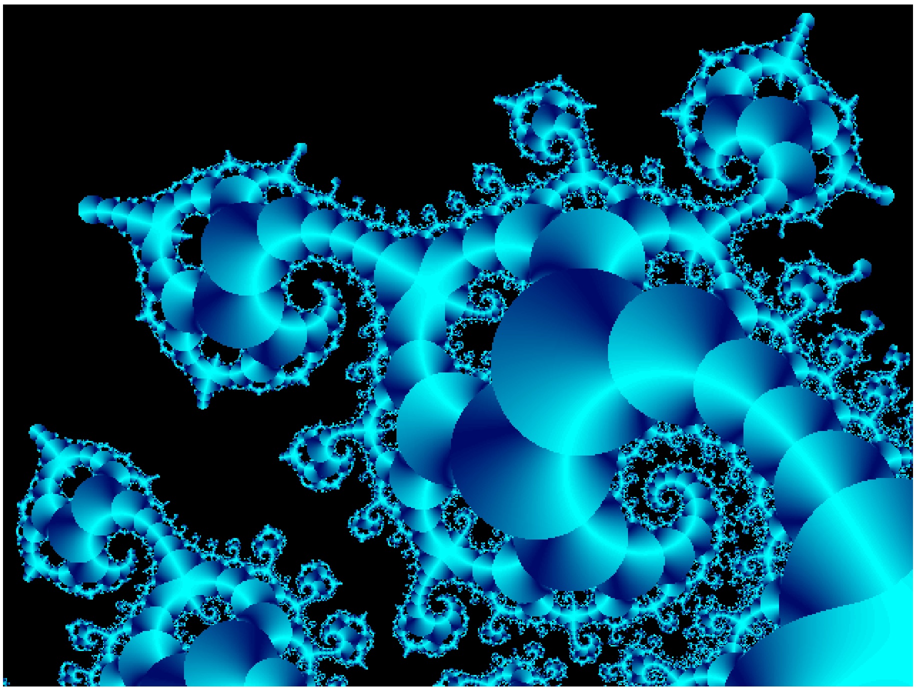
**Cursusreader**

# Analyse
# Plus
## (Capita selecta uit de Analyse)



Jaar uitgave: 2010, herziene versie 2012-2013, grondig herzien in 2016-2017
Versie: 3e versie
Opleiding: WISKUNDE
Auteur: Willem van Ravenstein (2010), Cornelia Wallien (2012), Marc de Graaf (2016)
Instituut voor Lerarenopleidingen
Cluster Lerarenopleidingen VO/BVE, Hogeschool Rotterdam

# Inhoud

# Beknopte aanwijzingen voor de cursus

## Voorkennis

Het is nodig dat je de wiskunde B (HAVO of VWO) en de analyse van het eerste studiejaar redelijk beheerst. Met name wordt er een beroep gedaan op de kennis van de goniometrische formules en van differentiëren.

## Cursusmateriaal

De leerstof van de cursus staat in zeven hoofdstukken, digitaal beschikbaar via N@tschool.
Ook de bijbehorende uitwerkingen zijn daar te vinden.
Evenals een cursushandleiding, een doorwerkschema en een proeftoets.

## Opbouw van de reader

| | |
|---|---|
| Hoofdstuk 1 | Gonio en inverse functies |
| Hoofdstuk 2 | Integreren van breuken |
| Hoofdstuk 3 | Integreren met de substitutiemethode |
| Hoofdstuk 4 | Integreren met partiële integratie |
| Hoofdstuk 5 | Oneigenlijke integralen |
| Hoofdstuk 6 | Bijzondere krommen |
| Hoofdstuk 7 | Numerieke wiskunde |
| Hoofdstuk 8 | Numerieke methoden & fractals |

De eerste vier hoofdstukken beginnen met een paragraaf Voorkennis.
De paragrafen binnen de hoofdstukken hebben de volgende structuur:

- Elke paragraaf begint met één of twee oriënterende opdrachten.
- Dan nieuwe wiskunde kennis in een theorievlak.
- Oefening van het zojuist geleerde.

**Betekenis van de kleurvlakken:**

- Geel: voorkennis
- Mintgroen: is nieuwe wiskundige kennis
- Wit: voorbeelden en illustraties

