De

Grafische

Rekenmachine

Deeltijd

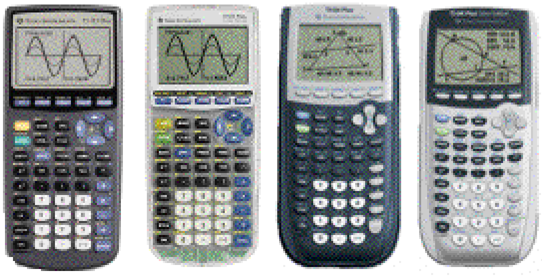
Opdrachtenboekje

Willem van Ravenstein

versie 2
herzien in 2010

Inleiding

Met de komst van de Tweede Fase is de grafische rekenmachine ingevoerd, ook op het HAVO. Zoals altijd heeft een nieuwe ontwikkeling voor- en tegenstanders. Voor 'ons' is de grafische rekenmachine echter een onmisbaar hulpmiddel, maar toegegeven elk apparaat heeft beperkingen. Denk maar aan een magnetron: je kunt er goed brood in ontdooien of soep opwarmen, maar gewoon een lekker eitje bakken is er niet bij...



Een rekenmachine (onderbouw en bovenbouw!) is een snel, betrouwbaar en handig **hulpmiddel** bij het rekenen.

Daarnaast fungeert de rekenmachine als **tabellenboekje**. In situaties waar voorheen een tabellenboekje gebruikt werd levert de rekenmachine snel goede benaderingen voor de gezochte waarden.

Daarnaast kan je de rekenmachine inzetten als **experimenteeromgeving**. Bijvoorbeeld het ontdekken van getalpatronen, regels of wetmatigheden. Ook het werken met variabelen, functies, matrices e.d. valt daar onder.

Juli 2007 – Den Haag
Willem van Ravenstein

herzien in 2010

Rekenen

Den Haag, zondag 25 juli 2010

Vermenigvuldigen, delen, optellen en aftrekken

Opgave 1

Bereken **uit het hoofd** en controleer daarna je antwoorden met de **rekenmachine**:

a. $2+3\cdot 4$

b. $10-5+6$

c. $-4--6$

d. $12:4\times -2$

Opgave 2

Bereken met de **rekenmachine**:

a. $\dfrac{1{,}2-0{,}6}{3{,}14}$

b. -6^3

c. $\dfrac{3{,}2^2}{8{,}1^3}$

d. $2\dfrac{5}{12}+4\dfrac{7}{8}$

Opgave 3

Bereken met de **rekenmachine**:

a. $3\cdot(-4)^2-12:6-4^2\cdot\dfrac{1}{2}$

b. $\sqrt{30\dfrac{1}{4}}$

c. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$

d. $\sqrt[3]{12}$

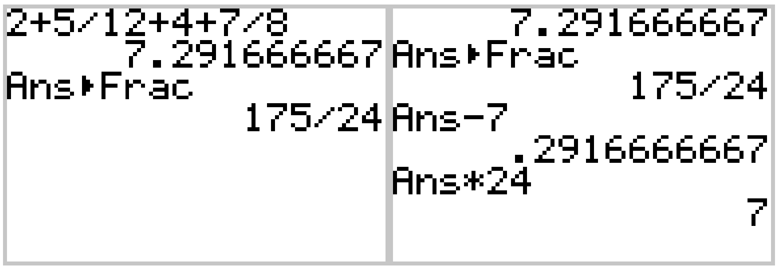
Breuken en haakjes

Waarschijnlijk heb je (net als ik) als antwoord op vraag 2d van de vorige opdracht als antwoord 7,291666667 gegeven. Dat is een benadering, want een exact antwoord zou moeten zijn:

$$2\frac{5}{12}+4\frac{7}{8}=2\frac{10}{24}+4\frac{21}{24}=6\frac{31}{24}=7\frac{7}{24}$$

Hopelijk niet een al te groot probleem... maar kan dat niet met de GR? Is er niet een breukenknopje? Op de Texas83/84 is er **geen** breukenknopje... maar wel een functie **FRAC**. (Zie **[MATH]**)
FRAC komt van **fraction**, het Engelse woord voor **breuk**.

Ter illustratie:



Misschien een beetje overdreven? Eigenlijk wel, maar het kan, dus toch maar 's gedaan...

Opdracht 1

Bereken **exact**:

a. $\frac{2}{3} \times \frac{6}{52}$

b. $4\frac{1}{3} \times 2\frac{2}{7}$

c. $\frac{2^3 - 1}{21}$

d. $\frac{2^{13} - 2^{12}}{2^{12} - 2^{11}}$

Als het goed is heb je bij de opdracht **haakjes** gebruikt. Vooral bij het invoeren van functies worden die haakjes nog wel 's vergeten. Bij 'functies en grafieken' komen we daar nog wel een keer op terug.

Opdracht 2

Bereken **exact**:

a. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$

b. Neem $x = 3$ en bereken $2^{3x-1} - 23$

c. Neem $x = -2$ en bereken $\frac{x^4 - 1}{2^x}$

d. $\sqrt{5\frac{11}{49}}$

Machten en wortels

Het is werkelijk een wonder... eerst heb je **optellen**, 5 + 7 = 12, dat is mooi...
…dan 4 + 4 + 4 + 4 + 4, dat is dus 5 keer 4 is 20... **vermenigvuldigen**... dat is dus herhaald **optellen**! Dan krijg je 5 · 5 · 5 · 5, maar dat is dan 5^4, herhaald **vermenigvuldigen**... maar als je dan **machten** gaat **vermenigvuldigen** dan moet je de exponenten **optellen**:

$$5^3 \cdot 5^5 = 5^8$$

Bent u daar nog? Zoals gezegd: machten en wortels zijn één pot nat... op je GR heb je een knopje voor machten: **[^]**, maar er is ook een aparte functie voor kwadraat (**[²]**) en onder **[MATH]** zelfs een aparte functie voor de derdemacht (**[³]**).

In plaats van √3 kan je ook schrijven $3^{\frac{1}{2}}$.

Ga maar na: $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$ dus... Op je GR heb je $\sqrt{\ldots}$, $\sqrt[3]{\ldots}$ en $\sqrt[x]{\ldots}$ (zie **[MATH]**), maar je kunt dus ook werken met gebroken exponenten. Sterker nog: bij differentiëren maak je daar zelfs juist veel gebruik van...

Opgave 1

Bereken **uit het hoofd** en controleer je antwoord met je **rekenmachine**:

a. 3^{-2}

b. 5^0

c. 0^7

d. 0^0

Opgave 2

Bereken op 2 decimalen nauwkeurig:

a. $\sqrt{\pi}$

b. $\sqrt[4]{3}$

c. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}\right)^2$

d. $-4^{-1\frac{1}{3}}$

Opgave 3

Aanwijzingen: Het **!** (= faculteit) kan je vinden onder **[MATH]** en dan kiezen voor **PRB** (probability = kansrekenen). De **e** (het grondtal van de natuurlijke logaritme) kan je vinden bij 2nd **[LN]**.

Bereken op 4 decimalen nauwkeurig:

a. $\frac{6}{6^6} \cdot \sqrt[6]{66} \cdot 6!$

b. $\dfrac{\left(1+\frac{1}{e}\right)^{25} - \left(1-\frac{1}{e}\right)^{25}}{e^{\sqrt{25}}}$

Uit de toets van november 2003

Grote en kleine getallen

Bereken **exact en met je GR** deze kwadraten:

$1^2 =$
$11^2 =$
$111^2 =$
$1111^2 =$
$11111^2 =$
$111111^2 =$
$1111111^2 =$
$11111111^2 =$
$111111111^2 =$

Je GR laat het bij 111111^2 al af weten. Dat is koren op de molen voor de gedachte dat de menselijke geest voorlopig nog superieur is aan elke vorm van kunstmatige intelligentie. Volgens de GR:

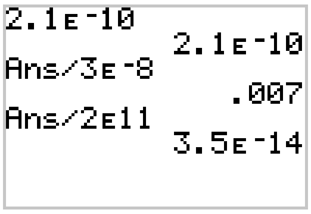
111111^2=1.234565432E10

Dat laatste getal staat voor $1{,}234565432 \cdot 10^{10}$ Dat is de manier om grote en kleine getallen weer te geven. Dat heeft een praktische reden in de zin dat je maar 14 tekens hebt om een getal op te schrijven en een getal in wetenschappelijke notatie leest makkelijker.

Een getal als 0,0000000000000000000000000032 is lastig te lezen, maar geschreven als $3{,}2 \cdot 10^{-26}$ een stuk **duidelijker**.

Invoeren

Je kunt grote en klein getallen in je GR invoeren met **[EE]**. Hiernaast zie daar een aantal voorbeelden van.



Opgave 2

Bereken met je rekenmachine:

a. 9^{99}

b. $69!$

c. $0{,}1 \cdot 9 \cdot 10^{-99}$

d. 3^{333}

Bijzondere getallen

In de wiskunde kom je een aantal interessante constanten tegen. We noemen hier π, **e** en ϕ. Op je GR kan je π en **e** vinden als aparte 'knopjes'.

- Op **http://members.aol.com/jeff570/constants.html** kan je 't een en 't ander lezen over de **geschiedenis** van een aantal constanten.

Opgave 1

Typ in je GR eerst een **1**, toets **[ENTER]** en tik vervolgens **1+1/Ans** en dan **[ENTER]**. Je krijgt dan **2**. Toets nog een keer op **[ENTER]** en nog eens... ga hier mee door tot het getal niet meer verandert. Het getal dat je zo krijgt is een benadering voor ϕ.
(spreek uit als phi, het guldensnedegetal)

- Ga na dat $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Opgave 2

Bereken **exact**:

a. $2 \cdot \left(\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)^2$

b. $\frac{2\pi}{\cos \pi}$

c. $\sqrt{\frac{1}{\pi^2 \cdot \frac{1}{\pi^4}}}$

d. $e^{\ln(2\pi)} - \ln\left(2^{2\pi}\right)$

Uren, dagen, maanden, jaren…

Uren, dagen, maanden, jaren, vliegen als een schaap door 't veen...

Opgave 1

Een auto rijdt met een gemiddelde snelheid van 77 km/uur en legt daarbij een afstand af van 102 km. Hoelang doet de auto over deze reis?
(Geef je antwoord in uren en minuten)

Opgave 2

Een auto legt een afstand af van 125 km en doet daar 2 uur en 25 minuten over.
Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur op 1 decimaal nauwkeurig.

Opgave 3

Op woensdag 19 juli 2006 om een uur of 8 's avonds is Frits 424.291 uur oud.

a. In welk jaar is Frits geboren?
b. In welke maand is Frits geboren?
c. Op welke dag is Frits geboren?
d. Weet je ook welke dag van de week dat was?

Tabellenboekje

Logaritmen

We zagen al eerder dat je bij het vermenigvuldigen van machten met gelijk grondtal de exponenten op mag tellen. Dat is bijzonder, want als je bij een willekeurige vermenigvuldiging de getallen zou kunnen schrijven als machten van bijvoorbeeld 2 dan zou je de exponenten kunnen optellen... en dus kunnen 'vermenigvuldigen zonder te vermenigvuldigen'.

Logaritmen zijn uitgevonden om makkelijker te kunnen vermenigvuldigen. Stel je maar eens voor: ik maak een lijstje met de machten van 2 (zie rechts). Het is niet zo moeilijk om dit lijstje verder uit te breiden. Nu wil ik berekenen 16 × 8 Ik kijk in mijn lijstje en zie dat: $16 = 2^4$ en $8 = 2^3$, dus: $16 \times 8 = 2^4 \times 2^3 = 2^7 = 128$ Dat is bijzonder! Ik kan dus nu **vermenigvuldigen** door **op te tellen**.	$2^2=4$ $2^3=8$ $2^4=16$ $2^5=32$ $2^6=64$ $2^7=128$ $2^8=256$ $2^9=512$ $2^{10}=1024$ $2^{11}=2048$

Opgave 1

Bereken op dezelfde manier:

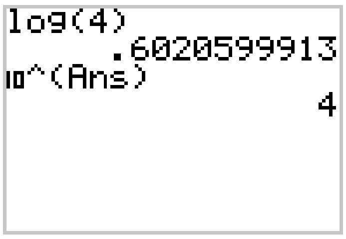
a. 4×32

b. $256 : 16$

c. $\sqrt{256}$

Dat lijkt handig maar de praktische toepasbaarheid valt nogal tegen, want niet alle getallen zijn op een eenvoudige manier te schrijven als machten van 2. Je zou dan voor 'alle getallen' lijsten moeten gaan maken... Dat lijkt niet zo zinvol, maar in de praktijk (voor de uitvinding van de rekenmachine) bestonden die lijsten wel degelijk! In tabellenboekjes kan je dit soort lijsten vinden, maar dan wel met **grondtal 10**. Deze getallen heten **logaritmen** en geloof het of niet die logaritmen zijn nog steeds hele nuttige 'dingen'. Ze worden nog steeds veel gebruikt...

De uitdrukking **log(4)** geeft de exponent als je **4** als **macht van 10** zou schrijven, dus: $10^{\cdots}=4$. Met je GR kan je gemakkelijk een benadering vinden voor dit getal.



Op je GR zit het knopje **[LOG]** waarmee je dus de **logaritmen met grondtal 10** kan benaderen. Anders gezegd als je praat over **LOG** dan praat je over logaritmen met het grondtal 10.

Maar je kunt voor elk willekeurig grondtal met logaritmen rekenen ($g>0$ en $g\neq 1$), dus ook met grondtal 3 of $\frac{1}{2}$. Je schrijft dan het grondtal bij de logaritme:

${}^{3}\log(27)$ of ${}^{\frac{1}{2}}\log(8)$

Maar voor alle logaritme geldt in ieder geval de hoofdregel:

$$g^{a} = b \Leftrightarrow a = {}^{g}\log b$$

(met $g>0$ en $g\neq 1$ en $b>0$)

Veel rekenregels voor de logaritmen kan je hier uit af leiden.

Probleem

Nu is echter het probleem dat je GR geen functie heeft voor logaritmen met een ander grondtal dan **10** of **e**. Als je uit zou willen rekenen wat ${}^{2}\log(8)$ of ${}^{3}\log(81)$ is dan gaat dat niet 'zomaar'. Daar moet je eerst iets voor **doen**.

Er geldt: ${}^{a}\log b = \dfrac{\log b}{\log a}$

Het 'bewijs':

$$a^{{}^{a}\log(b)} = b$$

$$\log\left(a^{{}^{a}\log(b)}\right) = \log(b)$$

$${}^{a}\log(b)\cdot\log(a) = \log(b)$$

$${}^{a}\log(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

Opgave 2

Bereken op 3 decimalen nauwkeurig:

a. ${}^{2}\log(6)$

b. ${}^{3}\log(6)$

c. $\log(6)$

d. ${}^{\frac{1}{2}}\log(6)$

Opgave 3

Bereken **exact**:

a. ${}^{2}\log(8)+{}^{4}\log(16)$

b. ${}^{0,5}\log(32)+{}^{2}\log(32)$

c. ${}^{2}\log(16)+{}^{4}\log(16)+{}^{8}\log(16)$

d. ${}^{0,1}\log(10.000)$

Opgave 4

Los op:

a. ${}^{3}\log(2x^2-3)=6$

b. ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4x}\right)=4$

c. ${}^{2}\log\left(4-30x^2\right)=-2$

Opgave 5

Los op:

a. $1\frac{1}{2}\cdot 6^x=54$

b. $7\cdot 25^x=1\frac{2}{5}$

c. $3^{2x+2}\cdot 9^x=729$

d. $\frac{4}{2^x}=8^{\frac{1}{2}x}$

Hoeken en goniometrische verhoudingen

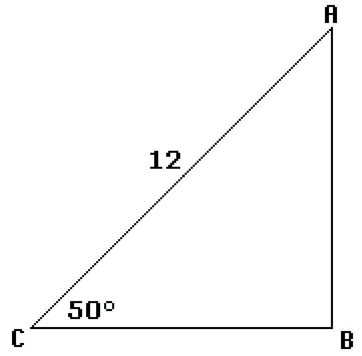
Voorbeeld 1

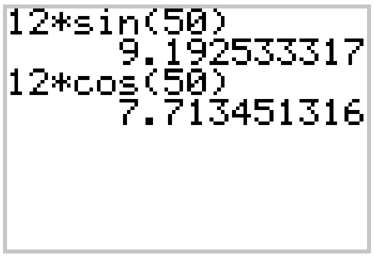
Hiernaast zie je een rechthoekige driehoek met AC=12 en ∠A=50°. Bereken de lengte van AB en BC op 1 decimaal nauwkeurig.

Uitwerking

$$\sin\angle C=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \sin 50°=\frac{AB}{12}\Rightarrow AB=12\cdot\sin 50°\approx 9{,}2$$

$$\cos\angle C=\frac{BC}{AC}\Rightarrow \cos 50°=\frac{BC}{12}\Rightarrow BC=12\cdot\cos 50°\approx 7{,}7$$





Zorg dat de GR ingesteld staat op **graden** (zie **[MODE]**)

Opgave 1

Tijdens een onweersbui ziet Reinout een bliksemflits uit een wolk komen onder een hoek van 40°. Vijf seconden later hoort hij de donderslag.

a. Bereken de hoogte van de wolk in gehele meters.
   Gebruik hierbij dat de snelheid van het geluid 333 m/s is.

Enige tijd later ziet Reinout de wolk onder een hoek van 25° de wolk zit dan juist boven het plaatsje Laren.

