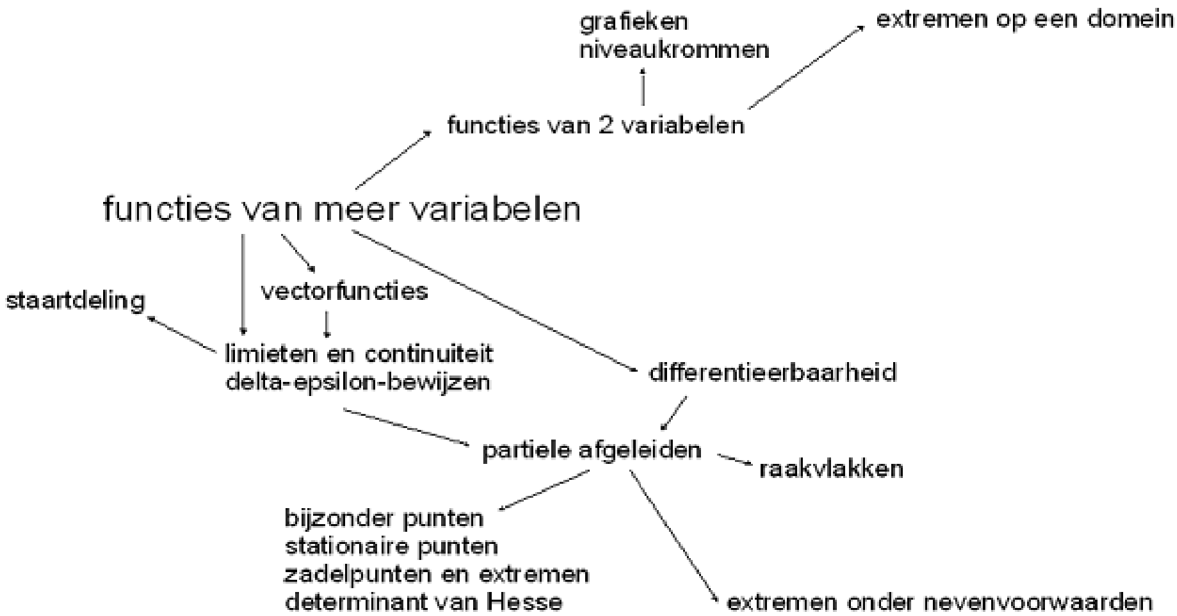
# Functies van meer variabelen voor dummy's

Dit is een 'praktische gids voor dummy's'. Hieronder kun je een aantal voorbeelden met uitleg vinden, oefeningen en uitwerkingen. De voorbeelden komen deels uit de reader en oude tentamens.




Elk onderdeel bestaat uit een voorbeeld met uitleg en één of meerdere oefeningen.

## 1. Extremen op een domein

Hier gaat het om een functie van twee variabelen op een gegeven domein. De vraag is dan wat de extremen zijn op dat gegeven domein. Meestal worden die extremen bereikt op hoek- en randpunten van een gegeven domein.

### Aanpak

- Teken bij verschillende functiewaarden niveaukrommen.
- Bedenk in welk punt de functiewaarde minimaal c.q. maximaal zal zijn.

### Voorbeeld

◊ **Opgave 4**

Gegeven is de functie $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2+2}$ op het domein $0 \le x \le 3 \ \wedge \ 1 \le y \le 4$.

a. Teken in dit domein de niveaukrommen bij $1\frac{1}{2}$, 1 en $\frac{1}{2}$.

b. Bepaal de extremen van $f$ op dit domein.