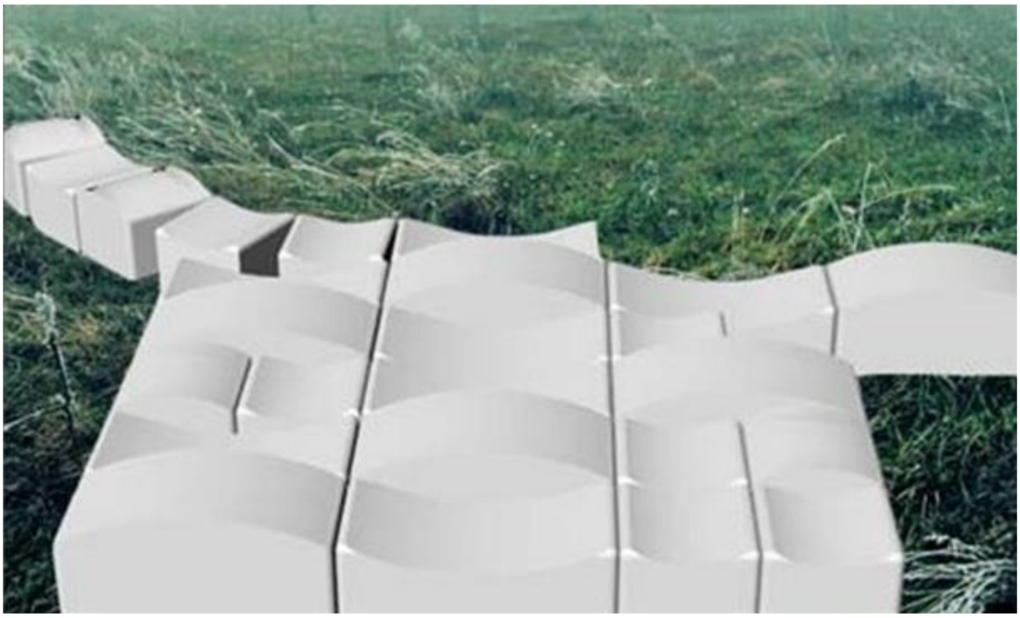
## Inzet van de student

Er zijn een onderwijsblok lang werkcolleges ingeroosterd.
**Zorg dat je voorkennis op peil is voordat je naar de les komt. Maak dus die paragraaf VOORAF!**
Tijdens de les is er gelegenheid om aan de opgaven te werken.
Het is de bedoeling dat je naast de werkcolleges tijd investeert in het maken van de opgaven en het leren van de theorie. Doordat de opgaven zijn uitgesplitst in deelvragen en door de uitgewerkte voorbeelden die in de hoofdstukken staan, verwachten we dat de student in staat is om grote delen zelfstandig door te werken.
Ga verstandig om met de uitwerkingen. **Als je niet weet hoe je een opgave moet aanpakken, bestudeer dan de voorbeelden uit de paragraaf, maar kijk niet in de uitwerkingen.**

## ICT & software

Tijdens deze cursus gaan zullen we gebruik maken van VU-Grafiek, Excel en Maple. Deze software is te vinden op de studieomgeving van het hogeschoolnetwerk. Vu-Grafiek staat ook in de werkruimte op N@tschool.

# Hoofdstuk 1 Gonio en inverse functies



*sinus-cosinus sofa*

## Inhoud

# Voorkennis Goniometrische functies

## Opgave V1

Hiernaast zie je in een schema van de bijzondere hoeken $\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi$ de exacte waarden van sinus, cosinus en tangens.

| $x$ | 0 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - |

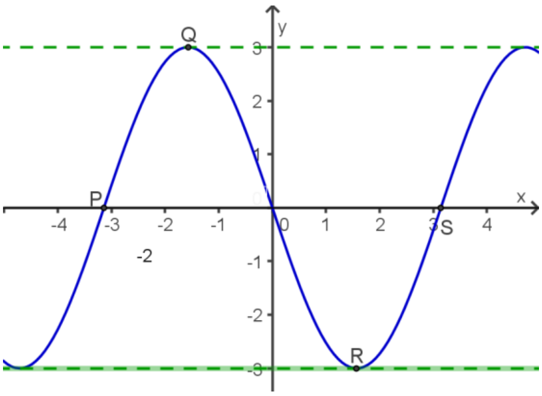
**a.** Teken een gelijkbenige rechthoekige driehoek en geef een uitleg voor de waarde van $\sin\frac{1}{4}\pi$, $\cos\frac{1}{4}\pi$ en $\tan\frac{1}{4}\pi$.

**b.** Teken een gelijkzijdige driehoek $ABC$ met de hoogtelijn uit $C$ en geef een uitleg voor de waarde van $\sin\frac{1}{6}\pi$, $\cos\frac{1}{6}\pi$ en $\tan\frac{1}{6}\pi$.

**c.** Bewijs in een willekeurige rechthoekige driehoek de eigenschappen:

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)\,,\quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \text{en} \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

## Opgave V2




Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f$ met $f(x) = -3\sin x$ op het interval $-5 \le x \le 5$.

**a.** Geef de exacte coördinaten van de punten $P$, $Q$, $R$ en $S$.

**b.** Op de grafiek liggen drie punten met $y$-coördinaat $1\frac{1}{2}$. Bereken exact de $x$-coördinaat van die punten.

**c.** De grafiek van functie $g$ ontstaat uit de grafiek van $f$ door de grafiek van $f$ twee eenheden naar rechts te verschuiven.
Geef het functievoorschrift van $g$.

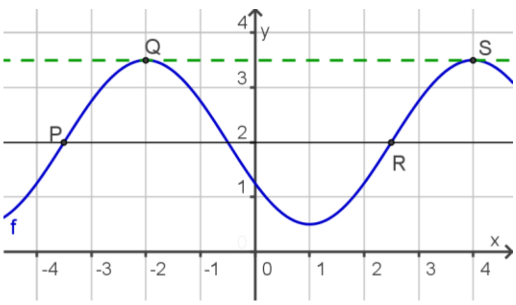
**d.** Welke verschuiving moet je op de grafiek van $f$ toepassen om de grafiek van de functie $h(x) = 3\sin x$ te krijgen?

Het algemene functievoorschrift van een **sinusoïde** is $f(x) = d + a\sin b(x - c)$.
Hierin geldt:

- De evenwichtsstand is de horizontale lijn $y = d$.
- De amplitude is $|a|$.
- Het verband tussen b en de periode is op drie manieren te schrijven:
  $b \times \text{periode} = 2\pi$ of $b = \dfrac{2\pi}{\text{periode}}$ of $\text{periode} = \dfrac{2\pi}{b}$.
- Het beginpunt van een golf ligt bij $x = c$.