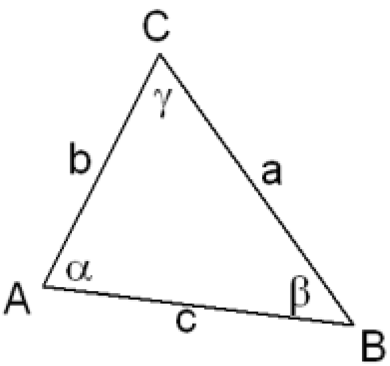
b. Hoe ver is Reinout van Laren af?
   Gebruik dat de hoogte van de wolk niet is veranderd.

Opgave 2

- In de rechthoekige driehoek ABC geldt: ∠A=90°, AB=23 en BC=33.
  Bereken ∠B in graden nauwkeurig.

Sinusregel en cosinusregel

In een willekeurige driehoek ABC geldt:



Cosinusregel:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Sinusregel:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Opgave 3

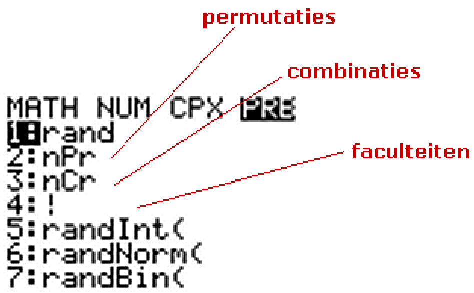
- Gegeven is een driehoek met a=5, b=6 en c=7.
  Bereken ∠A in graden nauwkeurig.

Opgave 4

- Gegeven is de driehoek ABC met ∠A=35, BC=6 en AC=9.
  Bereken ∠B in graden nauwkeurig.

Faculteiten, permutaties en combinaties

Onder **[MATH]** kan je van alles vinden. Bij bijvoorbeeld **PRB** (van probabilty = kans) kan je **permutaties**, **combinaties** en **faculteiten** vinden.



Permutaties

Als je **k** elementen kunt kiezen uit een verzameling van **n** elementen, waarbij ieder element hoogstens één maal gekozen wordt en waarbij **wel** gelet wordt op de volgorde van de elementen dan heb je te maken met een **permutatie** of **rangschikking**.
Het aantal permutaties kun je berekenen met de volgende formule:

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Je ziet in de formule de faculteiten staan, maar met de GR kan je dat sneller. Om $(10)_3$ uit te rekenen toets je in je GR:

10	[nPr]	3	[ENTER]

...en als het goed is komt daar dan 720 uit.

Combinaties

Als je **k** elementen kiest uit een verzameling van **n** elementen, waarbij ieder element hoogstens één maal wordt gekozen en waarbij **niet** gelet wordt op de volgorde dan heb je te maken met een **combinatie**.
Het aantal combinaties kan worden berekend met de volgende formule:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Je ziet hier ook weer faculteiten staan, maar met de GR kan je dat sneller. Om $\binom{10}{3}$ uit te rekenen toets je in je GR:

10	[nCr]	3	[ENTER]

...en als het goed is komt daar dan 120 uit.

Faculteiten

Met **n** verschillende elementen uit een verzameling van **n** elementen kunnen **n!** (spreek uit als n faculteit) verschillende permutaties (rangschikkingen) gemaakt worden. Men spreekt bij 'k uit n permutaties' ook wel van **variaties** en dan over **permutaties** bij 'n uit n rangschikkingen'. Maar tegenwoordig spreken we in beide gevallen over **permutaties**.

$$12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479.001.600$$

..en dat is al heel wat... dat betekent dat als je bijvoorbeeld 12 voorwerpen hebt je meer dan 470 miljoen verschillende volgordes kan maken... Hoe dat precies zit? Voor de eerste plaats kan je kiezen uit 12 mogelijke voorwerpen, voor de tweede plaats uit 11, enz. Dus in totaal op 12! manieren...

Opgave 1

Bereken met je rekenmachine:

a. $\binom{8}{3}$

b. $(8)_3$

c. $8!$

d. $\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}$

Opgave 2

Op tafel staan 6 verschillende voorwerpen. Je kiest daar (zonder teruglegging) 3 voorwerpen uit.

a. Op hoeveel manieren kan dat als de volgorde van belang is?
b. Op hoeveel manieren kan dat als de volgorde niet van belang is?

Kansverdelingen

Binomiale verdeling

In het geval van **n** waarnemingen, alle onafhankelijk, elk resulterend in succes of mislukking, en elk met eenzelfde kans **p** op succes, spreekt men van een **binomiale**

kansverdeling.
De kans op een bepaalde gebeurtenis kan men berekenen met de volgende formule:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

De **verwachtingswaarde** en de **standaarddeviatie** kan je berekenen met:

$$\mu=n\cdot p \text{ en } \sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$$

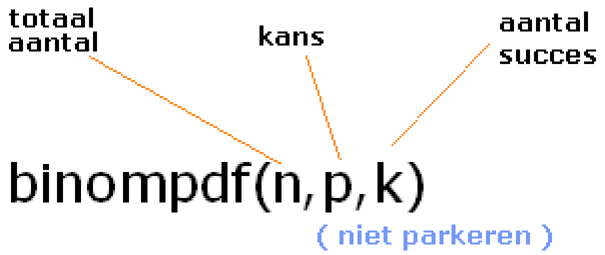
Voorbeeld

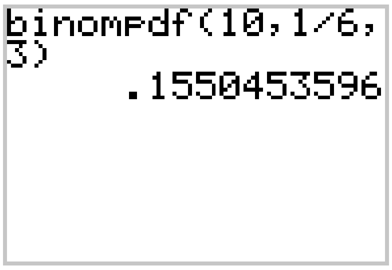
We gooien met 10 dobbelstenen. Wat is de kans op precies 3 keer een zes?
Invullen levert:

$$P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7\approx 0{,}155$$

Met de GR

Met de GR kan dat sneller! Via **[DISTR]** (distribution = verdeling) en dan kiezen voor **binompdf()**. Dat staat voor 'Binomial probability distribution function'. De vraag is alleen even wat je precies als parameters moet opgeven. Wel aan...





[DISTR]	**binompdf(**	10	,	1/6	,	3	)	**[ENTER]**

Opgave 1

Een stochast X is binomiaal verdeeld met n=12, p=0,25.

- Bereken P(X=5)

De binomiale verdeling cumulatief

Op je GR staat ook nog **binomcdf()**, dat lijkt sprekend op de binomiale verdeling maar dan in plaats van **p** staat er een **c.** Die 'c' komt van 'binomial cumulative probability distribution function'.
Deze functie geeft de cumulatieve kans, dus bijvoorbeeld niet P(X=5), maar P(X ≤ 5).

P(X ≤ 5) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)

Anders geformuleerd:

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} P(X = k)$$

Een cumulatieve kans kan wel 's handig zijn...

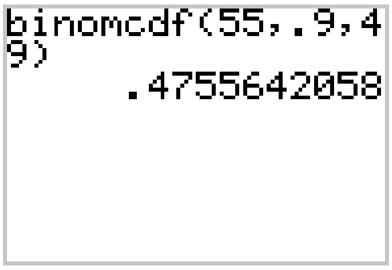
Voorbeeld

Voor een tentamen algebra hebben zich 55 studenten ingeschreven. De docent heeft zich echter een beetje vertelt en heeft maar 50 toetsen gekopieerd. Het is bekend dat ongeveer 10% van de studenten die zich inschrijven voor een tentamen niet komt opdagen.

- Bereken op 3 decimalen nauwkeurig de kans dat er minimaal één toets overblijft.

Uitwerking

Dit is een binomiaal kansprobleem met n=55, p=0,9 (de kans dat een student komt opdagen) en er wordt gevraagd naar P(X ≤ 49). Gelukkig... dat kan met de cumulatieve binomiale verdeling.:-)



Opgave 2

Gebruik de gegevens van het voorbeeld hierboven.

- Bereken op 3 decimalen nauwkeurig de kans dat er meer dan 50 studenten op komen dagen.

Functies, afgeleiden, buigpunten en integralen

Wat is een functie?

Een **functie** kent aan elk mogelijk begingetal (meestal x) een uitkomst (meestal y) toe. De uitkomst noemt men **functiewaarde**.

Je kunt hierbij denken aan een machientje dat bij elk getal dat je er in stopt één of meerdere rekenkundige bewerkingen op dat getal los laat en het resultaat als uitvoer geeft.

Je kunt functies op verschillende manieren noteren:

- rekenschema
  $x \xrightarrow{+2} x+2 \xrightarrow{..^2} (x+2)^2 \xrightarrow{\sqrt[3]{..}} \sqrt[3]{(x+2)^2}$
- vergelijking of formule
  $y = \sqrt[3]{(x+2)^2}$
- pijlnotatie
  $f : x \rightarrow \sqrt[3]{(x+2)^2}$
- haakjesnotatie
  $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2}$

De getallen die je als invoer van een functie kan/mag gebruiken noemen we **originelen**. De getallen die je als uitvoer van de functie krijgt noemen we **beelden**.

De verzameling van alle originelen heet **domein** en de verzameling van beelden heet **bereik**.

- Hoe vind je het **domein**?

  Als het domein niet is gegeven dan kunnen er problemen ontstaan in de volgende gevallen:

  - In het functievoorschrift komt een **wortel** voor.

    Het getal onder het wortelteken moet groter of gelijk zijn aan nul.

  - Er komt een **deling** voor in het functievoorschrift.

    Je kunt niet delen door nul. Zorg er voor dat het getal waardoor je deelt niet nul kan worden.

  - In het functievoorschrift staat een **logaritme**! ${}^{g}\log(a)$ is alleen gedefinieerd voor $a>0$.
  - ...

- Hoe vind je het **bereik**?

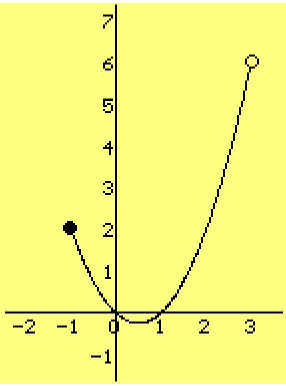
  Kijk naar de mogelijke waarden die de functie aan kan nemen op het domein. Hiervoor teken je meestal de **grafiek**. Eventueel kun je **maxima** en **minima** uitrekenen. En let ook op **asymptoten**.

Intervalnotatie

Voorbeelden:

[-3,4]	alle getallen van -3 tot en met 4
<-3,4]	alle getallen tussen -3 en 4 of 4 zelf.
<-5,→>	alle getallen groter dan -5
[-5,→>	alle getallen groter of gelijk aan -5
<←,√2]	alle getallen kleiner of gelijk aan √2

Voorbeeld

Opdracht	**Oplossing**	**Grafiek**
Gegeven is de functie: $f: x \to x^2 - x$ Met D_f = [-1,3>	De grafiek is een parabool. f(-1) = 2 f(3) = 6 Symmetrie-as: x = $^1/_2$ Minimum is f($^1/_2$) = -$^1/_4$	
Bepaal het bereik	**Het bereik is [-$^1/_4$,6>**	**Wat kan y zijn ?**

Opgave 1

Gegeven is de functie f(x) = x^2-x met D_f=[-10,10].

- Bepaal het **bereik** van f bij het gegeven domein.

Opgave 2

Gegeven is de functie f(x) = 3·√(x-4) + 2 met x∈ℝ

- Bepaal het **domein** en **bereik** van f.

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2}$ met x∈ℝ

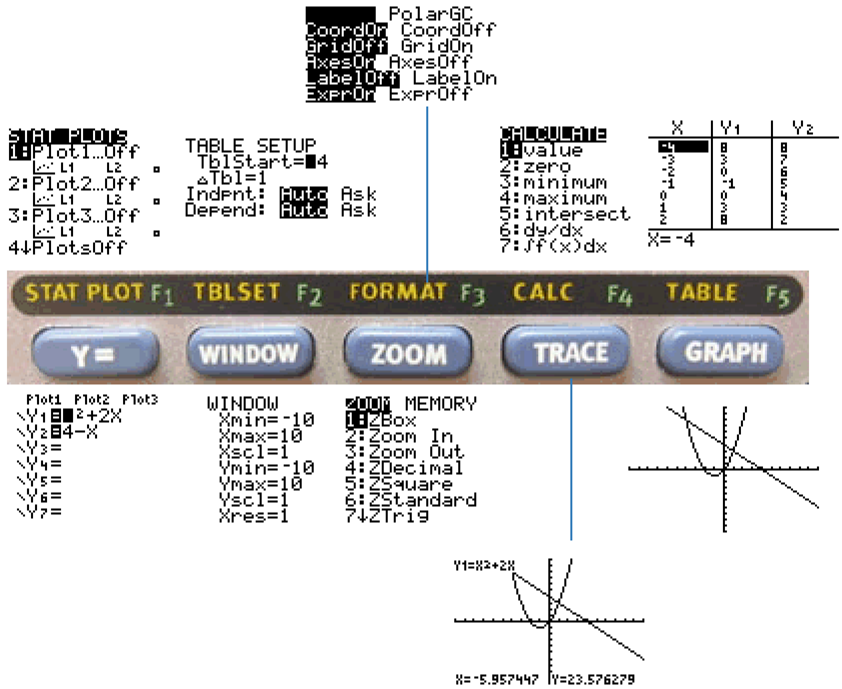
- Bepaal het **domein** en **bereik** van f

Grafieken tekenen, schetsen en plotten

Er is een verschil tussen grafieken tekenen, schetsen of plotten. Volgens het advies nomenclatuur:

> **TEKEN DE GRAFIEK**
> Bij deze opdracht worden aan de kwaliteit (zoals nauwkeurigheid, saillante punten, speciale vorm) van de tekening eisen gesteld. In het geval slechts een globale schets van een grafiek wordt gevraagd, worden omschrijvingen als 'geef in een grafiek een mogelijk verloop aan ....', 'licht je antwoord toe met een schets' of 'maak een schets van de grafiek waaruit blijkt dat…' gebruikt. Indien een (tekstuele) toelichting bij de tekening gewenst is, moet daar expliciet om gevraagd worden.

Als er bedoeld wordt dat je de grafiek met je GR moet 'tekenen' dan spreken we over '**plotten**'. Hieronder zie je een soort overzichtje van de mogelijkheden:



Bij **[Y=]** voer je het functievoorschrift in, met **[WINDOW]** stel je vervolgens de grenzen van de x- en y-as vast en dan kan je met **[GRAPH]** de grafiek plotten. Daarna kan je eventueel in- of uitzoomen met **[ZOOM]**, eventueel met **[WINDOW]** opnieuw de grenzen van de x- en y-as aanpassen, met **[TRACE]** kan je 'over de grafiek wandelen' en met **[CALC]** kan je allerlei 'zaken' uitrekenen, zoals functiewaarden, nulpunten, maxima, minima en nog zo wat...

Je kunt ook een tabel maken met functiewaarden. Dit doe je met **[TABLE]**. Je kunt 'start' en 'stapgrootte' kiezen bij **[TBLSET]**.

...en met **[FORMAT]** kan je allerlei 'zaken' instellen rondom het weergeven van functievoorschrift, coördinaten, assen, e.d. in het grafiekenscherm.

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $f(x)=x^2+2x$ en $g(x)=4-x$

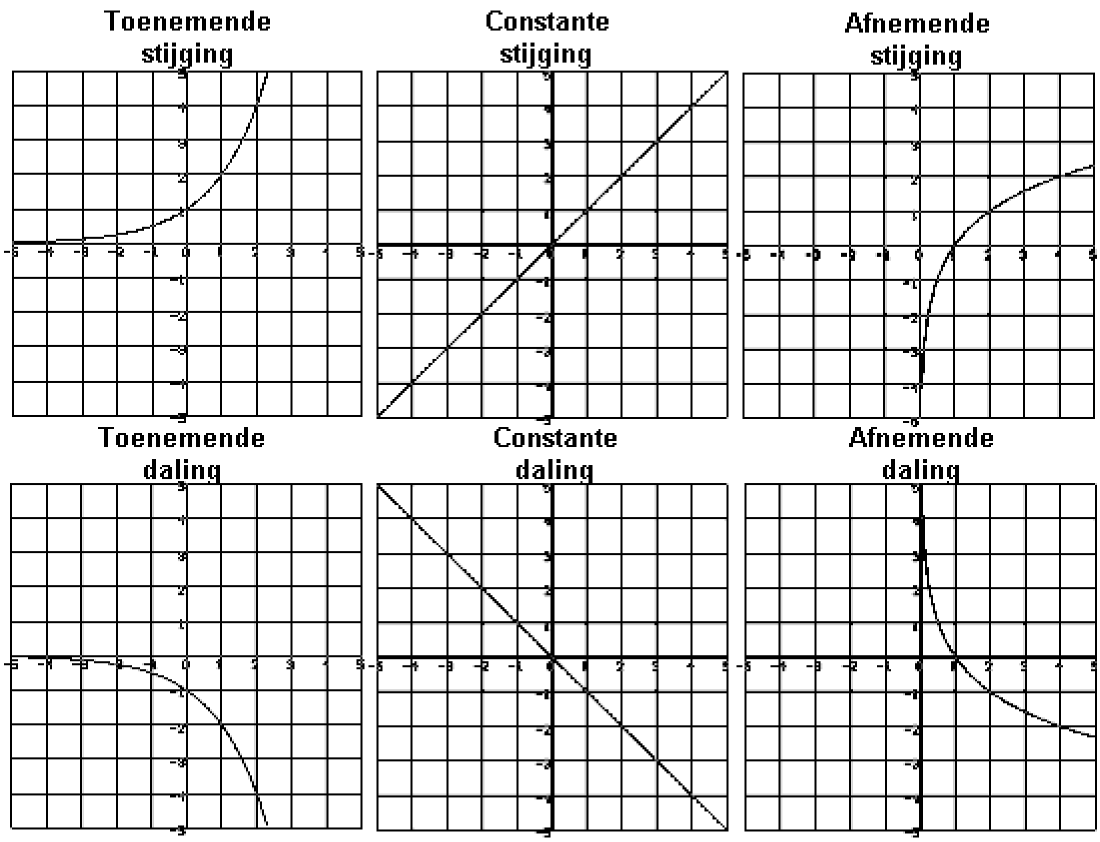
a. Plot de grafieken van f en g.
   Kies daarvoor het standaard 'window' [-10,10]×[-10,10]
b. Geef de tabel met functiewaarden voor f en g voor $x \in [-4,2]$ met stapgrootte 1.
c. Bepaal f(-6) met behulp van **[CALC]**.
d. Bepaal de coördinaten van de nulpunten van f en de coördinaten van het nulpunt van g m.b.v. je GR.
e. Bepaal de coördinaten van de snijpunten van f en g.
f. Bepaal het minimum van f.
g. Geef het bereik van f en g.