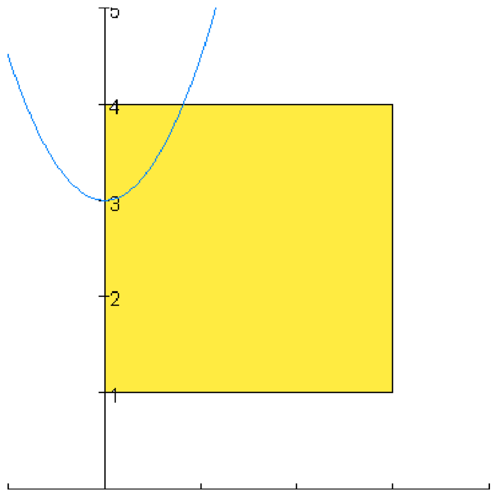
Een niveaukromme bij $1^1/_2$ wil zeggen dat $f(x,y)=1^1/_2$

$$f(x, y) = 1\frac{1}{2}$$

Dat geeft:

$$\frac{y}{x^2 + 2} = 1\frac{1}{2} \Rightarrow y = 1\frac{1}{2}x^2 + 3$$

Als je dat tekent dan krijg je:

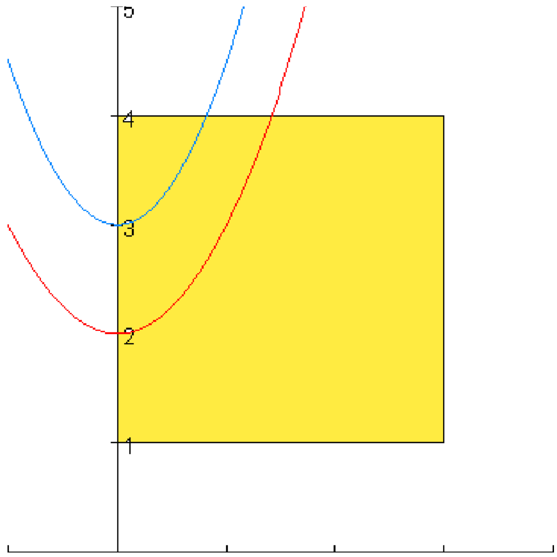



Net zo:

$$f(x, y) = 1$$

Dat geeft:

$$\frac{y}{x^2 + 2} = 1 \Rightarrow y = x^2 + 2$$

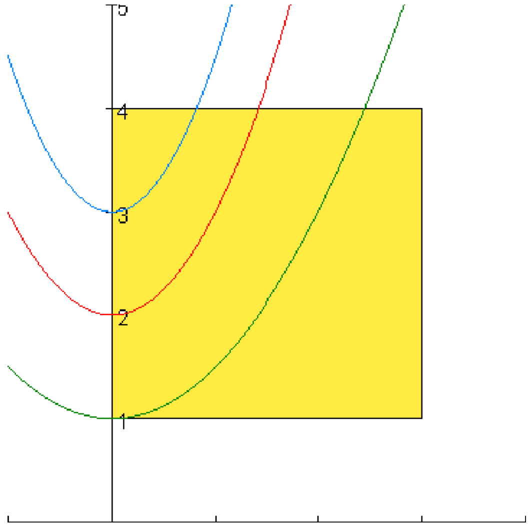



...en dan nog...

$$f(x, y) = \frac{1}{2}$$

Dat geeft:

$$\frac{y}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + 1$$




Op grond van het 'verloop' van de grafiek bij de verschillende waarden voor de niveaukromme kan je dan besluiten dat de functie bij (0,4) een **maximum** heeft en bij (3,1) een **minimum**. Ga maar na! Als je dan de coördinaten van dat punt invult in f kan je de waarde van de extremen berekenen.

- Het minimum is $f(3,1)={}^{1}/_{11}$.
- Het maximum is $f(0,4)=2$.

## 2. Limieten en continuiteit

Dit onderdeel bestaat uit twee onderdelen:

1. Bewijzen met epsilon en delta van limieten en continuïteit. Dit is lastig maar wel vrijwel altijd hetzelfde. Er zijn twee varianten:
    1. Functies van één variabele.
    2. Functies van twee variabelen.
2. Onderzoeken of een limiet (on-)afhankelijk is van de gekozen route. Dit is makkelijker. Je kunt een punt via de x- of y-as naderen, via rechte lijnen, via parabolen, enz.