Een beginpunt van een sinusgolf is het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

## Opgave V3




Hiernaast staat de grafiek van $f(x) = 2 + 1\frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}\pi(x - 2\frac{1}{2})$.

**a.** Leg uit waarom $R$ het beginpunt is van deze sinusoïde.

**b.** Geef de exacte coördinaten van de punten $P$, $Q$ en $S$.

**c.** Schrijf in de afbeelding de volgende woorden erbij: amplitude, evenwichtsstand, maximum.

### Opgave V4

Gegeven is de functie $f(t) = 1 - 2\cos t$ met $t \in [0, 2\pi]$.

**a.** Schets de grafiek van *f*. Geef het bereik van *f*.

**b.** Geef de periode en de amplitude van $f$.

**c.** De grafiek van de functie *g* ontstaat door de grafiek van f drie eenheden naar links te verschuiven en vervolgens één eenheid naar beneden. Geef een functievoorschrift van g.

**d.** Gegeven is de functie h met $h(t) = 1 - 2\cos bt$. De periode van *h* is $\frac{1}{2}$. Bereken *b*.

### Opgave V5

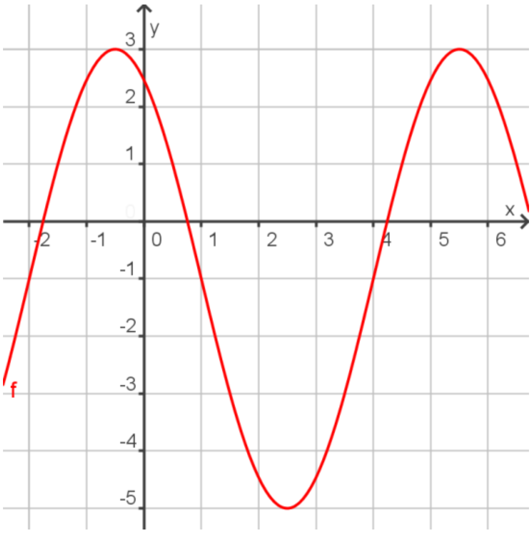
Hiernaast zie je de grafiek van een functie $f(x) = d + a\sin b(x - c)$ .

**a.** Geef de evenwichtsstand, de amplitude en de periode.

**b.** Op de grafiek ligt het punt $(-2, -1)$. Bereken *c*.

**c.** Bereken de waarden van *a, b,* c en *d* en geef een functievoorschrift voor *f.*

**d.** Geef bij de grafiek ook een voorschrift in de vorm $g(x) = d + a\cos b(x - c)$.




### Opgave V6

Differentieer de volgende functies en vermeld welke regel je hebt gebruikt:

**a.** $f(t) = 1 + 2\sin \frac{1}{2}t$

**b.** $g(t) = -1 - 3\cos 2(t+1)$

**c.** $h(t) = 1 - \cos \pi t$

**d.** $k(t) = \pi \sin(1 - 2t)$

**e.** $l(t) = 2\cos^3 t$

**f.** $p(t) = t\cos t$

Voor de afgeleiden van de sinus- en cosinusfunctie geldt:
Als $f(t) = \sin t$, dan is $f'(t) = \cos t$
Als $g(t) = \cos t$, dan is $g'(t) = -\sin t$
Als $h(t) = \tan t$, dan is $h'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

### Opgave V7

Bereken de volgende integralen.

**a.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 3\sin x \, \mathrm{d}x$

**c.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin 4x \, \mathrm{d}x$

**b.** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (-1 + \cos \tfrac{1}{2}x) \, \mathrm{d}x$

**d.** $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$

# 1.1 Samengestelde functies

| | |
|---|---|
| Veel functies kun je opvatten als de **samenstelling** van eenvoudiger functies.<br>De functie is te schrijven als $h(x)=g(f(x))$. | **Voorbeeld**<br>$h(x)={}^2\log(x+3)$<br>$x \xrightarrow{+3} x+3 \xrightarrow{{}^2\log(...)} {}^2\log(x+3)$<br>dan is $f(x)=x+3$ en $g(x)={}^2\log x$ |

### Opgave 1

De volgende functies zijn te schrijven als $h(x)=g(f(x))$.

Geef mogelijke functievoorschriften voor *f* en *g*.

**a.** $h(x)=3(x-2)$

**b.** $h(x)=(x-6)^3$

**c.** $h(x)=\sin(2x+\frac{1}{2}\pi)$

**d.** $h(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$ (meer mogelijkheden)

**e.** $h(x)=2^{x-3}$

### Opgave 2

Geef het functievoorschrift van *f* als:

**a.** $x \xrightarrow{(...)^3} ... \xrightarrow{+4} ... \xrightarrow{\frac{1}{...}} f(x)$

**b.** $x \xrightarrow{\frac{1}{...}} ... \xrightarrow{-4} ... \xrightarrow{(...)^2} f(x)$

**c.** $x \xrightarrow{+\frac{1}{2}\pi} ... \xrightarrow{\cos(...)} ... \xrightarrow{\times -3} f(x)$

### Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x)=3x-2$ en $g(x)=x^2+3x$.