Stijgen en dalen

Als je naar functies kijkt kan je 6 soorten stijgen en dalen onderscheiden:

- Toenemende stijging
- Constante stijging
- Afnemende stijging
- Toenemende daling
- Constante daling
- Afnemende daling

Hieronder zie je daarvan een overzicht:



Opgave 1

Gegeven $f(x)=x^3-4x$
De functie f heeft bij x=-2 een (lokaal) maximum en bij x=2 een (lokaal) minimum.
Vul in (gebruik **exacte** waarden):

	stijgen	dalen	toenemende stijging	afnemende stijging	toenemende daling	afnemende daling
interval:						

Opgave 2

Gegeven $f(x) = \dfrac{x^5 + 4}{x^2}$

Vul in (benader op 1 decimaal nauwkeurig):

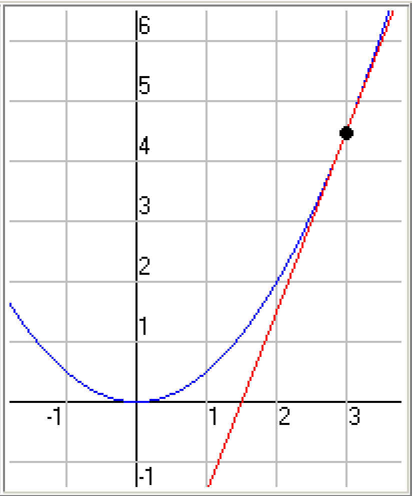
	stijgen	dalen	toenemende stijging	afnemende stijging	toenemende daling	afnemende daling
interval:						

Raaklijnen

Hiernaast zie je de grafiek van een functie f met de raaklijn in het punt x=3.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn zegt iets over de **helling** van de grafiek van f. Het zou aardig zijn als je bij een willekeurige functie iets zou kunnen zeggen over de helling in elk punt van de grafiek. Zoiets is zelf ook weer een functie en wordt wel **hellingsfunctie** of **afgeleide** genoemd.

Bij **Analyse 1-1** krijg je daar nog 't een en ander over te horen. Het 'berekenen' van de afgeleide heet **differentiëren.** In deze cursus gaan we kijken naar het differentiëren met behulp van de **GR.**



Voorkennis

- Een vergelijking bepalen van een lijn door twee gegeven punten.
- Een vergelijking bepalen van een lijn door een punt met gegeven richtingscoëfficiënt.
- Differentiequotiënten berekenen in geval de functie is gegeven door een tabel, grafiek of formule.
- Differentiequotiënten interpreteren als maat voor de gemiddelde verandering op een interval.
- Bij afnemende stapgrootte differentiequotiënten interpreteren als benadering van de steilheid of helling van de grafiek in een gegeven punt.
- Het differentiaalquotiënt gebruiken als maat voor de lokale verandering van een functie en als richtingscoëfficiënt van de raaklijn.
- De helling in een punt numeriek-grafisch benaderen als de functie gegeven is door een formule.

Opgave 1

a. De lijn l gaat door de punten A(-2,-3) en B (0,2). Geef de formule van l.
b. De lijn k gaat door het punt C(3,2) en heeft een richtingscoëfficiënt van $2^{1}/_{3}$. Geef de formule van k.
c. De horizontale lijn m gaat door A. Geef de vergelijking van m.

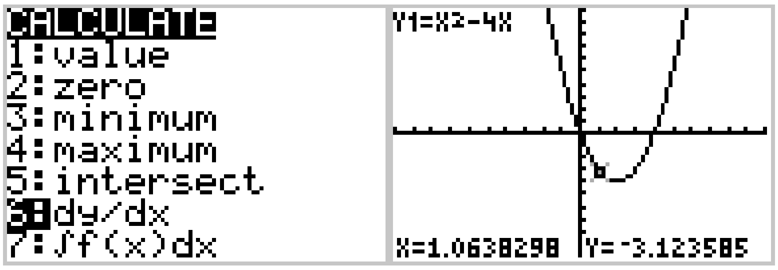
Opgave 2

Gegeven de functie $f(x)=x^2-4x$

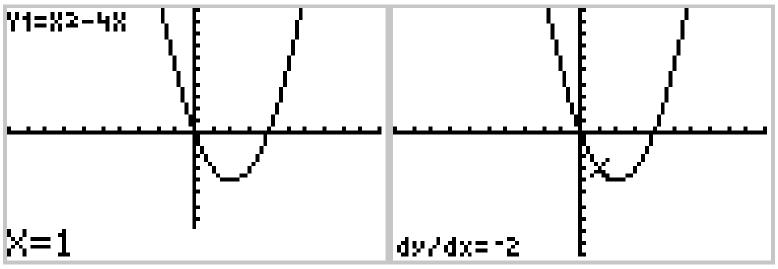
a. Bereken de gemiddelde toename op het interval [1,4].
b. Benader met behulp van het differentiequotiënt de helling in het punt (1,-3).

Met de GR

De laatste vraag kan je ook heel goed doen met je GR.
Kies bij **[CALC]** voor **6:dy/dx**:



Je krijgt dan de grafiek in beeld. Met de pijltjestoetsen kan je dan een punt selecteren waar je een benadering voor het differentiaalquotiënt wilt weten. Maar handiger is om gewoon **1** in te toetsen (we willen immers de helling weten in x=1). Je krijgt dan **X=1** in beeld... klik op **[ENTER]** en je krijgt wat je zocht:



De helling in (1,-3) is -2.

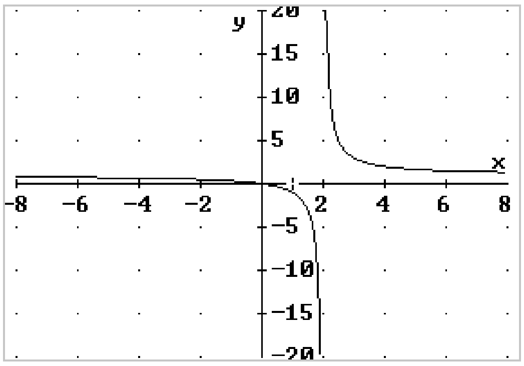
Opgave 3

- Bereken op dezelfde manier de helling in het punt x=2, x=3 en x=4.

Asymptoten

Voorbeeld

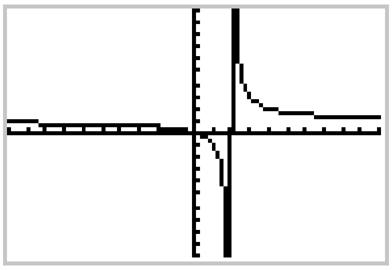
We kijken naar de functie $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$.



Zoals je ziet 'loopt' de grafiek links van x=2 naar beneden. Rechts van x=2 zie de grafiek dan weer van boven omlaag 'lopen'.

Een dergelijk 'verschijnsel' noemen we **asymptoot**. In dit geval dus een verticale asymptoot. De grafiek heeft ook een horizontale asymptoot bij y=1.

Je GR heeft moeite met asymptoten, zoals je aan de plot van dit voorbeeld kan zien:



Je GR 'doet alsof' de grafiek bij x=2 plotseling steil omhoog loopt. We zagen al dat dit niet het geval is.

Opgave 1

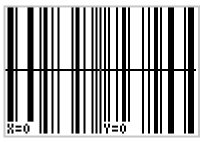
Plot op [-10,10]×[-10,10] grafieken van de volgende functies en verklaar wat je ziet.

a. $f: x \rightarrow \dfrac{x}{x^2-3}$

b. $g: x \rightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$

c. $h: \rightarrow x+\dfrac{1}{x}$

d. $k: x \rightarrow 5\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$



Opgave 2

Hieronder staat 3 functies. Onderzoek deze functies op asymptoten.

a. $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{64-x^2}}$

b. $g(x)=\dfrac{\sqrt{64-x^2}}{8x}$

c. $h(x)={}^2\log(2x^2-4x+2)$

Hellingsfunctie

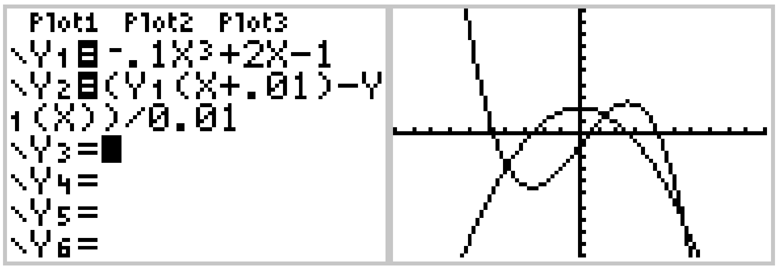
Met behulp van het differentiequotiënt en een 'kleine stapgrootte' kan je bij elke functie een benadering van de hellingsfunctie of afgeleide vinden.

Voorbeeld

Voor de functie $f(x)=-0{,}1x^3+2x-1$ geeft de volgende uitdrukking een benadering voor de hellingsfunctie:

$$f'(x)\approx\frac{f(x+0{,}01)-f(x)}{0{,}01}$$

Met de GR kan je dat gebruiken:



Dat levert in het grafiekenscherm toch een aardig plaatje op waar je veel kan ontdekken. Je kunt bijvoorbeeld aan de **nulpunten** van de **afgeleide** zien waar de **maxima** en **minima** van f te vinden zijn. De raaklijn aan f is daar immers horizontaal... dus is de richtingscoëfficiënt of helling in die punten gelijk aan nul.

Ook interessant is dat de **afgeleide** een **maximum** heeft. Wat betekent dat? In dat punt gaat **toenemende stijging** over in **afnemende stijging**. Voor de grafiek van f betekent dit dat je te maken hebt met een **buigpunt**.

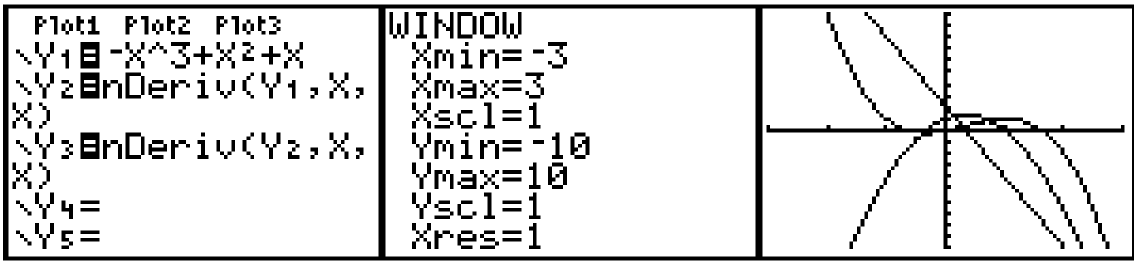
Opgave 1

- Plot de afgeleide van $f(x)=0{,}1(x-2)^3-x$. Bepaal met behulp van de nulpunten van de afgeleide de extremen van f.
- Plot de afgeleide van $g(x)=0{,}01(x-2)^5+x$. Bepaal met behulp van het minimum van de afgeleide de coördinaten van het buigpunt van g.

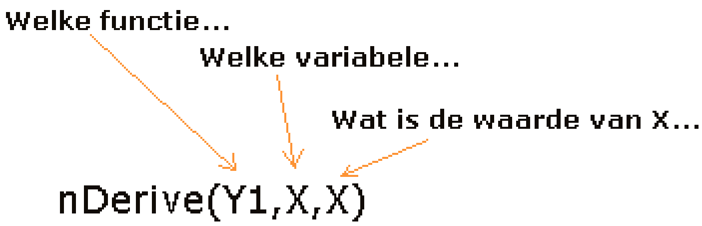
Opgave 2

- Plot de afgeleide van $f(x)=e^x$. Wat valt je op?

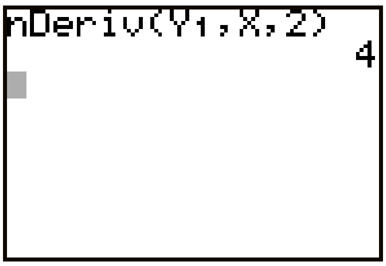
Maar het kan nog mooier. In je GR is de 'benadering voor de afgeleide' al ingebouwd. De functie heet **nDeriv()**. Je kan het vinden onder **[MATH]**. Als je dan in **Y1** een functie zet en je wilt de afgeleide en de tweede afgeleide plotten dan kan dat zo:



Je kunt de parameters van deze **nDerive()** zo zien:



Als je de afgeleide wilt weten in een punt, bijvoorbeeld x=2 dan kan je **nDerive()** ook gebruiken vanuit het rekenscherm:



Opgave 3

- Gebruik **nDeriv()** om de eerste en de tweede afgeleide te plotten van f. $f(x)=\sin(2x)$ en $0 \leqq x \leqq 2\pi$ en $-5 \leqq y \leqq 5$.

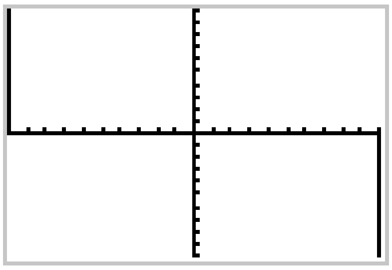
Opgave 4

- Waar of niet waar? Als de tweede afgeleide van een functie f **nul** is dan heeft f in dat punt een **buigpunt**.

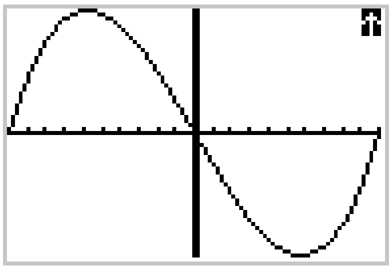
Toegepast

Stel je eens voor dat je de functie $f(x)=x(x^2-100)$ wilt bekijken en geen idee hebt waar je mee bezig bent... behalve dan je precies weet hoe de GR werkt... (zou kunnen toch?)

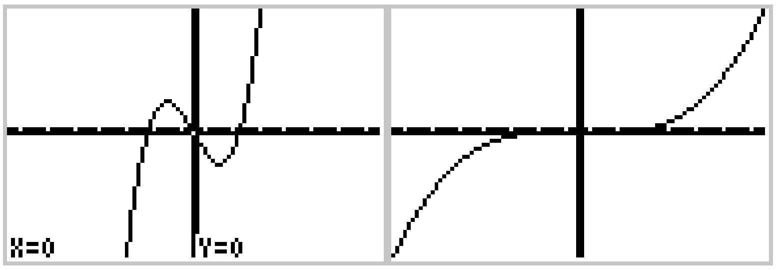
Ik plot de grafiek eerst maar 's met **ZStandard**. Ik krijg dan dit plaatje:



Dat is niet erg informatief. Dan maar 's **ZoomFit** gebruiken:



Dat is beter, maar klopt het wel? Of klopt dit alleen voor $-10 \le x \le 10$? Dan maar 's **ZoomOut** gebruiken. Dat is al beter. Daarna nog een keer **ZoomFit** gebruik... dat is dan toch wel weer minder...



Kortom: hoe kan je deze grafiek nu zo op het scherm krijgen dat je weet hoe het zit. Ik bedoel hoe kan je nu zeker weten dat er niet ergens anders (ver weg) nog niet een paar lokale maxima of minima te vinden zijn?

Dat kan je zien aan het functievoorschrift. Dit is een derdegraads functie en daarvan weet je (als je voldoende ervaring hebt) wel ongeveer hoe die er uit zien. Net als grafieken van andere **standaard functies**. Dit laatste komt straks...

Maar je kunt natuurlijk ook naar de **afgeleide** kijken... of... of...

Opgave 1

Hieronder staat een formule die het aantal vissen in een meer beschrijft als functie van de tijd (in jaren).

$$A(t) = \frac{2000}{1 + 25 \cdot 0{,}8^t}$$

a. Bereken het aantal vissen na 10 jaar.
b. Wanneer zijn er voor het eerst meer dan 1500 vissen?
c. In welk jaar neemt de populatie het meeste toe? (bij benadering)
d. Hoe groot is de grenswaarde? (Licht je antwoord toe!)

Opgave 2

De groei van het aantal bacteriën van een bacteriecultuur hangt onder andere af van het voedingspatroon, de temperatuur en de belichting. Uit onderzoek blijkt dat het aantal bacteriën van een bepaalde bacteriecultuur onder bepaalde omstandigheden gedurende de eerste vier weken benaderd kan worden door de formule:

$N = -100t^3 + 300t^2 + 900t + 1000 \ (0 \leq t \leq 4)$

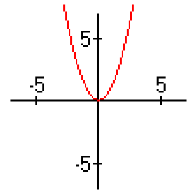
Hierbij is N het aantal bacteriën en t de tijd in weken na $t = 0$.

a. Bereken het maximale aantal bacteriën.
b. Bereken hoeveel bacteriën er gemiddeld per dag bijkomen gedurende de derde week. Rond je antwoord af op een geheel getal.
c. Bereken op welk tijdstip t tussen 0 en 4 het aantal bacteriën het sterkst stijgt.

