}71329 \cdot 10^{-13}$ is een goede benadering voor nul. Ook bij de andere parameters moet je (soms) dan maar gewoon afronden.