**a.** Geef het functievoorschrift van $h(x)=g(f(x))$.

**b.** Geef het functievoorschrift van $k(x)=f(g(x))$

### Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x)=2x+4$.

**a.** Voor welke functie $h(x)=ax+b$ geldt $h(f(x))=x$ ?

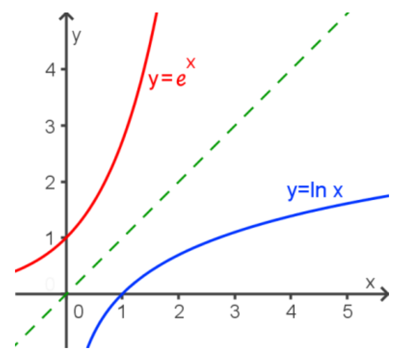
**b.** Onderzoek of voor deze functie *h* ook geldt dat $f(h(x))=x$.

**c.** Plot in één figuur de grafieken van *f* en *h*. Wat valt je op?

## 1.2 Inverse functies

Als voor twee functies *f* en *g* geldt: $f(g(x)) = x$ en $g(f(x)) = x$ voor alle waarden van *x* uit het domein dan zijn *f* en *g* elkaars **inverse functie**.
Notatie: $f^{\text{inv}}$ of $f^{-1}$.
De grafiek van $f^{-1}$ is het spiegelbeeld in de lijn $y = x$ van de grafiek van *f*. Het domein van $f^{-1}$ is het bereik van *f* en het bereik van $f^{-1}$ is het domein van *f*.

Het bekendste voorbeeld is $f(x) = \ln x$ en $f^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$.




**Voorbeeld**

$$y = {}^2\log(x+3) - 4$$

$$x \xrightarrow{+3} x+3 \xrightarrow{{}^2\log(...)} {}^2\log(x+3) \xrightarrow{-4} {}^2\log(x+3) - 4$$

$$2^{y+4} - 3 \xleftarrow{-3} 2^{y+4} \xleftarrow{2^{\cdots}} y+4 \xleftarrow{+4} y$$

$$x = 2^{y+4} - 3$$

De inverse functie van $f(x) = {}^2\log(x+3) - 4$ is $f^{-1}(x) = 2^{x+4} - 3$

### Opgave 5

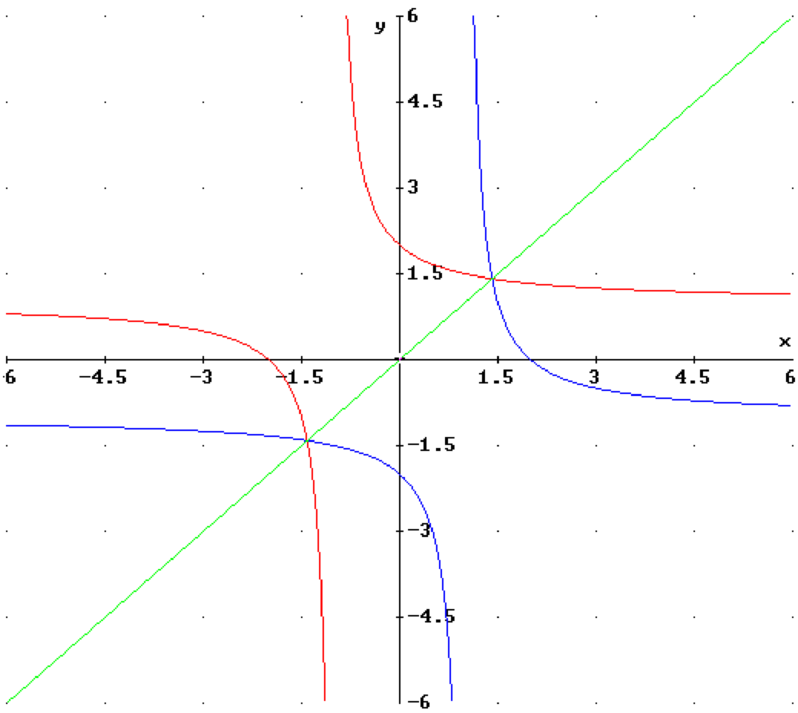
Gegeven de functie

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$$

**a.** Welke grafiek in de afbeelding hiernaast is de grafiek van *f*?

**b.** Leg uit waarom de andere hyperbool de grafiek van $f^{-1}$ is.

**c.** Geef een functievoorschrift voor $f^{-1}$.




### Opgave 6

Gegeven is de functie $g(x) = \dfrac{1}{3x+6}$.

**a.** Voor welke functie *k* geldt $k(g(x)) = x$?

**b.** Onderzoek voor deze functie *k* ook geldt dat $g(k(x)) = x$.

**c.** Plot in één figuur de grafieken van *g* en *k*. Teken ook de lijn *y*=*x*.
Wat kun je nu controleren?

**Voorbeeld 1**
Bereken de inverse functie van
$f(x) = {}^{3}\log(2x+6)$ .

**Oplossing**
De functie *f* voldoet aan de volgende samenstelling:
$x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{+6} 2x+6 \xrightarrow{{}^{3}\log\ldots} {}^{3}\log(2x+6)$

Voor het berekenen van de inverse functie kun je het volgende schema gebruiken:
$\ldots \longleftarrow \ldots \longleftarrow \ldots \longleftarrow x$
Vul dit schema in door stap voor stap terug te werken en elke bewerking om te keren.