## 1. Bewijzen met epsilon en delta 1

**Opgave 5**

Laat met een epsilon-delta bewijs zien dat $\lim_{x\to 1} x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 2x = 1$

Volgens het schema op het A4-tje:

1. Probeer de uitdrukking |f(x)-b|, die kleiner dan ε gemaakt moet worden, de factor |x-a|, waarmee je dat moet **doen**, te isoleren.
2. Zoek met behulp van een voorlopige δ een begrenzing van het resterende deel.
3. Bepaal nu aan de hand van de gevonden begrenzing de uiteindelijke δ

Als f(x) een **veelterm** is, zal f(x) zelf de factor |x-a| in het algemeen **niet** bevatten, maar |f(x)-b| bevat die factor altijd!

$$\lim_{x\to 1} x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 2x = 1$$

Neem $\varepsilon$ willekeurig

$$|f(x)-1| = |x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 2x - 1| = |x-1|\cdot|\ldots|$$

$$x - 1 / x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 2x - 1 \backslash x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

$$\underline{x^4 - x^3}$$

$$-5x^3 + 8x^2 - 2x - 1$$

$$\underline{-5x^3 + 5x^2}$$

$$3x^2 - 2x - 1$$

$$\underline{3x^2 - 3x}$$

$$x - 1$$

$$\underline{x - 1}$$

$$0$$

$$|f(x)-1| = |x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 2x - 1| = |x-1|\cdot|x^3 - 5x^2 + 3x + 1|$$

Kies $\delta_1 = 1$, dan $|x-1| < 1$ of $-1 < x - 1 < 1$, dus $0 < x < 2$.

Dus $|x| < 2$

$$|x^3 - 5x^2 + 3x + 1| < |x^3 + 5x^2 + 3x + 1| = 8 + 20 + 6 + 1 = 35$$

Kies $\delta_2 = \frac{1}{35}\varepsilon$ en neem $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, dan geldt voor deze $\delta$:

$$|f(x)-1| = |x-1|\cdot|x^3 - 5x^2 + 3x + 1| \le \frac{1}{35}\varepsilon\cdot 35 = \varepsilon$$

De kunst is dus om die factor |x-1| af te scheiden. Dat doe je met behulp van een **staartdeling**. De overblijvende factor kan je dan **afschatten** als je weet dat delta in ieder geval kleiner dan 1 is. Je kunt dan delta uitdrukken in epsilon. Dat betekent dat je voor iedere epsilon een delta kan vinden die voldoet. Daarmee heb je dan het bestaan van de limiet bewezen. Dat was immers de definitie!

## 2. Bewijzen met epsilon en delta 2

**Opgave 3**

Gegeven: $f(x,y) = -x^2 + xy^2 + y^2$

a. Laat met een epsilon-delta-bewijs zien dat f(x,y) continu is in (-1, 2).
b. ...

Volgens **het schema** op het A4-tje:

We moeten aantonen dat bij iedere van te voren gekozen $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is, met de eigenschap:

$$\left|\vec{x} - \vec{a}\right| < \delta \Rightarrow \left|f\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{a}\right)\right| < \varepsilon$$

In plaats van de 'kortste afstand' ga je in stappen van f(x,y) naar f(a,b). Zoiets als:

|f(x,y)-f(a,b)|<=|f(x,y)-f(a,y)+f(a,y)-f(a,b)|<=|f(x,y)-f(a,y)|+|f(a,y)-f(a,b)|

Deze uitdrukking schrijven als:

|x-a||...| + |y-b||...|

Kies $\varepsilon<0$ en kies $\delta_1=1$ om de termen |...| te begrensd te houden.
Kies dan $\delta_2$ en $\delta_3$.