Standaardfuncties

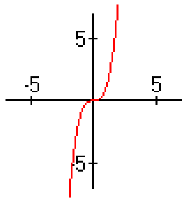
Hieronder zie je overzicht van een aantal **standaardfuncties**. Het 'idee' is dat je deze functies goed kent, op de hoogte bent van de eigenschappen van deze functies en bij gegeven functievoorschriften kan herkennen welke **transformaties** zijn toegepast op de bijbehorende standaardfunctie en hoe dat allemaal zit...

Overzicht van standaardfuncties



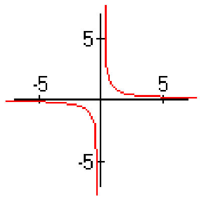
$y=x^2$

- parabool
- top (0,0)



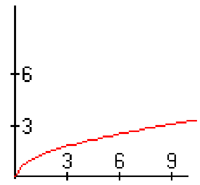
$y=x^3$

- buigpunt (0,0)



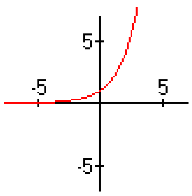
$y=1/x$

- hyperbool
- horizontale asymptoot y=0
- verticale asymptoot x=0



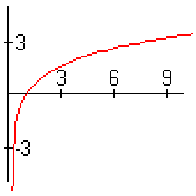
$y=\sqrt{x}$

- eindpunt (0,0)
- domein [0;→>



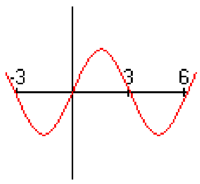
$y=2^x$

- asymptoot: y=0
- snijpunt y-as (0,1)
- bereik <0;→>



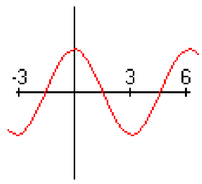
$y={}^2\log(x)$

- asymptoot x=0
- domein <0;→>
- snijpunt x-as (1,0)



y=sin(x)

- sinusoïde
- bereik [-1;1]
- periode 2π



y=cos(x)

- sinusoïde
- bereik [-1;1]
- periode 2π

Voorbeeld

De grafiek van $y=0{,}5\cdot\sqrt{(x-2)}+3$ is een **transformatie** van de standaardfunctie $y=\sqrt{x}$. Dit kan achtereenvolgens door:

- Translatie over $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Twee 'hokjes' naar rechts!
- Vermenigvuldiging met 0,5 t.o.v. de x-as
- Translatie over $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Drie 'hokjes' naar boven.

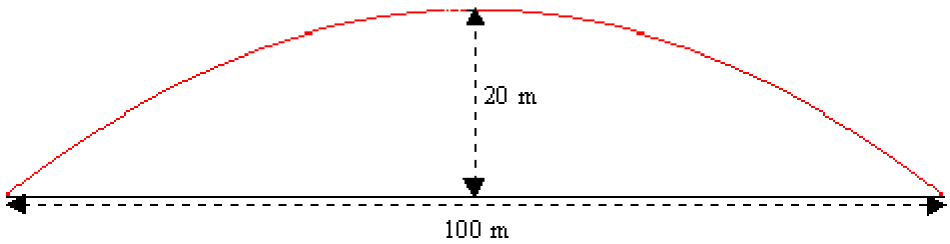
Practicum

Tijdens de **bijeenkomst** zullen we hierover een practicum doen waarbij we natuurlijk de GR gaan gebruiken om eens precies uit te zoeken hoe dit werkt...

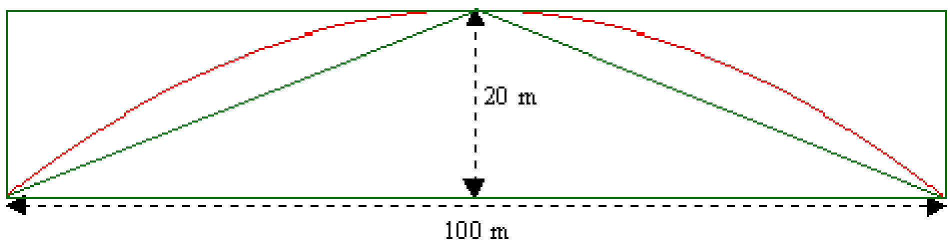
Benaderen van integralen

Wat is integreren?

Een architect ontwerpt een hal. De daklijn krijgt de vorm van een parabool. Hieronder zie je een schets van de voorgevel.



De architect wil weten wat de oppervlakte is van de voorgevel. Dat is lastig vanwege de gebogen vorm van de daklijn. Voor een 'schatting' zou je de oppervlakte van de voorgevel 's kunnen vergelijken met een rechthoek c.q. een driehoek:



De oppervlakte van de voorgevel ligt tussen 1000 (driehoek) en 2000 (rechthoek). Omdat van de rechthoekige driehoeken links- en rechtsboven ongeveer $^1/_3$ door de voorgevel wordt ingenomen zou ik gokken op 1333 m^2.

Definitie

Als f: $D \to \mathbb{R}$, dan noemen we F: $D \to \mathbb{R}$ een **primitieve** van f als voor $x \in D$ geldt: F'(x) = f(x).

Stelling
Als f continu op [a,b] en als F een primitieve is van f, dan geldt:
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Opmerkingen

1. Er bestaat niet zoiets als **de formule** voor een primitieve.
2. **Iedere continue functie**, gedefinieerd op een interval **heeft een primitieve**. Het is echter soms niet mogelijk een primitieve van een uit elementaire functies opgebouwde functie uit te drukken in elementaire functies. Voorbeelden daarvan zijn:

   $\int e^{-x^2}dx$ en $\int \frac{e^x}{x}dx$
3. Het symbool $\int f(x)dx$ noemt men ook wel de **onbepaalde integraal** van f. In dat geval spreekt men bij $\int_a^b f(x)dx$ van een **bepaalde integraal**.

Integreren

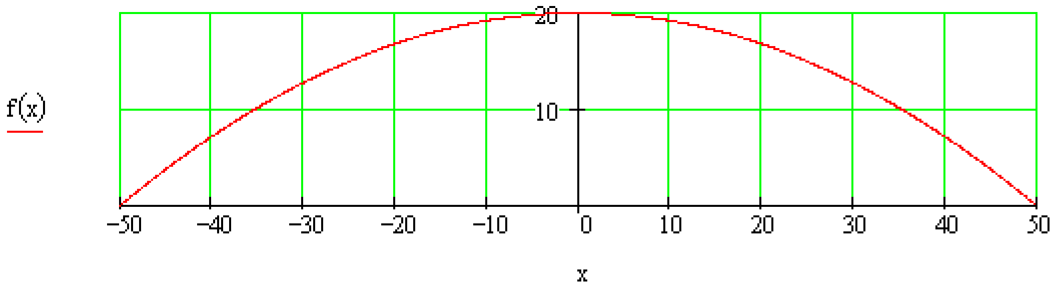
Vaak wordt **integreren** verward met **primitiveren**. Dat is echter iets heel anders: kortweg gaat integreren van een functie f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ over het berekenen van de oppervlakte van de grafiek van f, terwijl primitiveren wil zeggen dat je een functie F zoekt waarvoor geldt dat F'=f.

De twee begrippen integreren en primitiveren zijn voor functies van één variabele aan elkaar gekoppeld door de **hoofdstelling van de integraalrekening**:

Voor een continue functie f:[a,b]→ $\mathbb{R}$ met primitieve F geldt dat:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Opgave 1



- Laat zien dat $f(x) = -\frac{1}{125}(x+50)(x-50)$ een goede formule is voor de voorgevel hierboven.
- Laat zien dat $f(x) = 20 - \frac{x^2}{125}$ ook een goede formule is.

Opgave 2

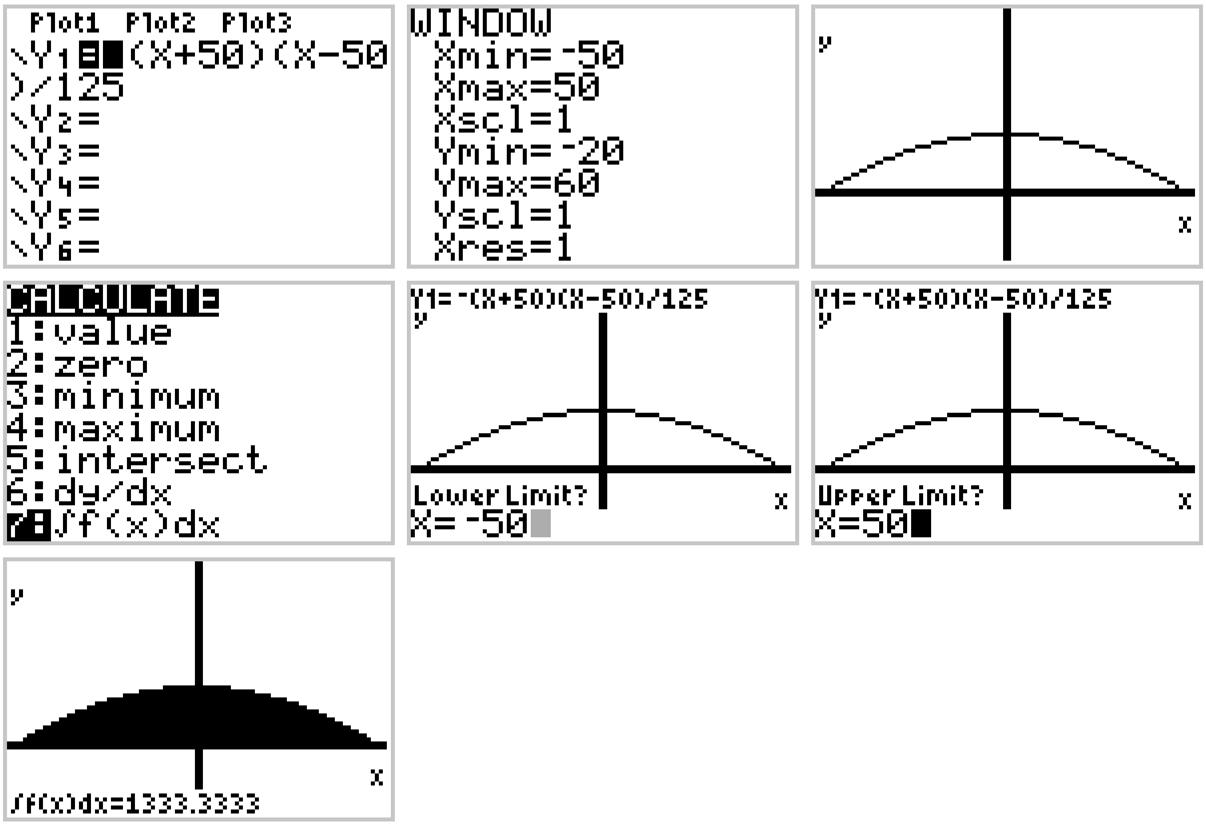
- Van welke functie(s) is $f(x) = 20 - \frac{x^2}{125}$ de **afgeleide**?

Om de oppervlakte onder de grafiek uit te rekenen zou je een **primitieve** van f moeten gebruiken en dan de grenzen invullen. Hieronder heb ik dat maar 's voorgedaan:

$$\int_{-50}^{50} 20 - \frac{x^2}{125}\,dx = \left[20x - \frac{x^3}{375}\right]_{-50}^{50} = 20 \cdot 50 - \frac{50^3}{375} - \left\{20 \cdot -50 - \frac{(-50)^3}{375}\right\} = 1333\frac{1}{3}$$

Met de GR

Via **[CALC]** en **7:∫f(x)dx** kan je bovenstaande (bepaalde) integraal benaderen:



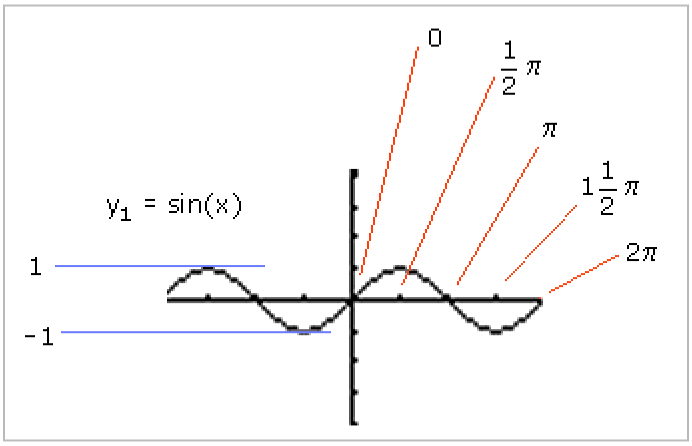
Opgave 3

- Benader met je rekenmachine: $\int_1^{10} \frac{x \cdot \ln(x)}{e^x} dx$

Goniometrische functies

De grafieken van sinus en cosinus

Als je met **Y1=sin(x)** en **ZTrig** uit **[ZOOM]** de grafiek van y = sin(x) tekent dan krijg je de volgende grafiek op je scherm:



De GR staat dan wel ingesteld op **radialen**. Op de assen staan met streepjes de verschillende waarden voor de hoeken aangeven. De grafiek 'loopt' links en rechts oneindig ver door en de functiewaarde 'varieert' van -1 tot 1. Dit is een standaard functie die je vaak zult tegen komen, net als y = cos(x) en y = tan(x) natuurlijk...

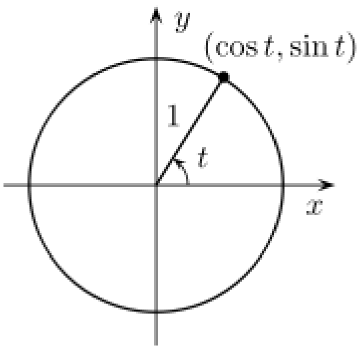
Opgave 1

- Plot ook de volgende functies:
  a. y = 2·sin x
  b. y = sin x + 2
  c. y = sin(x + 2)
  d. y = sin(2x)
- Geef bij a. t/m d. welke **transformatie** de 'toegevoegde 2' tot gevolg heeft.

Opgave 2

- Plot in een scherm de grafiek van y = sin(x) en y = cos(x).
- Door welke **translatie** kan je van de grafiek van de sinus de grafiek van de cosinus maken?

De eenheidscirkel



Hierboven zie je de **eenheidscirkel**. Het is een cirkel met een straal van 1. Je kunt punt T verplaatsen. De hoek is dan de hoek tussen het lijnstuk MT en het positieve deel van de x-as. Omdat de straal 1 is is de lengte van het 'rode lijnstuk' de **sinus** van de hoek en de lengte van het 'groene lijnstuk' de **cosinus** van de hoek.

Met behulp van de eenheidscirkel kan je al veel goniometrische formules zelf afleiden. Zo kan je vrijwel onmiddellijk zien dat $\mathbf{\sin^2 x+\cos^2 x=1}$, namelijk met de stelling van Pythagoras.

Je kan ook mooi zien wat **radialen** eigenlijk zijn. Het is namelijk de hoek uitgedrukt in de lengte van het cirkelboogje dat de 'hoek bestrijkt'. Een complete cirkel heeft een omtrek van 2π, dus een hoek van 30° komt overeen met $\frac{30}{180}$ ste deel van een halve cirkel en dat is $\frac{1}{6}\pi$ dus...

Opgave 3

- Geef de **exacte** waarden:

hoek	sinus	cosinus
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

Het omrekenen van graden en radialen en omgekeerd

Het omrekenen van radialen en graden en omgekeerd is niet moeilijk...

$$\text{radialen} \xrightarrow{:\pi} \ldots \xrightarrow{\times 180^\circ} \text{graden}$$
$$\text{graden} \xrightarrow{:180} \ldots \xrightarrow{\times\pi} \text{radialen}$$

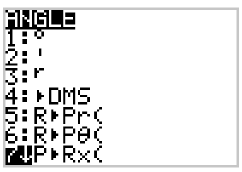
Voorbeelden:

$30° \rightarrow \frac{1}{6}\pi$

$1\frac{1}{4}\pi \rightarrow 225°$

Op de GR

Via **[ANGLE]** kan je van alles vinden rondom hoeken:



1:° en **2:'** (in combinatie met **"** van **[ALPHA]**) kan je gebruiken om hoeken in graden, minuten en seconden om te rekenen naar een decimale weergave:

12°23'11"→12,38638889

Andersom kan het met **>DMS:**

72,43→72°25'48"

Opgave 1

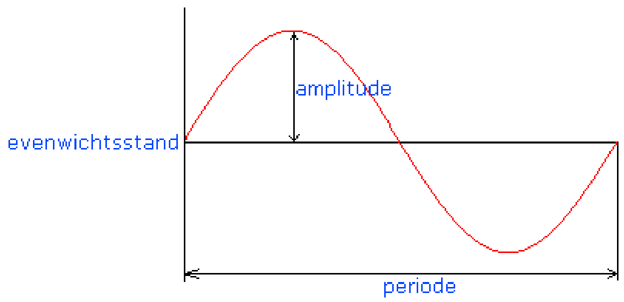
- Geef de volgende hoeken in radialen:
  a. 12° (exact)
  b. 112°33'12" (rond af op 3 decimalen)

Opgave 2

- Geef de volgende hoeken in graden, minuten en seconden:
  (rond af op hele seconden)
  a. $\frac{1}{8}\pi$
  b. 10
  c. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Cirkelbeweging en harmonische beweging

Vaak zijn eenvoudige periodieke functies afgeleid van de sinusgrafiek. Hieronder zie je een tekening van de belangrijkste termen:

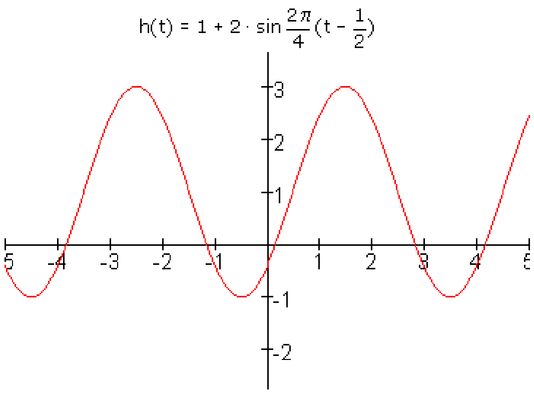


Als algemene formule voor zo'n periodieke functie gebruiken we:

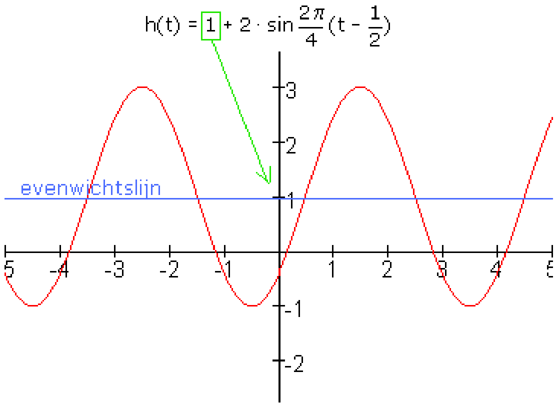
$$h(t) = c + A \sin \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$$

Hierin is **c** de **evenwichtsstand**, **A** de **amplitude** en **T** is de **periode**.