Dit geeft:
$\frac{1}{2}\cdot 3^x - 3 \xleftarrow{:2} 3^x - 6 \xleftarrow{-6} 3^x \xleftarrow{3^{\ldots}} x$ ,
dus $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\cdot 3^x - 3$ .

**Voorbeeld 2**
Bereken de inverse functie van $g(x) = \dfrac{4}{3x+2}$

**Oplossing**
Als *g* de inverse functie $g^{-1}$ heeft dan volgt uit $y = g(x)$ dat $x = g^{-1}(y)$ .
Dus moet gelden: $x = \dfrac{4}{3y+2}$ voor $y = g^{-1}(x)$ .
Door *y* uit te drukken in *x* vind je $g^{-1}(x)$:

$$x = \frac{4}{3y+2}$$

$$3y+2 = \frac{4}{x}$$

$$3y = \frac{4}{x} - 2 = \frac{4}{x} - \frac{2x}{x} = \frac{4-2x}{x}$$

dus $g^{-1}(x) = \dfrac{4-2x}{3x}$

## Opgave 7
Bereken van de volgende functies een voorschrift van de inverse functie.
Kies zelf tussen de manier van werken in voorbeeld 1 en die in voorbeeld 2.

**a.** $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}+6}$

**b.** $g(x) = \mathrm{e}^{2x+4}$

**c.** $h(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

**d.** $k(x) = 3\ln(\sqrt{x}+4)$

**e.** $l(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x}+4)$

**f.** $m(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$

## Opgave 8
Gegeven is de functie $f(x) = x^2$ met domein $\mathbb{R}$ .

**a.** Verklaar met behulp van de grafiek waarom *f* geen inverse functie heeft.

**b.** De functie $g(x) = x^2$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$ heeft wél een inverse functie.
Verklaar dit en geef het functievoorschrift van de inverse functie.

**c.** Verklaar waarom $h(x) = x^2$ met domein $\langle\leftarrow, 0]$ een inverse heeft en geef het voorschrift van deze inverse.

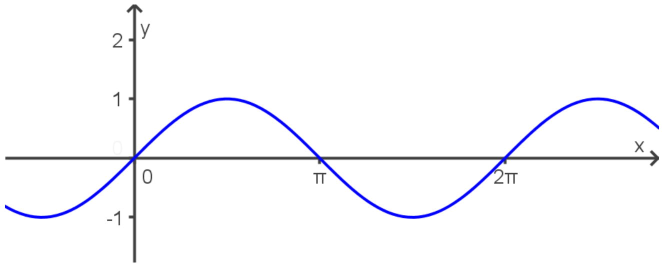
Een functie $f$ heeft een inverse functie als er bij elke waarde van het bereik precies één waarde van het domein hoort. Voor de grafiek van $f$ betekent dit dat deze alleen stijgend of alleen dalend op het domein mag zijn.
Als een functie zowel stijgt als daalt op het domein is er geen inverse functie. Door het domein te beperken zodat iedere functiewaarde hoogstens één keer voorkomt, is er wel een inverse functie bij dat deel van het domein.

## 1.3 inverse van goniometrische functies

De meeste rekenmachines bezitten de functies $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ en $\tan^{-1}$. We gaan deze functies verder onderzoeken.

**Opgave 9**

Gegeven is de functie $f(x)=\sin x$ en $-1\le k\le 1$.




**a.** Neem $0<k<1$. Hoeveel oplossingen heeft $\sin x=k$ als $-\pi\le x\le 2\pi$?

**b.** En als $-1<k\le 0$?

**c.** De vergelijking $\sin x=k$ met $-1\le k\le 1$ kan meerdere oplossingen hebben. Waarom heeft $\sin x=k$ met $-1\le k\le 1$ precies één oplossing als $-\frac{1}{2}\pi\le x\le\frac{1}{2}\pi$?

**Opgave 10**

**a.** Geef twee intervallen waarop alle vergelijkingen $\sin x=k$ met $-1\le k\le 1$ precies één oplossing hebben.

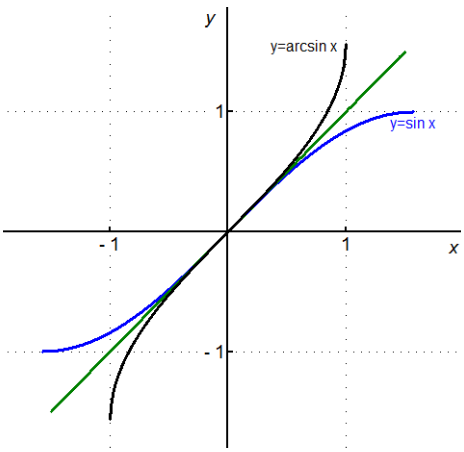
**b.** Geef twee intervallen waarop alle vergelijkingen $\cos x=k$ met $-1\le k\le 1$ precies één oplossing hebben.

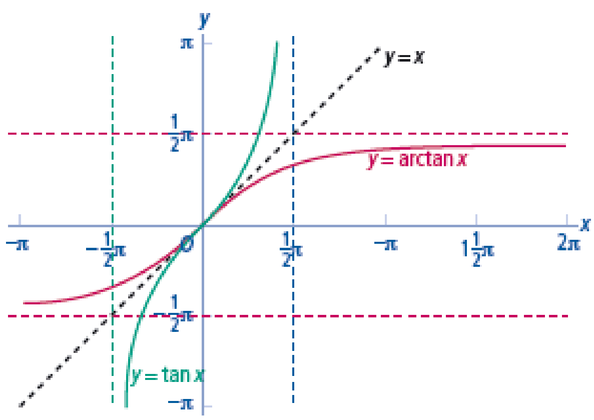
**c.** Geef twee intervallen waarop alle vergelijkingen $\tan=k$ ($k\in\mathbb{R}$) precies één oplossing hebben.