### Uitwerking

We moeten aantonen dat $\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} < \delta \Rightarrow \left|f(x,y) - f(-1,2)\right| < \varepsilon$.
We beginnen dus met dit laatste en gaan proberen $\delta$ uit te drukken in $\varepsilon$. Dit kan je doen via (x,2).

$$f(x,y) = -x^2 + xy^2 + y^2$$
$$f(-1,2) = -1$$
$$\left|f(x,y) - f(-1,2)\right| =$$
$$\left|f(x,y) - f(x,2) + f(x,2) - f(1,2)\right| \leq$$
$$\left|f(x,y) - f(x,2)\right| + \left|f(x,2) - f(1,2)\right| =$$
$$\left|-x^2 + xy^2 + y^2 - \left(-x^2 + 4x + 4\right)\right| + \left|-x^2 + 4x + 4 + 1\right| =$$
$$\left|xy^2 + y^2 - 4x - 4\right| + \left|-x^2 + 4x + 5\right| \leq$$
$$|y-2|\,|xy + 2x + y + 2| + |x+1|\,|-x+5|$$
Kies $\varepsilon > 0$

We kunnen nu de $\delta$'s gaan kiezen:

$$\text{Neem } \delta_1 = 1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} < \delta_1$$
$$|x+1| < 1 \Rightarrow -1 < x+1 < 1 \Rightarrow -2 < x < 0 \Rightarrow |x| < 2$$
$$|y-2| < 1 \Rightarrow -1 < y-2 < 1 \Rightarrow 1 < y < 3 \Rightarrow |y| < 3$$
$$\begin{cases} |x| < 2 \\ |y| < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} |xy + 2x + y + 2| \leq |x||y| + 2|x| + |y| + |2| = 6 + 4 + 3 + 2 = 15 \\ |-x+5| \leq |x| + 5 = 7 \end{array}$$
$$\text{Kies } \delta_2 = \frac{1}{30}\varepsilon \text{ en } \delta_3 = \frac{1}{14}\varepsilon. \text{ Neem } \delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$$

Nu nog even laten zien dat het klopt:

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} < \delta_1 \Rightarrow |y-2||xy+2x+y+2| + |x+1||-x+5| \leq \frac{1}{30}\varepsilon \cdot 15 + \frac{1}{14}\varepsilon \cdot 7 = \varepsilon$$

Conclusie: $f(x,y) = -x^2 + xy^2 + y^2$ is continu in (-1,2)

### 3. Limieten en routes

**Opgave 2**

Gegeven $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^6+y^6}$ met $(x,y) \neq (0,0)$

We willen onderzoeken of $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$ bestaat.

a. Bereken de limiet als je nadert via lijnen met vergelijking y=mx.
b. Bestaat $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$? (leg uit)

Als je nadert via lijnen y=mx dan laat je x naderen naar 0 en voor y neem je dan mx.

a.

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} \frac{x^3y^3}{x^6+y^6} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} \frac{x^3(mx)^3}{x^6+(mx)^6} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} \frac{m^3x^6}{x^6+m^6x^6} = \frac{m^3}{1+m^6}$$

b.
Nee, de limiet moet **onafhankelijk** zijn van de route die je volgt. Als je via rechte lijnen y=mx nadert is de limiet afhankelijk van de waarde van m. De limiet bestaat niet.

### Opmerking

Het **probleem** hier is dat als er uit alle routes die je zo kan bedenken hetzelfde komt je nog steeds niet weet of dat bij elke route het geval is. Je kan best een functie bedenken waarbij het pas **fout** gaat als je nadert via bijvoorbeeld een vierentwintigste machtsfunctie. Dus je kunt met de 'limieten en routes' alleen bewijzen dat een limiet **niet** bestaat. Maar gelukkig hebben we ook nog de epsilon-delta procedure... 🙂

## 4. Partiële afgeleiden

Partieel differentiëren van een functie van meer variabelen komt er op neer dat men alle variabelen op één na als constante opvat en naar de ene overgebleven variabele differentieert. Dit is **belangrijk**. Je zult het ook bij andere opgaven steeds nodig hebben.