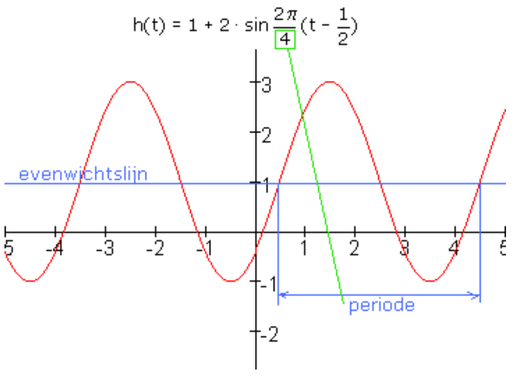
Voorbeeld



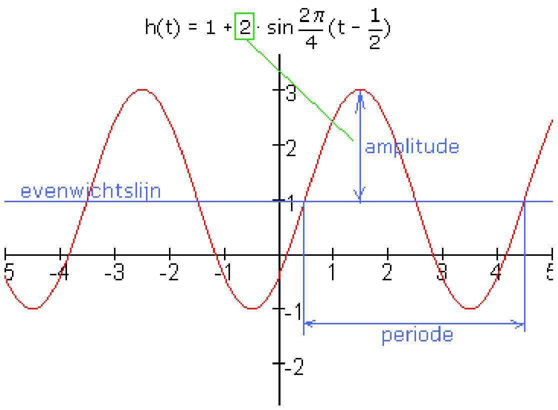
Eerst maar eens de evenwichtslijn (c=1):



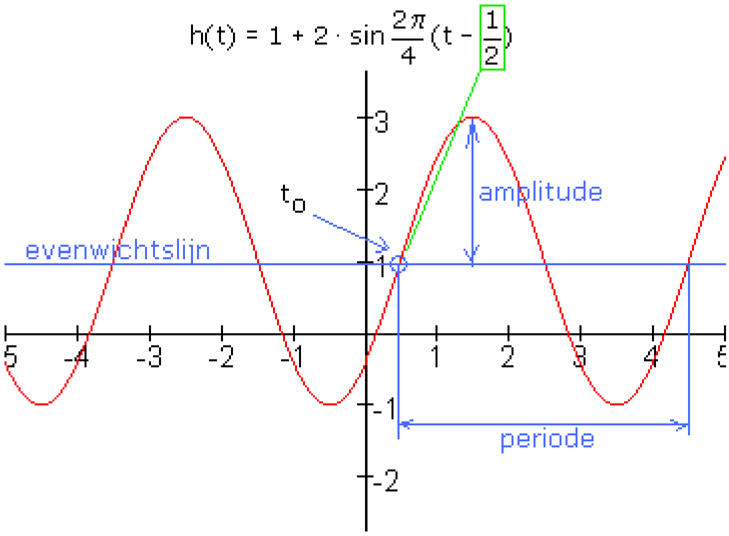
Dan de periode (T=4):



Vervolgens de amplitude (A=2):



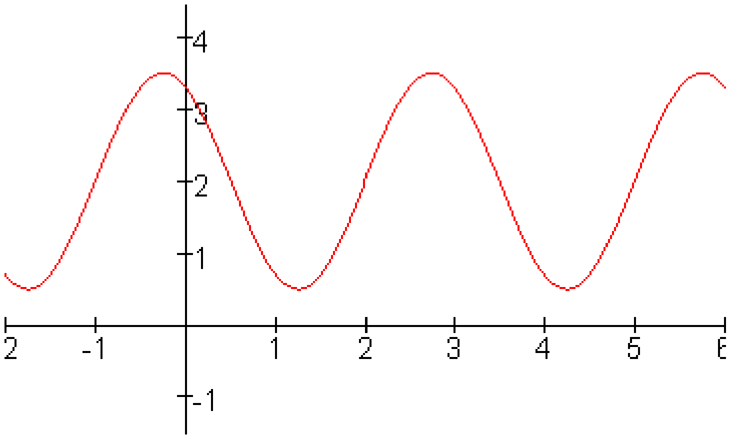
...en tenslotte t_0 ($t_0={}^1/_2$):



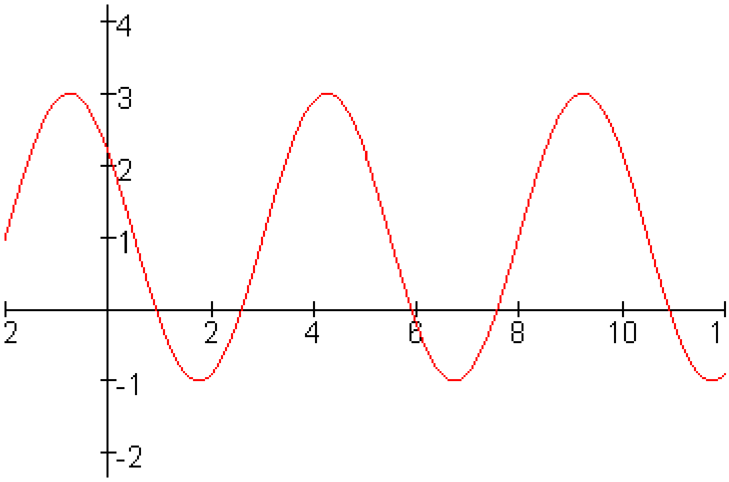
Opgave 1

Geef het functievoorschrift van onderstaande periodieke functies:

a.



b.



Eb en vloed

Opgave 1

Op Texel is op 12 mei om 13:00 uur het water gestegen tot 0,8 m boven NAP. Om 16:15 uur is het hoogwater. De getijbeweging duurt 12 uur 25 min. Er zijn op 13 mei 2 perioden waarin de waterstand hoger dan 0,8 m is.

- Geef van beide perioden het begin- en eindtijdstip.

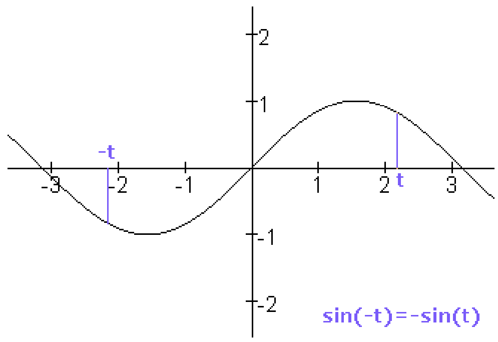
BRON: WisFaq

Formules

$-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$	$\sin\alpha = \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$	$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
$-\cos\alpha = \cos(\alpha - \pi)$	$\cos\alpha = \sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$	$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
$-\tan\alpha = \tan(-\alpha)$	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \begin{cases} 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{cases}$

Voorbeeld 1

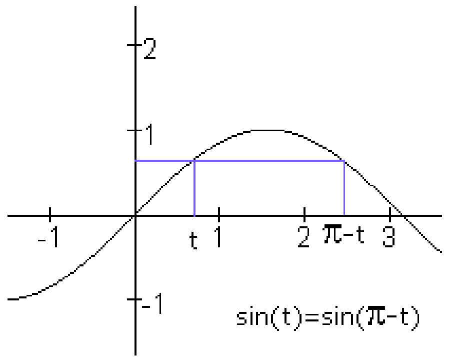
Waarom geldt **sin(-t)=-sin(t)**?



De grafiek van y=sin x is puntsymmetrisch t.o.v. van (0,0).

Voorbeeld 2

Waarom geldt: **sin(t)=sin(π-t)**?



De grafiek van y= sin x is lijnsymmetrisch t.o.v de lijn $y={}^1/_2\pi$

Opgave 1

- Er staan voor cos2α wel 3 verschillende formules op je formulekaart. Laat zien dat je vanuit de eerste en $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ de tweede en derde af kan leiden.

Vergelijkingen

Opgave 1

Bereken α in radialen (exact!):

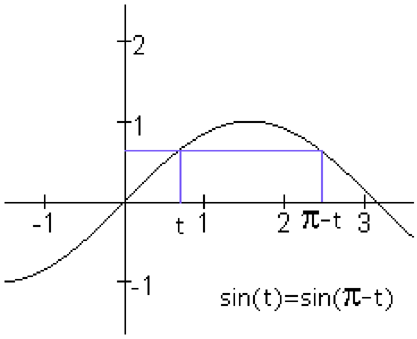
1. $\sin\alpha = 0,5$
2. $\sin\alpha = -{}^1/_2\sqrt{2}$
3. $\sin\alpha = -1$
4. $\sin\alpha = 0$

Het **oplossen van goniometrische vergelijkingen** komt vaak neer op het toewerken naar een vergelijking van deze vorm:

- **sin α = sin β**

Daar spelen **2 zaken** een rol:

1. Als sin α = sin β dan zijn er op het domein $[0,2\pi]$ (meestal) **2 oplossingen**. Dit kan je goed zien aan de grafiek van y = sinx.



   Anders gezegd: sin α = sin β is waar voor: $\alpha=\beta$, maar ook voor $\alpha=\pi-\beta$.
2. Omdat de sinus een periodieke functie is zijn er bij een oplossing meteen ook **oneindig veel oplossingen** (modulo 2π).

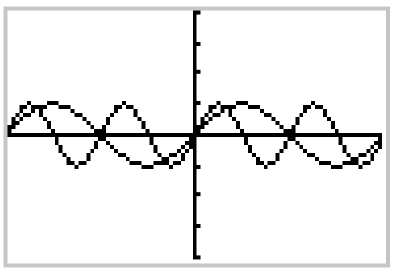
   We noteren dat bijvoorbeeld dan als $\alpha=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ met $k\in\mathbb{Z}$

Samengevat

Als sin α = sin β dan:

- $\alpha = \beta + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = \pi - \beta + k\cdot 2\pi$ met $k\in\mathbb{Z}$

Voorbeeld



Los op:

$\sin(\alpha) = \sin(\pi - 2\alpha)$

Uitwerking:

$\alpha = \pi - 2\alpha + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = \pi - (\pi - 2\alpha) + k\cdot 2\pi$

$3\alpha = \pi + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = 2\alpha + k\cdot 2\pi$

$\alpha = \frac{1}{3}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi$ of $\alpha = 0 + k\cdot 2\pi$

Oftewel:

$\alpha = \ldots, -\pi, -\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi, \pi, 1\frac{2}{3}\pi, \ldots$ of $\alpha = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots$

Opgave 2

Los op :

$\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin(\alpha + \pi)$ met $\alpha \in [0, 2\pi]$

Cosinus en tangens

Als $\cos\alpha = \cos\beta$ dan :

$\alpha = \beta + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = -\beta + k \cdot 2\pi$

Als $\tan\alpha = \tan\beta$ dan :

$\alpha = \beta + k \cdot \pi$

Opgave 3

a. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

b. $\tan\alpha = -\sqrt{3}$

c. $\cos(2\alpha) = \cos(\pi - \alpha)$

d. $\sin\alpha = \cos\alpha$

Bijzondere gevallen

$\sin x = 0$	$\sin x = 1$	$\sin x = -1$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$	$\cos x = -1$
$x = 0 + k \cdot \pi$	$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$	$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$	$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$	$x = 0 + k \cdot 2\pi$	$x = \pi + k \cdot 2\pi$

Opgave 4

a. $2 \cdot \sin^2\alpha = 1$

b. $\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$

c. $3 \cdot \sin 2\alpha = \sqrt{3} \cdot \cos 2\alpha$

d. $\cos 2\alpha + \cos\alpha = 0$

Matrices en rijen

Wat is een matrix?

Definitie

Een **matrix** is een rij reële getallen die gerangschikt zijn in rijen en kolommen.
Om aan te geven dat er sprake is van een matrix worden de tekens [en] (of soms ook (en)) gebruikt (zie figuur 1 en 2).
Als *m* het aantal rijen en *n* het aantal kolommen is spreekt men van een ***mxn*-matrix** of ook van een **(m,n)-matrix**.
Is *m* = *n*, dan is er sprake van een **vierkante** matrix. Het aantal rijen (of kolommen) heet dan de **orde** van de vierkante matrix.
Een kolom van een matrix wordt ook wel **kolomvector**; een rij van een matrix heet ook wel **rijvector**.
De (p,q)- en de (m,n)-matrix zijn van **hetzelfde type** (of van *dezelfde vorm*) als *p* = *m* en *q* = *n*.

BRON: **http://www.pandd.demon.nl/matrices.htm**

Voorbeeld

Hier zie je een voorbeeld van een **3x3-matrix**:

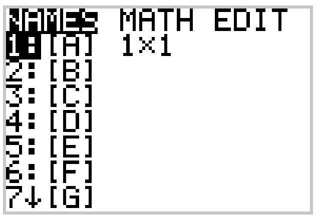
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

De getallen a_{ij} noem je de elementen van de matrix, hierbij is *i* is het rijnummer en *j* is het kolomnummer. Men spreekt ook wel van een *m*x*n*-matrix waar *m* staat voor het aantal rijen en *n* voor het aantal kolommen. Zo staat een 3x5-matrix dus voor 3 rijen en 5 kolommen.

Er zijn verschillende 'soorten' matrices: datamatrix, overgangsmatrix, verbindingsmatrix, (directe) wegenmatrix of een populatievoorspellingsmatrix (Lesliematrix).

Met matrices kan je vooral ook rekenen: optellen en aftrekken, een matrix met een getal vermenigvuldigen, een matrix met een vector (kolommatrix) vermenigvuldigen, twee matrices met elkaar vermenigvuldigen, machten van matrices berekenen en nog veel meer...

Matrices invoeren



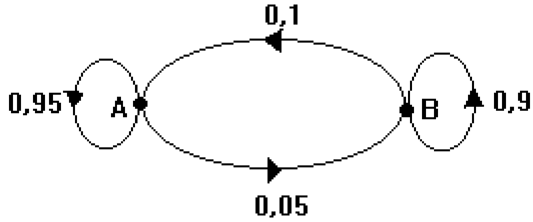
Via **[MATR!X]** kan je op je GR in het matrix-menu komen. Je kunt daar matrices invoeren met **EDIT**, bekijken of opvragen met **NAMES** en onder **MATH** allerlei speciale functies vinden.

Opgave 1

- Zet $M=\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix}$ in **[A]** en zet $k=\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$ in **[B]** en bereken: **M×k**

Bewerkingen met matrices

In een dorp zijn twee winkels A en B. Elke maand zijn er klanten van winkel A die de volgende maand naar winkel B gaan. Andersom komt ook voor. Er zijn ook klanten die 'gewoon' bij hun oude winkel blijven. Hiernaast zie je een graaf die deze situatie weergeeft.



Het getal 0,1 bijvoorbeeld betekent dat één tiende deel van de klanten van B de volgende maand gaat winkelen bij A.
Het getal 0,9 is het deel van de klanten van B die bij B blijft.

Laten we eens uitgaan van de situatie dat A 100 klanten heeft en B 200. Dan heeft A één maand later 115 klanten en B heeft 185 klanten. (ga maar na!)

Hieronder zie je wat er elke keer na een maand gebeurt:

$$\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}115\\185\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}128\\172\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}139\\161\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}148\\152\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}156\\144\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}162\\138\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}168\\132\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}173\\127\end{pmatrix} \rightarrow \ldots$$

Zoals je ziet neemt het aantal klanten van winkel A toe en neemt het aantal klanten van B neemt af. Het totaal aantal klanten verandert niet.

Ook kun je zien dat zowel de afname als de toename afneemt. Dit zou er op kunnen wijzen dat hier sprake is van een soort limietproces. Uiteindelijk zal het aantal klanten per winkel niet meer veranderen. Uiteindelijk heeft winkel A 200 klanten en B heeft er 100.

We kunnen bij deze situatie de volgende matrix maken:

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{van} \\ & & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \textit{naar} & \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix} \end{array}$$

We noemen zo'n matrix een **overgangsmatrix**. Let op de plaats van 'van' en 'naar'. Met deze matrix kun je van een kolommatrix steeds de overgang naar de volgende maand uitrekenen:

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}115\\185\end{pmatrix}$$

Opgave 1

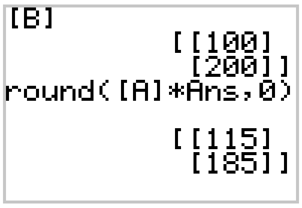
Zet $M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix}$ in **[A]** en zet $k = \begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}$ in **[B]** en bereken:

- $M^2 \times k$
- Wat valt je op?