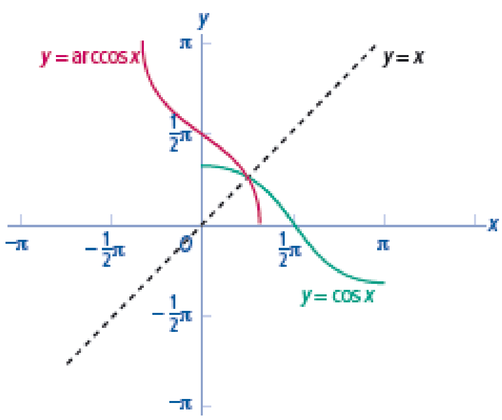
Door geschikte domeinen te kiezen kunnen de volgende inverse functies worden gedefinieerd:

- de inverse functie van $f(x)=\sin x$ met $D_f=[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ is $f^{-1}(x)=\sin^{-1}x=\arcsin x$ met domein $[-1,1]$.
- de inverse functie van $g(x)=\cos x$ met $D_g=[0,\pi]$ is $g^{-1}(x)=\cos^{-1}x=\arccos x$ met domein $[-1,1]$.
- de inverse functie van $h(x)=\tan x$ met $D_h=[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ is $h^{-1}(x)=\tan^{-1}x=\arctan x$ met domein $\mathbb{R}$.

De verzamelnaam voor de inverse functies van de goniometrische functies is **cyclometrische functies.**



**Voorbeeld**

Gebruik de tabel en bereken $\arcsin\frac{1}{2}$ en $\arccos\frac{1}{2}\sqrt{2}$

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $1$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan x$ | $0$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | - |

**Oplossing**

- Uit $\arcsin\frac{1}{2}=y$ volgt $\sin y=\frac{1}{2}$ met $-\frac{1}{2}\pi\leq y\leq\frac{1}{2}\pi$ .
  Omdat $\sin\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}$ is $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\pi$ .
- Uit $\arccos\frac{1}{2}\sqrt{2}=y$ volgt $\cos y=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ met $0\leq y\leq\pi$ .
  Omdat $\cos\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ is $\arccos\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{4}\pi$ .

## Opgave 11

Leg uit dat $\arctan\sqrt{3}=\frac{1}{3}\pi$ .

## Opgave 12

Bereken exact de volgende functiewaarden. Maak gebruik van de symmetrie en de periode van de goniometrische functies en van de tabel bij het voorbeeld.

**a.** $\arcsin 1$
**b.** $\arccos 0$
**c.** $\arccos\frac{1}{2}$
**d.** $\arcsin(-\frac{1}{2})$
**e.** $\arccos\frac{1}{2}\sqrt{3}$
**f.** $\arccos(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$
**g.** $\arccos(-\frac{1}{2})$
**h.** $\arccos(-\frac{1}{2}\sqrt{2})$
**i.** $\arctan 1$
**j.** $\arccos(-1)$
**k.** $\arcsin(-1)$
**l.** $\arctan(-\sqrt{3})$

## Opgave 13

Kies een passend domein bij elk van de volgende functies en geef de bijbehorende inverse functie.

**a.** $f(x)=2\sin x$
**b.** $g(x)=-\cos x$
**c.** $h(x)=\tan 2x$
**d.** $f(x)=\arccos 2x$
**e.** $h(x)=e^{\arcsin x}$
**f.** $l(x)=\ln(2\arctan x)$

## Opgave 14

Geef het exacte domein en het bereik van de volgende functies:

**a.** $f(x)=\arcsin 2x$
**b.** $g(x)=3\arccos 0{,}5x$
**c.** $h(x)=2\arctan 3x$
**d.** $k(x)=2\arcsin(-x)$
**e.** $l(x)=\arccos(4-\sqrt{x})$
**f.** $m(x)=\dfrac{1}{\arctan x}$

## Opgave 15

Teken, zonder eerst te plotten, de grafieken van de volgende functies.
Controleer het resultaat met een plot.

**a.** $f(x)=\tan(\arctan x)$
**b.** $g(x)=\arcsin(\sin x)$

## 1.4 Cyclometrische functies differentiëren

In deze paragraaf kijken we naar het differentiëren van de inversen van de goniometrische functies.

**Voorbeeld:** Wat is de afgeleide van $f(x) = \arcsin x$?

Uit $y = \arcsin x$ volgt $x = \sin y$ met $-\frac{1}{2}\pi \le y \le \frac{1}{2}\pi$.

Links en rechts differentiëren geeft $1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$ (kettingregel!) zodat $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$

Uit $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ en $x = \sin y$ volgt $\cos^2 y + x^2 = 1$ en dus vind je $\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ofwel $f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

### Opgave 16

Toon aan op dezelfde manier als in het voorbeeld :

**a.** $g(x) = \arccos x \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**b.** $h(x) = \arctan x \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Als $f(x) = \arcsin x$ dan is $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Als $g(x) = \arccos x$ dan is
$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Als $h(x) = \arctan x$ dan is $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

**Voorbeeld**
Bereken de afgeleide functies van
$f(x) = x \cdot \arcsin x$,

$g(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ en

$h(x) = \arctan 2\sqrt{x}$.