### Voorbeeld 1

Bepaal de partiële afgeleiden van $f(x,y)=x^2y^7$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^7$$

en

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 7x^2y^6$$

### Voorbeeld 2 kettingregel

Gegeven : $f(x,y) = \cos(x^2 - y^2)$

Er geldt :

$$f_x = -\sin(x^2 - y^2)\cdot 2x = -2x\cdot\sin(x^2 - y^2)$$

$$f_y = -\sin(x^2 - y^2)\cdot -2y = 2y\cdot\sin(x^2 - y^2)$$

### Voorbeeld 3 quotientregel

Bepaal de partiële afgeleiden van $f(x,y) = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}$.

$$f(x,y) = \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}$$

$$f_x(x,y) = \frac{0\cdot\left(x^2 - 1\right) - \left(y^2 - 1\right)2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-2x\left(y^2 - 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y\left(x^2 - 1\right) - \left(y^2 - 1\right)\cdot 0}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{2y\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{2y}{x^2 - 1}$$

## 5. Vergelijking van een raakvlak

Als z=f(x,y) een raakvlak heeft in het punt P(a,b,f(a,b)) dan kan je een vergelijking van dat raakvlak zo vinden met:

$z(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

In deze uitdrukking zijn f(a,b), $f_x(a,b)$ en $f_y(a,b)$ getallen. Je berekent ze door het punt in te vullen. Je berekent dus de functiewaarde en waarden van de partiële afgeleiden.

### Voorbeeld 1

Gegeven: $f(x,y)=x^2+x^2y-y^2+2$

- Bepaal een vergelijking voor het raakvlak in het punt (1,2). Schrijf de vergelijking zo eenvoudig mogelijk.

**Uitwerking**

$z(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

$f(x,y)=x^2+x^2y-y^2+2$

$f(1,2)=1+2-4+2=1$

$$\begin{cases} f_x=2x+2xy \\ f_x(1,2) = 2 + 4 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_y=x^2 - 2y \\ f_y(1,2) = 1 - 4 = -3 \end{cases}$$

Invullen:

$z(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$

$z(x,y)=1+6(x-1)-3(y-2)=1+6x-6-3y+6=6x-3y+1$

Dus:

$z(x,y)=6x-3y+1$

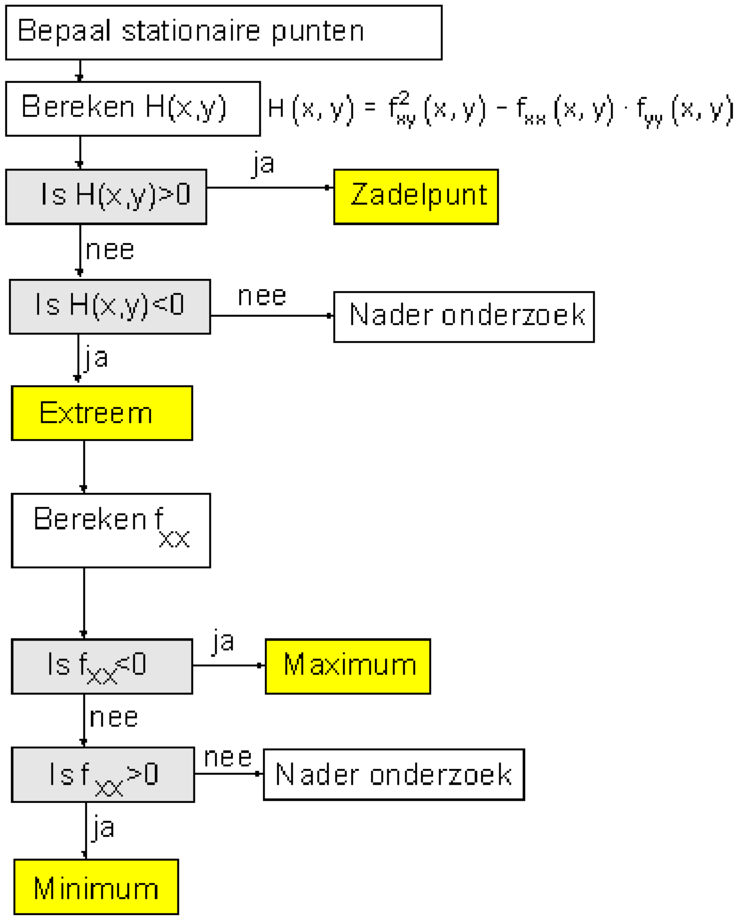
## 6. Stationaire punten, maxima, minima en zadelpunten

We hebben 'bedacht' dat als bij een functie van twee variabelen het raakvlak aan de grafiek horizontaal is je mogelijkerwijs (niet noodzakelijkerwijs) te maken zou kunnen hebben met een extreem, dat wil zeggen een maximum of een minimum.