Opgave 2

Om zo'n rijtje te maken met het herhaald toepassen van de matrixvermenigvuldigen kan je als volgt te werk gaan:

a. Selecteer vanuit het rekenscherm **[B]** en toets **[ENTER]**.
b. Toets de volgende uitdrukking in: **round([A]*Ans,0)** en toets **[ENTER]**.
c. Door steeds op **[ENTER]** te toetsen krijg je nu steeds de volgende stap.



- Ga hiermee door tot er niets meer verandert. Op welke kolommatrix (vector) kom je uiteindelijk uit?

Opgave 3

Dat herhaaldelijk op **[ENTER]** toetsen is natuurlijk niet zo handig...

- Bereken $M^{100} \times k$
- Wat valt je op?

Matrixvermenigvuldiging

Bij het vermenigvuldigen van matrices zijn twee zaken van belang:

1. **Kloppen de afmetingen van de twee matrices ?**
2. **Heeft de vermenigvuldiging betekenis ?**

Kloppen de afmetingen van de matrices?

Twee matrices vermenigvuldig je door steeds een rij van de eerste matrix met een kolom van de tweede matrix te vermenigvuldigen.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 12 & 15\\ 19 & 26 & \boxed{33}\\ 29 & 40 & 51\end{pmatrix}$$

$3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 33$

Daaruit volgt dat om twee matrices te kunnen vermenigvuldigen het aantal kolommen van de eerste matrix gelijk moet zijn aan het aantal rijen van de tweede matrix.

Het resultaat van een vermenigvuldiging van een 3x2 matrix met een 2x3 matrix is een 3x3 matrix. Om dat te onthouden kun je denken aan:

$$3 \times \boxed{2 \times 2} \times 3 = 3 \times 3$$

valt weg

Het getal in de productmatrix dat op de tweede rij in de derde kolom staat is dus het product van de tweede rij van de eerste matrix en de derde kolom van de tweede matrix.

Opgave 1

Welke 'matrixvermenigvuldigingen' zijn mogelijk? En als het mogelijk is wat zijn dan de afmetingen van de uitkomst?

I.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

II.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

III.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

IV.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

V.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

Heeft de vermenigvuldiging betekenis?

Deze vraag is moeilijker te beantwoorden. De **beste** manier is om één van de getallen uit de productmatrix na te rekenen en dan precies na te gaan wat je nu eigenlijk doet. We zullen 's kijken naar een **voorbeeld** uit Netwerk (oude editie 4 HAVO):

> Een beleggingsfonds belegt in onroerend goed, aandelen en obligaties. Het fonds doet de beleggingen in Duitsland, Japan, de VS en Nederland. Hieronder staat een overzicht van de beleggingen, uitgedrukt in de munteenheid van de betreffende landen. Alle getallen moeten met 1 miljoen vermenigvuldigd worden.

	Duitsland	Japan	VS	Nederland
onr. goed	135	4500	233	98
aandelen	478	13900	609	87
obligaties	238	0	562	76

> Het fonds wil de aandeelhouder een overzicht presenteren van de beleggingen. Omdat de meeste aandeelhouders in Nederland wonen,

maakt het fonds een overzicht in guldens. Daarnaast maakt ze voor haar buitenlandse aandeelhouders een overzicht in dollars. Bij de berekeningen gaat het fonds uit van de volgende koersen.

	gulden	dollar	100 yen	D-mark
gulden	1,00	2,09	1,45	1,13
dollar	0,48	1,00	0,69	0,54

In de tabel kun je bijvoorbeeld aflezen dat 1 dollar *f* 2,09 waard is.

a. Maak van de beleggingsgegevens een matrix **B** met vier kolommen. Welke afmetingen moet een koersenmatrix **K** nu hebben om de vermenigvuldiging **B · K** mogelijk te maken ?
b. Stel zo'n koersenmatrix **K** op, zo dat **B · K** betekenis heeft en bereken **B · K**.
c. Wat stelt het matrixproduct **B · K** voor ?

Om te beginnen kiezen we:

$$B = \begin{array}{r} \\ \text{onr.goed} \\ \text{aandelen} \\ \text{obligaties} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{D} & \text{Japan} & \text{VS} & \text{NL} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 135 & 4500 & 233 & 98 \\ 478 & 13900 & 609 & 87 \\ 238 & 0 & 562 & 76 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hoe ziet nu **K** eruit ?
Op grond van het bovenstaande weten we in ieder geval dat **K** een matrix moet worden met **4 rijen**. Omdat we de beleggingen zowel in gulden als in dollars willen uitrekenen zal deze matrix **2 kolommen** moeten hebben.

Stel je voor we nemen:

$$K = \begin{array}{r} \\ \text{gulden} \\ \text{dollar} \\ \text{100yen} \\ \text{D-mark} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{gulden} & \text{dollar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}48 \\ 2{,}09 & 1{,}00 \\ 1{,}45 & 0{,}69 \\ 1{,}13 & 0{,}54 \end{pmatrix} \end{array}$$

De **afmetingen** kloppen, maar **B · K** slaat helemaal nergens op:

$$\begin{array}{r} \\ \text{onr.goed} \\ \text{aandelen} \\ \text{obligaties} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{D} & \text{Japan} & \text{VS} & \text{NL} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 135 & 4500 & 233 & 98 \\ 478 & 13900 & 609 & 87 \\ 238 & 0 & 562 & 76 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{array}{r} \\ \text{gulden} \\ \text{dollar} \\ \text{100yen} \\ \text{D-mark} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{gulden} & \text{dollar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}48 \\ 2{,}09 & 1{,}00 \\ 1{,}45 & 0{,}69 \\ 1{,}13 & 0{,}54 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ga maar na, als je de eerste rij keer de eerste kolom uit zou rekenen, vermenigvuldig je 135 miljoen D-mark in onroerend goed met de koers van de Nederlandse gulden in gulden.
Kortom de randen van de matrices kloppen **NIET**.

De volgende matrix is beter:

$$K = \begin{array}{c} \\ \text{D-mark} \\ \text{100 yen} \\ \text{dollar} \\ \text{gulden} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{gulden} & \text{dollar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1{,}13 & 0{,}54 \\ 1{,}45 & 0{,}69 \\ 2{,}09 & 1{,}00 \\ 1{,}00 & 0{,}48 \end{pmatrix} \end{array}$$

Je krijgt dan de volgende vermenigvuldiging:

$$\begin{array}{c} \\ \text{onr.goed} \\ \text{aandelen} \\ \text{obligaties} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{D} & \text{Japan} & \text{VS} & \text{NL} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 135 & 4500 & 233 & 98 \\ 478 & 13900 & 609 & 87 \\ 238 & 0 & 562 & 76 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} \\ \text{D-mark} \\ \text{100 yen} \\ \text{dollar} \\ \text{gulden} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{gulden} & \text{dollar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1{,}13 & 0{,}54 \\ 1{,}45 & 0{,}69 \\ 2{,}09 & 1{,}00 \\ 1{,}00 & 0{,}48 \end{pmatrix} \end{array}$$

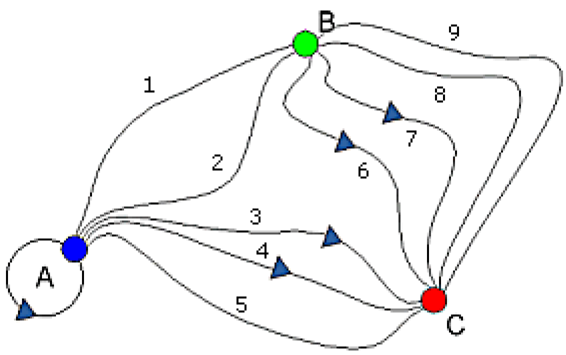
Dat ziet er goed uit, maar er zit toch nog een foutje in. Dat foutje mag je proberen zelf te bedenken!

Opgave 2

- Welke foutje is dat?

Een directe-wegen matrix

Bij een bepaald routeprobleem doet zich de volgende situatie voor: we hebben 3 plaatsen A, B en C met daartussen een aantal (directe) wegen. Een aantal van deze wegen is éénrichtingsverkeer.



Je kunt hier van alles verzinnen. Zo kan je op 3 manieren in één stap van A naar C, maar van C naar A is er maar 1 manier. Er is éénstapweg van A naar A. Dit is ook éénrichtingsverkeer zodat je maar op 1 manier van A naar A kan in één stap.

Je kunt je nu van alles af gaan vragen. Bijvoorbeeld op hoeveel manieren je van A naar A in 3 stappen zou kunnen... of... hoeveel vierstapswegen zijn er van A naar C? Enz...

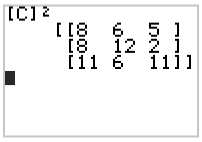
We gaan eerst maar 's een **directe-wegen matrix** opstellen. Ik noem deze matrix **M**. Let daarbij op de plaatst van '**van**' en '**naar**'. Deze matrix ziet er dan zo uit:

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wat zou er nu 'gebeuren' als je deze matrix met zichzelf vermenigvuldigt?

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 8 & 12 & 2 \\ 11 & 6 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Het 'berekenen' zal (met de GR!) het probleem niet zijn... Maar misschien moeten we 's kijken naar de betekenis van M^2. Een goede methode is om één van de **elementen** uit M^2 eens aan een nader onderzoekje te onderwerpen. Laten we 's kijken naar die 'linker 11'.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{0} \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ \boxed{2} & 0 & 2 \\ \boxed{3} & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 8 & 12 & 2 \\ \boxed{11} & 6 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Je vermenigvuldigt de derde rij met de eerste kolom dus:

- $\mathbf{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 11}$

Maar wat betekent het?

je kunt op 1 manier van A naar A

je kunt op 2 manieren van A naar B

je kunt op 3 manieren van A naar C

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 11$$

je kunt niet van C naar C

je kunt op 4 manieren van B naar C

je kunt op 3 manieren van A naar C

- Je kunt op 1 manier van A naar A en je kunt op 3 manieren van A naar C, dus 3·1 levert het aantal manieren om in 2 stappen van A naar C te gaan (via A).
- Je kunt op 2 manieren van A naar B en je kunt op 4 manieren van B naar C, dus er zijn 8 manieren om in 2 stappen van A naar C te gaan (via B).
- Je kunt niet (direct) van C naar C, dus ook niet in 2 stappen van A naar C (via C).

Als je deze **3** en **8** (en **0**) optelt krijg je **11**. Het aantal manieren om in **2 stappen** van A naar C te gaan is **11**.

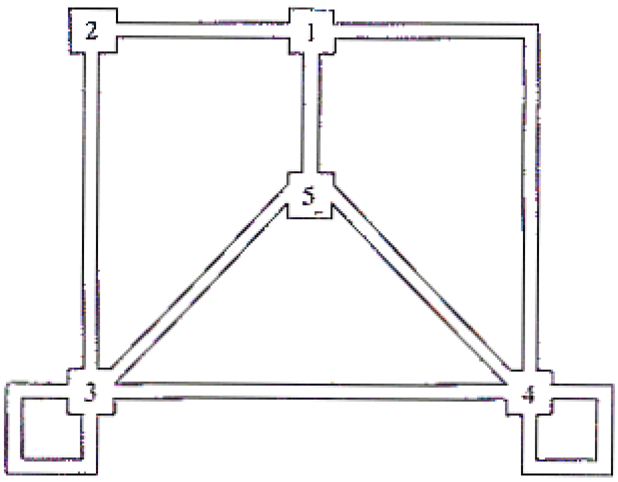
Conclusie: in de productmatrix kun je **het aantal tweestapswegen** aflezen. Het zal je niet verbazen, maar in M^3 kan je aantal driestapswegen aflezen.. enz.

Opgave 1

1. Volgens M^2 zijn er 12 verschillende tweestapswegen van B naar B. Gebruik de wegnummers om deze 12 routes op te schrijven.
2. Hoeveel tweestapswegen zijn er in totaal?
3. Hoeveel driestapswegen zijn er die vertrekken uit B?
4. Hoeveel vierstapswegen zijn er van C naar B?

Opgave 2

In een experiment laat een onderzoeker een muis los in onderstaand labyrint. Zo'n muis kan zich door het labyrint verplaatsen.



In de kamers (1 t/m 5) kiest de muis steeds één van de uitgangen, maar dat kan ook de weg terug zijn. De onderzoekers gaan er van uit dat het kiezen van de 'vervolgroute' steeds volkomen op toeval berust.

a. Stel een directe-wegen matrix op.
b. Hoeveel driestapsroutes zijn er van kamer 1 naar kamer 3.
c. Hoeveel vierstapsroutes van 1 naar 4? Zijn die vierstapsroutes allemaal even waarschijnlijk? (leg uit)
d. Bereken de kans dat als je een muis in kamer 5 na 3 stappen weer in kamer 5 zit. (strikvraag!)

Populatievoorspellingsmatrix

Een **populatievoorspellingsmatrix** of **Lesliematrix** is een bijzondere vorm van de overgangsmatrix. Hierbij spelen **voortplantingsfactoren** en **overlevingskansen** een grote rol.

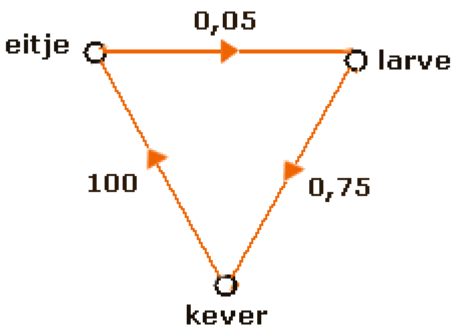
Voorbeeld

In een afgesloten ruimte houdt men een keversoort. Op een bepaal moment zijn er 400 eitjes, 200 larven en 50 kevers. Na één maand zijn 95% van de eitjes opgegeten of niet uitgekomen, het overige percentage heeft zich ontpopt tot larve. 75% van de larven heeft zich ontwikkeld tot kever. Elke kever heeft voor gemiddeld 100 eitjes gezorgd, maar van de oorspronkelijke kever is er niet één meer over.

- **Onderzoek hoe de populatie zich ontwikkelt**

Uitwerking

We tekenen eerst een graaf waarin we de bovenstaande gegevens verwerken:



Vervolgens stellen we een overgangsmatrix op waarin we de verschillende overgangen verwerken:

$$\begin{array}{ll} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc}\text{eitje} & \text{larve} & \text{kever}\end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{r}\text{eitje}\\ \text{larve}\\ \text{kever}\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Met behulp van matrixvermenigvuldiging kun je nu steeds de volgende generatie berekenen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 20 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Herhaald toepassen levert het volgende verloop op:

$$\begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5000 \\ 20 \\ 150 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15000 \\ 250 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1500 \\ 750 \\ 187,5 \end{pmatrix} \rightarrow \ldots$$

In dit soort gevallen kan er het volgende gebeuren:

1. De populatie sterft uit.
2. De populatie vertoont een periodiek verloop.
3. De populatie neemt toe.

Opgave 1

- Onderzoek hoe de populatie uit het voorbeeld zich verder ontwikkelt.

Opgave 2

In onderstaande Lesliematrix staan de overgangen in 2 jaar weergegeven van een populatie baarsen.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & 6 \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1000 \\ 0,005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a. Bereken de kans dat een eitje uitgroeit tot een 4-jarige baars. Bereken ook de kans dat een eitje uitgroeit tot een 6-jarige baars.
b. Op een bepaald moment is de populatie als volgt verdeeld:
   0-jarige: 800
   2-jarige: 125
   4-jarige: 85
   6-jarige: 25
   Onderzoek hoe deze populatie zich ontwikkelt.

Stelsels lineaire vergelijkingen oplossen

Nemen we eens een stelsel van 2 vergelijkingen en 2 onbekenden.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 2x - 6y = 42 \end{cases}$$

Normaal gesproken los je dat bijvoorbeeld op de volgende manier op:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 2x - 6y = 42 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x + 4y = 24 & |\times 2| \\ 2x - 6y = 42 & |\times 3| \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6x + 8y = 48 \\ 6x - 18y = 126 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6x + 8y = 48 \\ 26y = -78 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6x + 8y = 48 \\ y = -3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6x + 8 \cdot -3 = 48 \\ y = -3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6x = 72 \\ y = -3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 12 \\ y = -3 \end{cases}$$

De oplossing is (12,-3)

Zo...

Je kunt dit stelsel van vergelijkingen ook vertalen naar een matrixvermenigvuldiging:

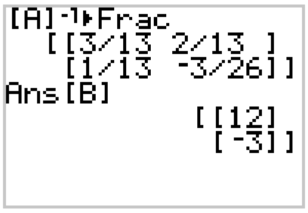
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}$$

Opgave 1

- Ga na dat deze 'matrixvermenigvuldiging' hetzelfde is als het stelsel hierboven.

De vraag is dan welke vector (kolommatrix) moet je nu nemen zodat er uitkomt wat er uitkomt? Anders gezegd als je weet wat er uit de 'vermenigvuldiging' komt kan er dan achter komen wat je er 'ingestopt' hebt? Kan je met zo'n matrix ook **terugrekenen**?

Zonder op de theorie in te gaan kan ik meedelen dat zoiets inderdaad kan. Je gebruikt daarvoor de **inverse matrix**. Met je GR kan die inverse matrix berekenen met **[x^{-1}].** Dus **[A]$^{-1}$** geeft je die 'terugrekenmatrix'.



...en hupsakee, met de matrix in **[A]** en de 'uitkomst' in **[B]** rolt de oplossing er zo uit...