**Oplossing**

$f'(x) = \arcsin x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$h'(x) = \frac{1}{1+(2\sqrt{x})^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$
$\frac{1}{1+4x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{(1+4x)\sqrt{x}}$

### Opgave 17

Bereken de afgeleide van de volgende functies.

**a.** $f(x) = \arctan 4x$

**b.** $g(x) = \arcsin \frac{1}{2}x$

**c.** $h(x) = \arcsin x\sqrt{x}$

**d.** $k(x) = \arcsin(\cos x)$

### Opgave 18

**a.** Bereken de afgeleide van $f(x) = \arccos x + \arccos(-x)$.

**b.** Welke conclusie kun je trekken uit het resultaat van opdracht a?

**c.** Geef een formule voor $\arccos x + \arccos(-x)$ en vermeld voor welke waarden van $x$ deze formule geldt.

**d.** Bewijs ook dat $\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi$.

**e.** Voor welke waarden van $x$ geldt de formule van opdracht d?

**f.** Bewijs dat $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = k$ en bereken de waarde van de constante $k$.

# Hoofdstuk 2 Integreren van breuken

## Inhoud

# Voorkennis Differentiëren en primitiveren

Bij het differentiëren gebruik je standaardafgeleiden (zie de bovenste lijst) en pas je rekenregels (tabel eronder) toe.

| standaardfunctie | afgeleide |
|---|---|
| $f(x)=c$ | $f'(x)=0$ |
| $f(x)=x^n$ | $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ |
| $f(x)=\mathrm{e}^x$ | $f'(x)=\mathrm{e}^x$ |
| $f(x)=\ln x$ | $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ |
| $f(x)=\sin x$ | $f'(x)=\cos x$ |
| $f(x)=\cos x$ | $f'(x)=-\sin x$ |
| $f(x)=a^x$, $(a>0)$ | $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ |
| $f(x)={}^a\log x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ | $f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln a}$ |

### Opgave V1

Geef de afgeleide functie van:

**a.** $f(x)=x^3\cdot\sin x$

**b.** $k(x)=\sqrt{x}\cdot\cos x$

**c.** $l(x)=\mathrm{e}^x+2^x$

**d.** $m(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

### Opgave V2

Differentieer:

**a.** $f(x)=\frac{1}{2}x+2\sin x$

**b.** $k(x)=\sqrt{x^2-3}$

**c.** $l(x)=\ln x\cdot\sqrt{x}$

**d.** $m(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

| functie | afgeleide | naam van regel |
|---|---|---|
| $f(x)+g(x)$ | $f'(x)+g'(x)$ | *somregel* |
| $c\cdot f(x)$ | $c\cdot f'(x)$ | *constante maal f* |
| $f(x)\cdot g(x)$ | $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ | *productregel* |
| $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ | $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ | *quotiëntregel* |
| $f(g(x))$<br>$x\to u\to y$ | $f'(g(x))\cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$<br>$f'(x)=y'\cdot u'$ of $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ | *kettingregel* |

### Opgave V3

Gegeven is de functie $f(x)=x^4-\frac{1}{2}x$.

**a.** Bereken de afgeleide functie van *f*.

**b.** Bereken exact de extreme waarde(n) van *f*.

**c.** Bereken exact de helling van de grafiek van *f* in het punt met *x*-coördinaat 3.

**d.** Maak de opdrachten a, b en c ook voor de functie $g(x)=\dfrac{2x+2}{x-2}$

### Opgave V4

In opgave V1, V2 en V3 heb je ongemerkt de *constante-maal-regel*, *somregel*, *productregel*, *quotiëntregel en kettingregel* gebruikt. Geef aan waar je welke regel gebruikt.

Bij het **primitiveren** van een functie $f$ ga je op zoek naar een functie $F$ waarvan de afgeleide $f$ is.

Als $f$ continu is op interval $[a,b]$ dan is

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

waarbij $F$ een primitieve functie is van $f$.
Ofwel: $F' = f$.

**Voorbeeld:** Bereken exact $\int_1^4 x^2\,\mathrm{d}x$.

**Oplossing**:
Een primitieve functie is $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, want

$F'(x) = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2$

Dus

$$\int_1^4 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_1^4 = \tfrac{1}{3}\cdot 4^3 - \tfrac{1}{3}\cdot 1^3 = \tfrac{64}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{63}{3} = 21$$

| standaardfunctie | primitieve |
|---|---|
| $f(x) = x^n$, $(n \neq -1)$ | $F(x) = \dfrac{1}{n+1}\cdot x^{n+1} + c$ |
| $f(x) = \mathrm{e}^x$ | $F(x) = \mathrm{e}^x + c$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $F(x) = \ln\lvert x\rvert + c$ |
| $f(x) = \sin x$ | $F(x) = -\cos x + c$ |
| $f(x) = \cos x$ | $F(x) = \sin x + c$ |
| $f(x) = a^x$, $(a > 0)$ | $F(x) = \dfrac{1}{\ln a}\cdot a^x + c$ |
| $f(x) = \ln x$ | $F(x) = x\ln x - x + c$ |
| $f(x) = {}^a\log x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ | $F(x) = \dfrac{1}{\ln a}(x\ln x - x) + c$ |

## Opgave V5

Primitiveer de volgende functies.