In een punt waar het raakvlak **horizontaal** is geldt dat de partiële afgeleide naar x en de partiële afgeleide naar y beide nul moeten zijn. Helaas is dat nog geen voldoende garantie voor een maximum of minimum. Het kan ook een zadelpunt zijn. Punten met een horizontaal raakvlak noemen we **stationaire punten**.

De 'determinant' van Hesse biedt gelukkig een rekenmethode om te bepalen of je bij de gevonden stationaire punten te maken hebt met een zadelpunt of een extreem. Met behulp van de tweede afgeleide naar x en x kan je zelfs bepalen of je bij een extreem te maken hebt met een minimum of een maximum.

Het **schema** op je A4-tje geeft je een recept:



## Voorbeeld

**Opgave 3**

Gegeven: $f(x,y) = 2x^3 - y^3 + 12x^2 + 27y$

a. Bepaal de stationaire punten.
b. Bepaal eventuele zadelpunten en extremen.

a.

$f(x,y) = 2x^3 - y^3 + 12x^2 + 27y$

$$\begin{cases} f_x = 6x^2 + 24x = 0 \\ f_y = -3y^2 + 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x(x+4) = 0 \\ 3y^2 = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = -4 \\ y = -3 \vee y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

Stationaire punten: $(0,-3)$, $(0,3)$, $(-4,-3)$ en $(-4,3)$

b.

$f(x,y) = 2x^3 - y^3 + 12x^2 + 27y$

$$\begin{cases} f_x = 6x^2 + 24x \\ f_y = -3y^2 + 27 \end{cases}$$

Stationaire punten: $(0,-3)$, $(0,3)$, $(-4,-3)$ en $(-4,3)$

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx} = 12x + 24 \\ f_{xy} = 0 \\ f_{yx} = 0 \\ f_{yy} = -6y \end{array}\right\} \Rightarrow H(x,y) = 0^2 - (12x+24)\cdot(-6y) = 72y(x+2)$$

$H(0,-3) = -432 \rightarrow$ Extreem

$H(0,3) = 432 \rightarrow$ Zadelpunt

$H(-4,-3) = 432 \rightarrow$ Zadelpunt

$H(-4,3) = -432 \rightarrow$ Extreem

$f_{xx}(0,-3) = 24 \rightarrow f(0,-3)$ is een minimum $= -54$

$f_{xx}(-4,3) = -24 \rightarrow f(-4,3)$ is een maximum $= 118$

## 7. Extremen onder nevenvoorwaarden

Volgens het **schema** op het A4-tje:

| | |
|---|---|
| Gegeven: | f(x,y,...) en g(x,y,...) met g(x,y,...)=C |
| Gevraagd: | Zoek de extremen van f onder de nevenvoorwaarde g(x,y,...)=C |
| Uitwerking: | Maak een stelsel met:<br>g(x,y,...)=C<br>$f_x=\lambda\cdot g_x$<br>$f_y=\lambda\cdot g_y$<br>...<br>Los dit stelsel op en geef de extremen. |

### Voorbeeld

## Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x,y) = xy^2$

- Bepaal de extremen van f onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 = 3$

Voltijd januari 2008

$f(x,y) = xy^2$ onder nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 = 3$

$g(x,y) = x^2 + y^2$ en $g(x,y) = 3$

$f_x = y^2$

$f_y = 2xy$

$g_x = 2x$

$g_y = 2y$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y^2 = \lambda \cdot 2x \\ 2xy = \lambda \cdot 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y^2 = \lambda \cdot 2x \\ x = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y^2 = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x^2 = 3 \\ y^2 = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 3 \\ y^2 = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(-1,-\sqrt{2}\right),\left(-1,\sqrt{2}\right),\left(1,-\sqrt{2}\right) \text{ en } \left(1,\sqrt{2}\right)$$

Of....