Opgave 2

Los op:

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d+5e=1 \\ 5a+4b+3c+2d+e=2 \\ 2b+2c+2d+2e=3 \\ a+2b+4c+7d+9e=4 \\ 3a+3b+6c+9d+8e=5 \end{cases}$$

Opgave 3

Een bioloog heeft voor een experiment met muizen een voedselmengsel nodig dat, buiten andere stoffen, bestaat uit 23 g proteïne, 6,2 g vet en 16 g vocht. Hij beschikt over mengsels met de volgende samenstelling:

	proteïne(%)	vet(%)	vocht(%)
mengsel 1	20	2	15
mengsel 2	10	6	10
mengsel 3	15	5	5

Welke van de volgende hoeveelheden van mengsel 1, 2 en 3 moet de bioloog gebruiken om het gevraagde voedselmengsel te krijgen?

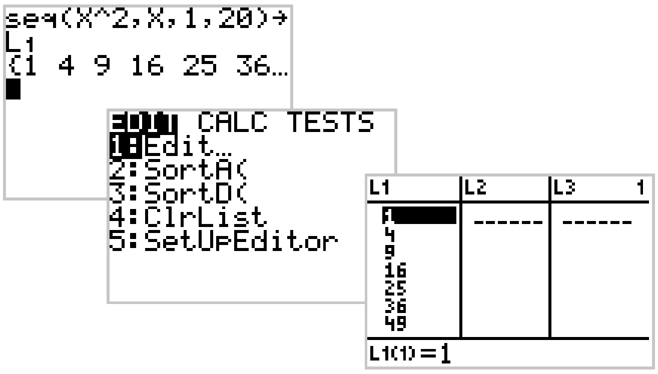
Rijen en reeksen

Via **[LIST]** kan je rijen invoeren, sommen, verschillen en nog veel meer uitrekenen. Je kunt met **directe formules** werken maar met je GR kan je ook werken met **recursief gedefinieerde** rijen.

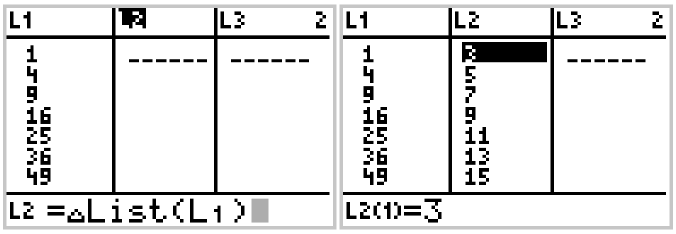
Met **[LIST]** en dan **OPS** kan je de opdracht **5:seq(** vinden (sequence=rij). Daarmee kan rijen maken. Het is handig om een dergelijk rij dan in een lijst te zetten (**L1** t/m **L6**).

Voorbeeld

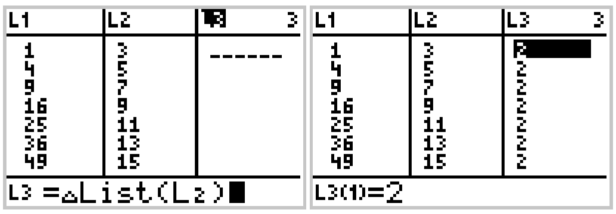
Ik wil in **L1** een lijst met de kwadraten van 1 t/m 20 zetten. Dat gaat dan zo:



Je kunt dan in **L2** bijvoorbeeld de verschilrij zetten. Dat doe je door op **L2** boven aan de lijst te gaan staan en dan een geschikte formule in te toetsen. In dit geval kiezen we voor **ΔList(** uit het **OPS**-menu uit **[LIST]**.



Je kan door de lijst bladeren of 't zelfde kunstje nog een keer uitvoeren natuurlijk.



...en wat blijkt? De **tweede verandering** is constant... dat is trouwens altijd zo bij een kwadratisch verband, maar dat terzijde...

Opgave 1

Je kunt lijsten schoon maken door boven aan de lijst op **L2** te gaan staan en dan te kiezen voor **[CLEAR]** en dan **[ENTER]** te toetsen. Een interessante optie uit het **OPS**-menu is **6:cumSum(**. Dit staat voor 'cumulatieve som' en geeft de som van de voorgaande termen.

- Zet in **L2** de 'cumulatieve som' van de rij kwadraten. Voor deze rij getallen bestaat ook een directe formule. Wat voor een soort verband verwacht je dat dit zal zijn?

Recursief gedefinieerde rijen

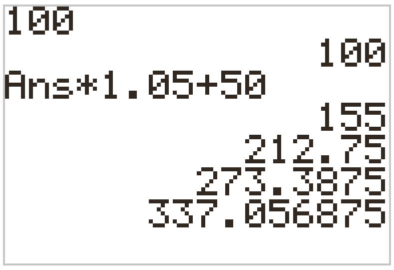
Je zet 100 euro op een rekening. Elk jaar krijg je op 1 januari over je tegoed van het voorafgaande jaar een rente van 5%. Zelf stort je elk jaar op 1 januari ook nog 50 euro. Na 1 jaar staat er op 2 januari op je rekening een bedrag van 155 euro.

a. Laat door een berekening zien dat die 155 euro klopt!
b. Bereken je tegoed van 2 januari na 10 jaar.
c. Na hoeveel jaar is tegoed voor het eerst meer dan 2000 euro?

Bij het bovenstaande heb je te maken met een recursief gedefinieerde rij. Als je het banktegoed **u** noemt dan kan je deze definiëren als:

u(0)=100
u(n)=1,05·u(n-1)+50

n=0 -> u=100
n=1 -> u(1)=1,05·100+50=155
n=2 -> u(2)=1,05·155+50=212,75
Enz...



Met de **GR** kan het zo:

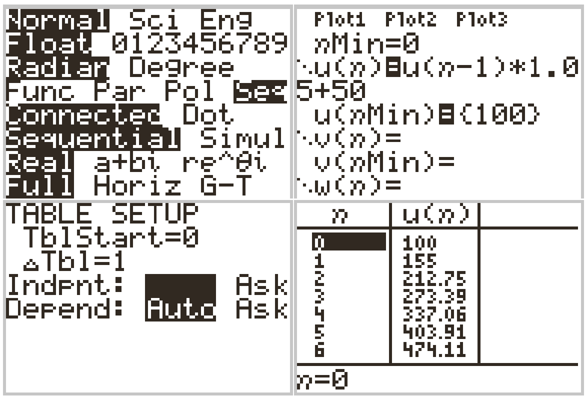
Tik 100 in en toets **ENTER**.
Tik **Ans*1.05+50** en dan **ENTER**.
Dit geeft je het bedrag na 1 jaar.
Door nu steeds op **ENTER** te toetsen krijg je steeds het bedrag een jaar later.

Opgave 2

- Door goed te tellen in welk jaar je zit kan je bovenstaande vraag beantwoorden. **Doe** dat!

Special sequence mode

Via **[MODE]** kan je GR instellen op **Seq**. Je GR bevindt zich dan in de 'rijentoestand'. Via **[Y=]** kan je dan (recursief gedefinieerde) rijen invoeren en allerlei leuk dingen doen...



Hierboven kan je zien hoe je ons 'renteprobleem' mooi als tabel op het scherm kan krijgen.

TIP: De **u**, **v** en **w** krijg je via **2nd 7**, **2nd 8** en **2nd 9** en de *n* met **[X,T,θ,n]**.

Opgave 3

- Voer bovenstaande werkwijze uit en controleer daarmee je antwoorden van opgave 2.

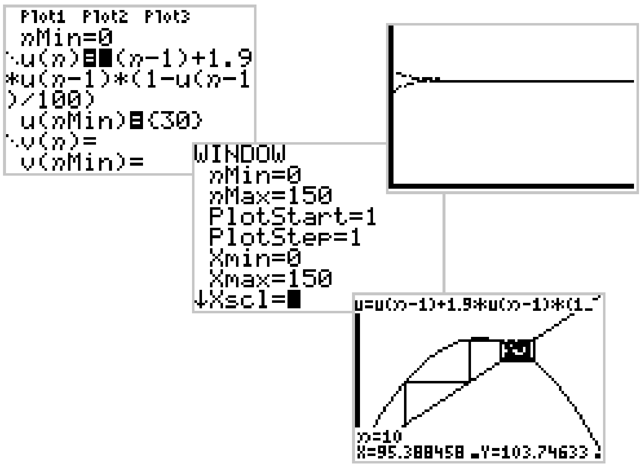
Webgrafiek

We definiëren de volgende recursieve rij:

$$u(0) = 30$$

$$u(n) = u(n-1) + 1{,}9 \cdot u(n-1)\left(1 - \frac{u(n-1)}{100}\right)$$

We zetten 't een en 't ander maar 's in de GR:



De eerste grafiek bestaat uit losse puntjes. De tweede grafiek kan je krijgen door bij **[FORMAT]** te kiezen voor **Web** (in plaats van **Time**). Met **[GRApH]** en **[TRACE]** kan je dan met  zien wat er gebeurt...

Opgave 4

- Doe dit nog een keer maar neem bij de formule in plaats van **1,9** nu **2,9**.

Groeimodellen

Nemen we maar eens aan dat we een populatie konijnen hebben op een verder leeg eiland. Het aantal konijnen in jaar t noemen we N(t) met N(0) konijnen in het jaar 0. Verder hangt de populatie in jaar t+1 alleen af van de populatie, dus niet van het weer, aantal roofdieren, etc.

Constante populatie

Er geldt: $N(t+1)=N(t)$
Dat is niet erg interessant...☺

Lineaire groei

Er geldt: $N(t+1)=N(t)+c$
Hierbij is c een constante, maar niet erg interessant...

Exponentiële groei

Er geldt: $N(t+1)=N(t)+r\cdot N(t)$
Hierbij is r de reproductiefactor en geeft aan hoe hard de konijnen zich voortplanten. Maar het aantal konijnen blijft maar toenemen en dat is niet erg realistisch.

Logistische groei

Er geldt: $N(t+1)=N(t)+r\cdot N(t)\cdot\left(1-\frac{N(t)}{W}\right)$
Hierin is r de reproductiefactor en W is de maximale populatie.

Bij de opgave over de **webgrafiek** heb je al iets gezien van **logistische groei**. Het voert nu wat ver om hier verder op te gaan... maar... misschien toch aardig om onderstaande pagina eens te bekijken.

Opdracht

- Bekijk **http://www.math4all.nl/XL/XLchaos.html**

Math4all

Beschrijvende statistiek

Frequenties

Voorbeeld

leeftijd	aantal levendgeborenen naar leeftijd van de moeder
15-19 jaar	3258
20-24 jaar	25988
25-29 jaar	76315
30-34 jaar	68923
35-39 jaar	20438
40-44 jaar	2778
45-49 jaar	265

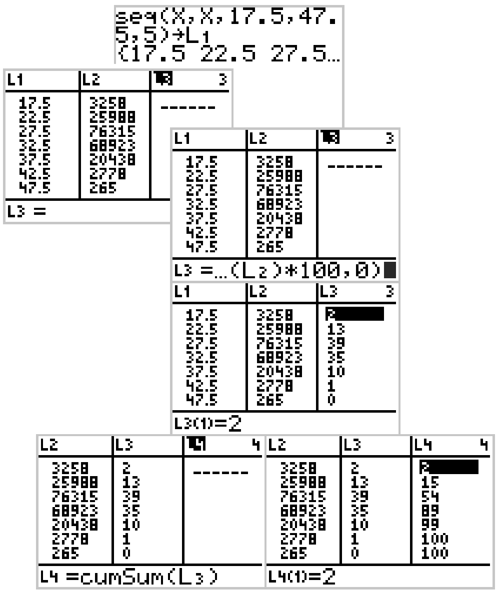
- Teken een cumulatieve-frequentiepolygoon met relatieve frequenties.

Uitwerking

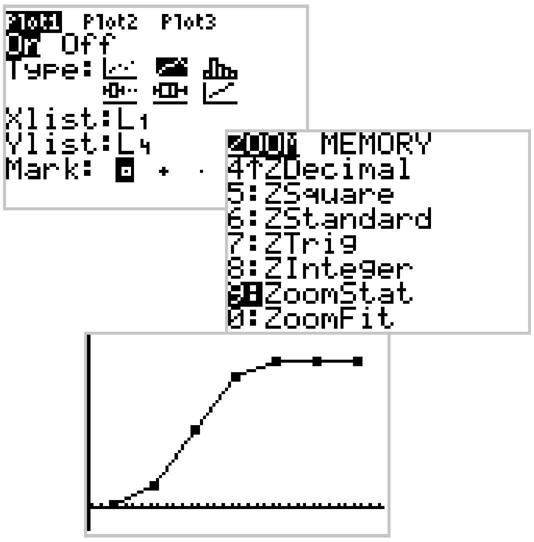
Omdat er staat 'teken..' wil ik een tabel maken met daarin de relatieve somfrequenties bij deze tabel. Dit kan natuurlijk prima met de GR. In **L1** zet ik de klassemiddens van de leeftijd en in **L2** dan de absolute frequenties. Nu moet het toch mogelijk zijn om in **L3** de relatieve frequenties te laten berekenen en in **L4** dan de relatieve somfrequenties.

1. Met **seq(X,X,17.5,47.5,5)->L1** zet ik eerst de klassemiddens maar 's in **L1** (te lui om ze in te tikken).
2. Dan voer ik in **L2** de frequenties in.. met de hand....
3. Nu kan ik in **L3** met **Round(sum(L2)/L2*100,0)** een lijstje relatieve frequenties maken, afgerond op hele procenten.
4. In **L4** maak ik dan tenslotte de somfrequentie met **cumSum(L3)**.

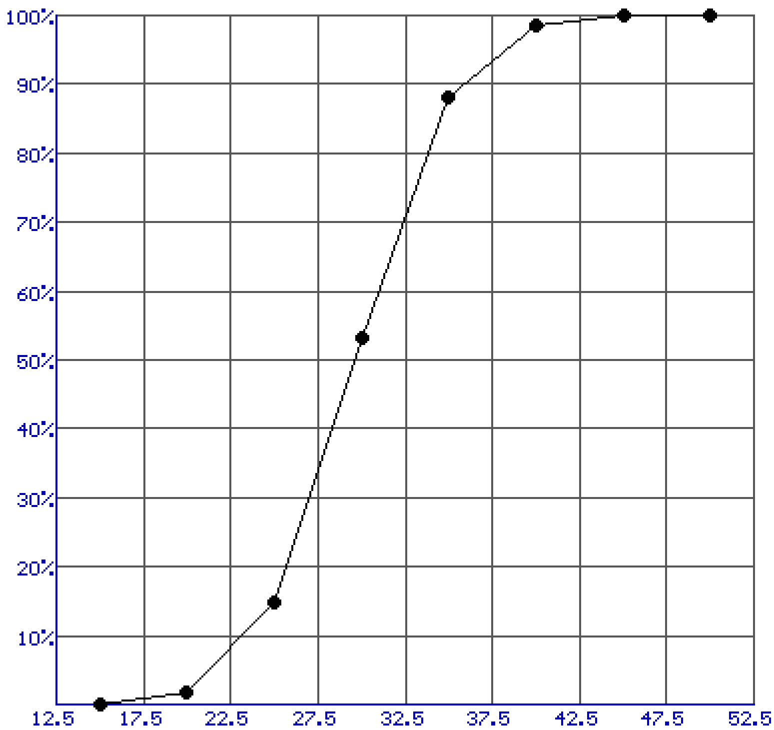
..en klaar is Klara! Hieronder zie je nog 't een en ander in schermpjes weergegeven.



Ik kan nu zelfs met de GR de cumulatieve frequentiepolygoon met relatieve frequenties plotten.

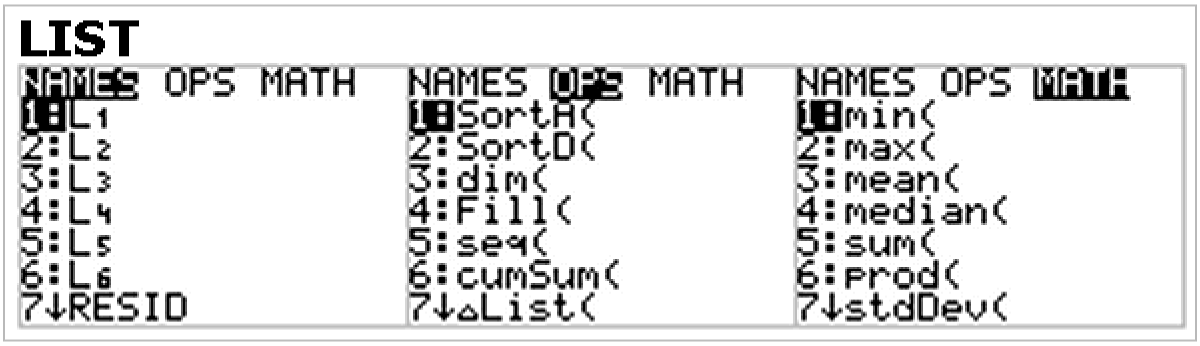


Bij een klassenindeling neem je altijd het klassenmidden als 'meetwaarde'. Bij leeftijd werkt dat anders dan bij bijvoorbeeld gewicht of lengte. Voor een somfrequentiepolygoon gebruik je echter altijd de **rechter klassegrens**. Bij statistiek 1-3 komen daar nog uitgebreid op terug. Maar zo'n plotje van de GR lijkt natuurlijk nergens op! Nee, onderstaande grafiek is mooier:



STAT & LIST

Bij statistiek werk je dus veel met lijsten. Hieronder zie je nog maar 's een keer een overzichtje van de opties onder **[STAT]** en **[LIST]**.