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y^2 = \lambda \cdot 2x \\ 2xy = \lambda \cdot 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y^2 = \lambda \cdot 2x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\sqrt{3},0\right) \text{ en } \left(\sqrt{3},0\right)$$

$f\left(-1,-\sqrt{2}\right) = -2 \rightarrow \text{minimum}$

$f\left(-1,\sqrt{2}\right) = -2 \rightarrow \text{minimum}$

$f\left(-\sqrt{3},0\right) = 0$

$f\left(\sqrt{3},0\right) = 0$

$f\left(1,-\sqrt{2}\right) = 2 \rightarrow \text{maximum}$

$f\left(1,\sqrt{2}\right) = 2 \rightarrow \text{maximum}$

## Oefeningen

◊ **Opgave 5**

Gegeven is de functie $f(x, y) = xy$ op het domein $1 \le x \le 6 \wedge 1 \le y \le 4$.

a. Teken in dit domein een aantal niveaukrommen van $f$.
b. Bepaal de extremen van $f$ op dit domein.
c. Teken met een computerprogramma de ruimtegrafiek van $f$.

### Opgave 2

Laat zien met behulp van de $\delta - \varepsilon$-definitie:

$$\lim_{x \to 3} x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 14$$

### Opgave 5

Gegeven: $f(x, y) = x^2 - 4x + 2xy - y^2 + 3$

- Laat met een epsilon-delta-bewijs zien dat f(x,y) continu is in (2,-1).

**TIP**: doe dat via (2,y) dan klopt je antwoord misschien met de uitwerkingen.

### Opgave 2

Gegeven $f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ met $(x, y) \neq (0,0)$

We willen onderzoeken of $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x)$ bestaat.

a. Bereken de limiet als je nadert via lijnen met vergelijking $y=mx^3$.
b. Bestaat $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x)$ ? (leg uit)

### Opgave 4

Gegeven $f(x) = \dfrac{y^2 (x - 1)}{x^2 + y^2}$

a. Bereken de limieten van $(x, y) \to (0,0)$ voor het naderen via de x-as en het naderen via de y-as.
b. Welke conclusie kan je trekken op grond van je antwoord bij a.?

## Opgave 2

Bepaal $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ als:

a. $f(x,y) = 3xy$

b. $f(x,y) = xy^2 + y\sqrt{x}$

c. $f(x,y) = x \tan y$

d. $f(x,y) = \frac{1}{xy^2}$

e. $f(x,y) = \sin^2 xy$

f. $f(x,y) = e^{xy}$

g. $f(x,y) = y^x$

h. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{y}}$

## Opgave 3

Bepaal $f_x(x,y)$ en $f_y(x,y)$ als:

a. $f(x,y) = 2x^5 y$

b. $f(x,y) = \sin(2xy + y^2)$

c. $f(x,y) = \arcsin(2xy)$

d. $f(x,y) = \arctan(x + y^2)$

e. $f(x,y) = e^{xy^2} \ln(2x + 3y^3)$

f. $f(x,y) = \ln(4x + xy - x^2)$

## Opgave 4

Bepaal $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\frac{\partial f}{\partial z}$ als:

a. $f(x,y,z) = xy + 3yz + 5xz$

b. $f(x,y,z) = xy^2z^3$

c. $f(x,y,z) = \arctan(x^2yz)$

d. $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$

## Opgave 5

Gegeven $f(x,y) = x^2 \cdot \ln(y) + 2y \cdot \sin^2(x)$

Geef de vergelijking van het raakvlak van f in het punt $(\pi, 1)$

december 2005

## Opgave 1

Gegeven $f(x,y) = (x^2+1)(y^3-2y)$

a. Bereken de stationaire punten van f.

b. Bereken eventuele zadelpunten en extremen van f.

## Opgave 4

Gegeven: $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

- Bereken de extremen van f onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 = 1$.