Opgave 1

Van een partij van 50 zakken met aardappelen heeft men het gewicht bepaald. Hieronder zie je de frequentietabel:

Gewicht in kg	Frequentie
1,0	9
1,1	21
1,2	14
1,3	5
1,4	1

- Teken het somfrequentiepolygoon met relatieve frequenties.

Centrummaten

Met **centrummaten** geef je het 'midden' van een verdeling aan. Bij veel verdelingen liggen de getallen 'rond' een bepaald getal.

In het **[STAT]**-menu kan je onder **CALC** de optie **1-Var Stats** vinden. Daarmee kan je van 'waarnemingen' van alles uitrekenen, centrummaten, standaarddeviatie, e.d. Dat kan een enkelvoudige lijst zijn (waar alle waarnemingen in staan) of van een frequentietabel (waarnemingen in **L1** en de frequenties in **L2** bijvoorbeeld).

1. **1-Var Stats L1** geeft de statistieken van de getallen in **L1**.
2. **1-Var Stats L1,L2** geeft de statistieken van de waarnemingen in **L1** met daarbij verwerkt de frequenties uit **L2**.

Voorbeeld

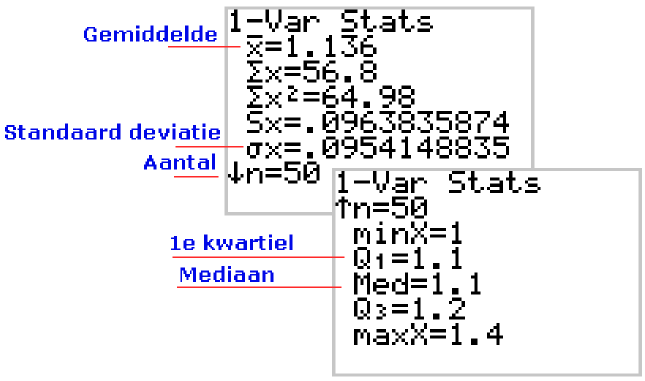
Van een partij van 50 zakken met aardappelen heeft men het gewicht bepaald. Hieronder zie je de frequentietabel:

Gewicht in kg	**Frequentie**
1,0	9
1,1	21
1,2	14
1,3	5
1,4	1

a. Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie op 2 decimalen nauwkeurig.
b. Bereken de kwartielafstand.
c. Teken met je GR het boxplot. Wat valt je op?

Uitwerking

Zet de gewichten in **L1** en de frequentie in **L2**. **1-Var Stats L1,L2** geeft:



Centrummaten zijn maten voor de centrale ligging van de waarnemingen. Het (rekenkundig) **gemiddelde** is wellicht wel de bekendste. Hier kan je ook de **mediaan** vinden. De mediaan kan je beschouwen als **het middelste getal** als je de getallen op volgorde zet. De **modus** kan je hier niet vinden, maar omdat dit de waarneming is die het **meest voorkomt** kan je dat zelf ook wel verzinnen...

Opgave 1

leeftijd in jaren	frequentie
12	5
13	12
14	28
15	16
16	5

- **Bereken de gemiddelde leeftijd van deze groep leerlingen.**

Opgave 2

Gegeven: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8 en 9.

- Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus.

Spreidingsmaten

Een **spreidingsmaat** geeft aan of getallen in een verdeling dicht bij elkaar liggen of juist ver uit elkaar. Met centrummaten geef je het 'centrum' van een verdeling aan. Een spreidingsmaat is een maat voor het al dan niet 'dicht of verder weg liggen' van het centrum.

Er bestaan verschillende spreidingsmaten waarvan de **standaarddeviatie** wel de bekendste is. Maar ook de **variatie- of spreidingsbreedte** of de **kwartielafstand** kom je nog wel 's tegen. Bij **Statistiek 1-3** zullen we 't er nog uitvoerig over hebben.

Opdracht

In deze opdracht zet je een rijtje getallen in **L1**. Daarna gaan we op die lijst verschillende bewerkingen uitvoeren (die we dan in **L2** t/m **L6** zetten) om te onderzoeken wat het effect is van die bewerking op het **gemiddelde** en de **standaarddeviatie**.

Voordat je begint is het handig alle lijsten even te wissen. Dat kan handig met **ClrAllLists** uit **[MEM]**.

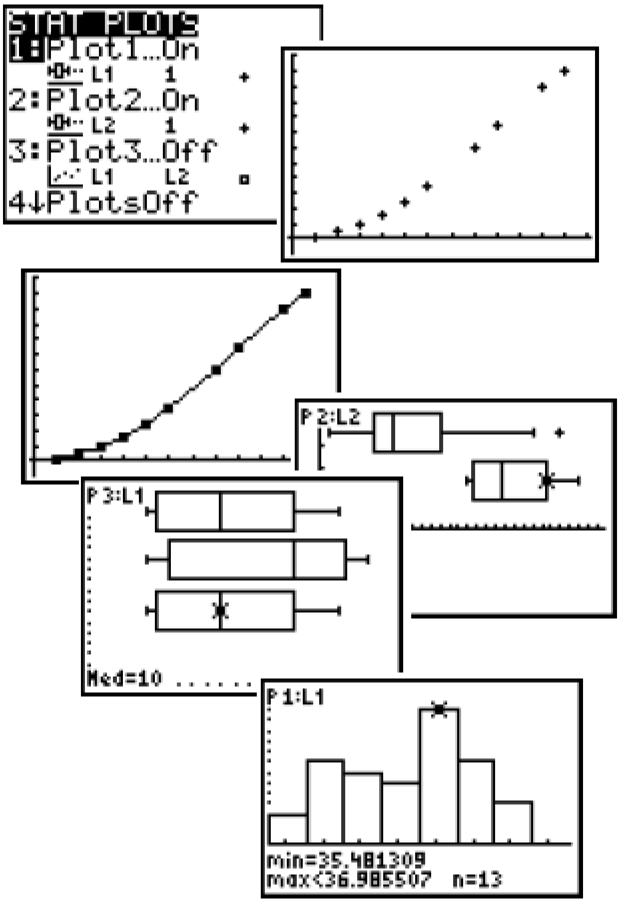
1. Zet de volgende rij getallen in **L1**: 1, 2, 3, 6, 7, 8 en 12.
2. Bereken het gemiddelde en de standaardeviatie en rond daarbij af op 1 decimaal.
3. Het gemiddelde is **5,6** en de standaardeviatie is **3,6**. Ga dat na.

Vul **onderstaande tabel** verder in:

lijst	**bewerking**	**gemiddelde**	**standaarddeviatie**	**gemiddelde**	**standaard deviatie**
L1	L1	5,6	3,6	m	s
L2	L1+2	7,6	3,6	m+2	s
L3	2·L1				
L4	2·L1+2				
L5	100-L1				
L6	1000-100·L1				

Grafische voorstellingen

Met de GR beschik je ook over een aantal mogelijkheden voor grafische weergave van histogrammen, frequentiepolygonen, boxplots, e.d.



Hieronder zie je een overzichtje van de mogelijkheden:

Plot Type	XList	YList	Mark	Freq	Data List	Data Axis
Scatter	☑	☑	☑	❑	❑	❑
xyLine	☑	☑	☑	❑	❑	❑
Histogram	☑	❑	❑	☑	❑	❑
ModBoxplot	☑	❑	☑	☑	❑	❑
Boxplot	☑	❑	❑	☑	❑	❑
NormProbPlot	❑	❑	☑	❑	☑	☑

Opdracht

In het boekje 'Erbij blijven, begeleiden, motiveren en adviseren in de wiskundeles' (Amsterdam, 1990) beschrijven M.Meeder en F.Meester het volgende experiment:

Aan 649 meisjes en 563 jongens is meteen na het maken van een wiskundeproefwerk gevraagd welk cijfer ze gehaald denken te hebben. Daarna is het proefwerk nagekeken en is bereken hoeveel elke leerling er met zijn of haar voorspelling naast zat. Deze inschattingsfouten staan in de tabel hieronder. Een score tussen -4 en -3 betekent dat het cijfer in werkelijkheid 3 of 4 punten **lager** was dan de betreffende leerling direct na afloop van het proefwerk gedacht had.

Werkelijk - geschat cijfer	Meisjes (%)	Jongens (%)
-4-<-3	0,6	0,9
-3->-2	3,4	3,4
-2-<-1	7,3	9,2
-1-<0	14,0	17,5
0-<1	24,3	31,2
1-<2	22,4	19,7
2-<3	18,2	12,5
3-<4	7,5	4,3
4-<5	2,0	0,7
5-<6	0,2	0,5

De vraag is of meisjes en jongens hun prestaties even (ir)reëel inschatten.

- Maak een statistische analyse van de gegevens. Geef de gegevens op een overzichtelijke manier in een geschikt statistisch plaatje weer en bepaal voor de meisjes en de jongens centrum en spreiding van de frequentieverdelingen.
- Hoe luidt je conclusie?

bron: TI83 en TI83+ kennismaken en toepassen - Paul Drijvers & Michiel Doorman

Formules en verbanden

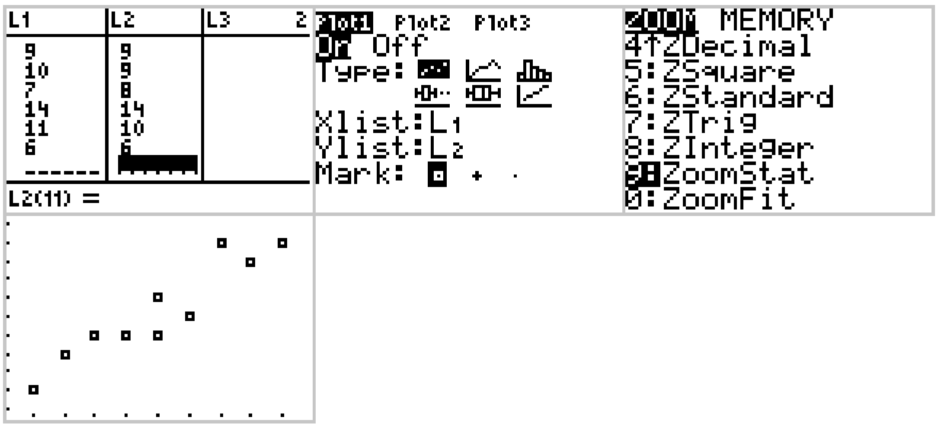
Voorbeeld

De resultaten van 10 studenten voor hun test (T) en hun examen (E) zijn gegeven in de onderstaande tabel:

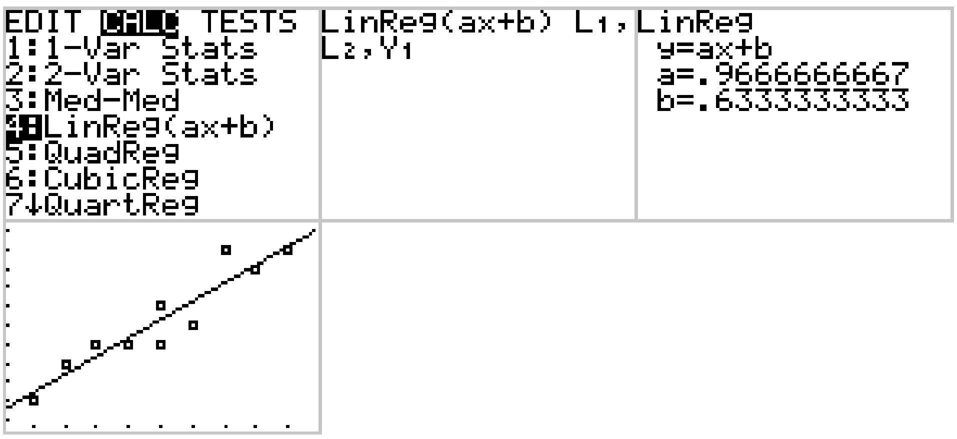
T	10	12	8	13	9	10	7	14	11	6
E	11	14	9	13	9	9	8	14	10	6

We willen de **samenhang** onderzoeken en gaan een puntenwolk plotten en de correlatie berekenen met de GR.

Via onderstaande aanpak kan je het **spreidingsdiagram** plotten. Eerst de data in **L1** en **L2** zetten en dan via **[STATPLOT]**.



Via **[STAT]** en **Calc** kies je dan voor **LinReg(ax+b)**. Je kan dit zonder parameters doen, je GR kiest dan zelf **L1** en **L2**, maar je kan naast de lijsten ook meteen een 'functie' opgeven waar de regressievergelijking moet worden opgeslagen. Dat kan met **LinReg(ax+b)L1,L2,Y1** maar dat kan ook met **LinReg(ax+b)Y1**. De **Y1** kan je vinden via **[VARS]** en dan **Y-vars**.



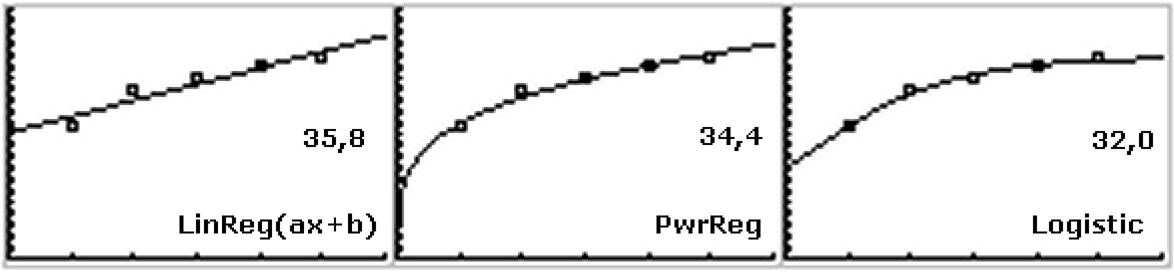
Je kunt nu een voorspelling doen over een student die op de test 12 punten haalt. Uit de tabel (via **[TABLE]**) kan je opmaken dat Y1=12,2.

Voorbeeld

Een bedrijf heeft de afgelopen 5 jaar de volgende omzetcijfers gehaald en wil graag een voorspelling doen over de omzetcijfers van volgend jaar:

jaartal	2002	2003	2004	2005	2006
omzet	21	27	29	31	32

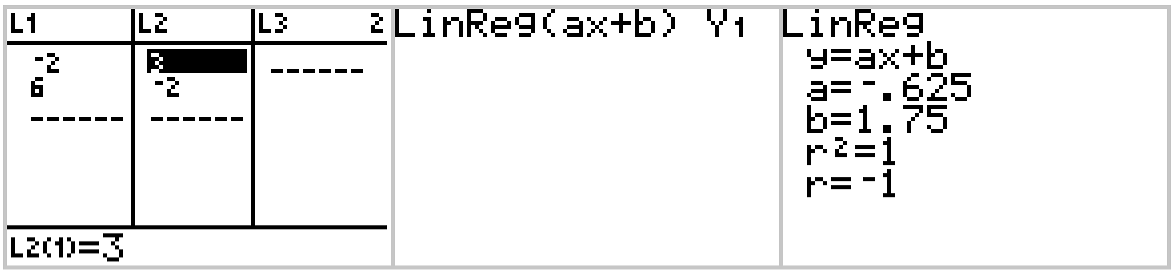
Hieronder zie je 3 verschillende 'opvattingen' over een geschikt model en een voorspelling voor de omzet van 2007 (gebruik daarvoor **[TABLE]**):



...en dat kan dus wel een paar miljoen schelen☺

Formules maken

Je kunt deze functionaliteit van de GR **misbruiken** om bij een aantal gegeven punten formules te vinden voor verschillende soorten verbanden. Je wordt (bijvoorbeeld) gevraagd een vergelijking op te stellen voor de lijn door A(-2,3) en B(6,-2). Met je GR kan je dat zo doen:



De vergelijking is: **y=-0,625x+1,75**

Bij **[STAT]** en **CALC** kan je kiezen uit lineair, kwadratisch, derdegraads, vierdegraads, exponentiëel, machtsfunctie, logistische groei, en sinus.

De **kunst** is dat je **precies** het aantal punten opgeeft dat je nodig hebt. Voor een lineair verband heb je 2 punten nodig, voor een kwadratisch verband 3 punten (niet op een lijn!), voor een derdegraads functie heb je 4 punten nodig, etc. Als je meer punten opgeeft dan nodig kan het zijn dat de GR meer een benaderde formule geeft dan de 'exacte' oplossing.

STELLING
Het minimaal aantal punten is gelijk aan het aantal parameters van de functie.

Voor y = $a \cdot x^b$ zou je dus 2 punten nodig moeten hebben. Laten we maar eens de volgende punten nemen: (1,3) en (3,6). Dit levert:

```
PwrReg
 y=a*x^b
 a=3
 b=.6309297536
 r²=1
 r=1
```

Idem voor $y=a \cdot b^x$ met dezelfde 2 punten.

```
ExpReg
 y=a*b^x
 a=2.121320344
 b=1.414213562
 r²=1
 r=1
```

Opgave 1

Gegeven zijn de volgende punten van een veeltermfunctie:

x	3	4	5	6	7
y	40	180	504	1120	2160

- Geef het functievoorschrift en bepaal de nulpunten.

Opgave 2

Hieronder zie je een overzicht van de groei van een populatie. Op basis van deze gegevens wil men een voorspelling doen over de populatie op t=10.

t	3	4	5	6	7
N	40	180	504	1120	2160

- Doe een voorspelling als er sprake zou zijn van **exponentiële groei**.
- Doe een voorspelling als er sprake is van **logistische groei**.

Opgave 3

Ik heb de volgende 5 punten: (0,1), (1,2), (2,1), (3,0) en (4,1). Het zijn 5 punten dus is er een vierdegraads veeltermfunctie die precies door deze punten gaat. Maar, gezien de ligging van de punten, ligt een sinusoïde ook wel voor de hand.

- Geef voor beide functies het functievoorschrift.
- Wat valt je op?