**a.** $f(x) = x^2 + \sqrt{2x}$

**b.** $g(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x}$

**c.** $h(x) = \sin 3x - \cos 2x$

**d.** $k(x) = \mathrm{e}^{2x-2}$

**e.** $l(x) = 3^x + 3^{-x} + x^3 + 3x$

**f.** $m(x) = \dfrac{1}{2x-4}$

## Opgave V6

Bereken exact:

**a.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$

**b.** $\displaystyle\int_0^\pi 2\sin(2-x)\,\mathrm{d}x$

**c.** $\displaystyle\int_2^5 \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^x - \tfrac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$

## Opgave V7

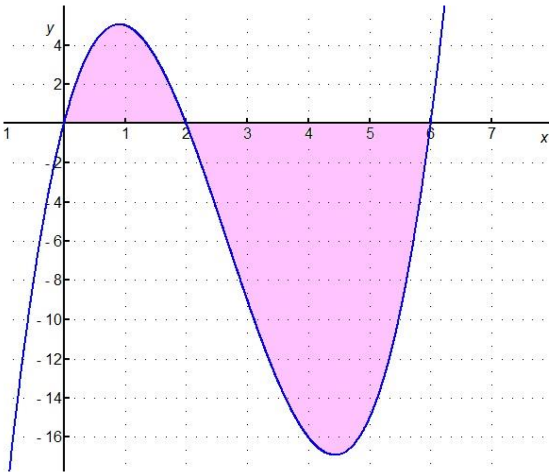
Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$.

**a.** Bereken exact de nulpunten van $f$.

**b.** De grafiek van $f$ en de x-as sluiten de twee gekleurde gebieden in.
Leg uit dat je de totale oppervlakte van deze gebieden niet kunt berekenen met

$$\int_0^6 (x^3 - 8x^2 + 12x)\,\mathrm{d}x.$$

**c.** Bereken exact de totale oppervlakte van de gekleurde gebieden.



## Opgave V8

**a.** Bereken met de quotiëntregel de afgeleide van de functie $f(x) = \tan x$.

**b.** Vereenvoudig je antwoord, schrijf het daarna nog op diverse manieren.

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

## Opgave V9

In de lijst met primitieven staat ook de primitieve van de natuurlijke logaritme:
$f(x) = \ln x \Rightarrow F(x) = x\ln x - x + C$.
Controleer door te differentiëren dat geldt: $F'(x) = f(x)$.

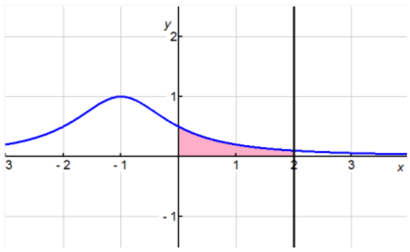
## 2.1 Cyclometrische functies als primitieven

Nu we de afgeleide van arcsin, arccos en arctan kennen, kunnen we deze functies gebruiken bij het integreren.

**Voorbeeld**

Gegeven $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$.

Bereken de oppervlakte van het gebied dat is ingesloten door de grafiek van *f*, de x-as, de *y*-as en de lijn *x*=2.



**Uitwerking**

$\dfrac{1}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{(x+1)^2+1}>0$.

Dus de oppervlakte is $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x=\left[\arctan(x+1)\right]_0^2=$$

$$=\arctan(3)-\arctan(1)\approx 1{,}2490-\tfrac{1}{4}\pi\approx 0{,}4636$$

Zodat de gevraagde oppervlakte is

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\pi$$

### Opgave 1

Herschrijf eerst de functie en bereken dan~zo mogelijk exact:

**a.** $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{2}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_2^{4} \frac{1}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x$

### Opgave 2

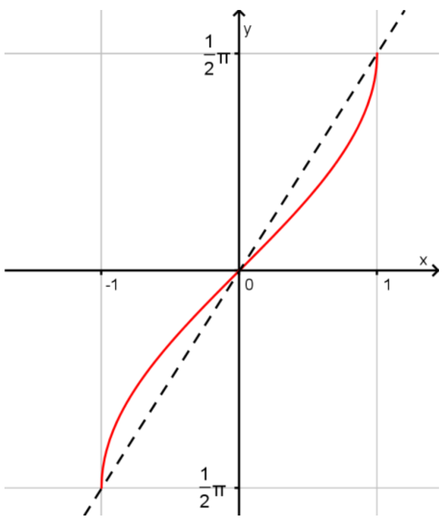
**a.** Toon door te differentiëren aan dat $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$

**b.** Geef een primitieve voor $g(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$

### Opgave 3

Bereken:

**a.** $\displaystyle\int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$



### Opgave 4

**a.** Toon door te differentiëren aan dat de functie $F(x)=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ een primitieve is van $f(x)=\arcsin x$.

**b.** Bereken de oppervlakte van één van de gebieden ingesloten door de grafiek van *f* en de lijn door de beide randpunten.

### Opgave 5

**a.** Vul het functievoorschrift van $G(x)=x\cdot\arccos x+\ldots$ aan zodat G een primitieve is van $g(x)=\arccos x$.

**b.** Bereken de oppervlakte van het gebied onder de grafiek van *g* op het interval [0, 1].

## 2.2 Integreren van breuken

**Voorbeeld**

Geef een primitieve functie van $f(x)=\dfrac{x^4+3x^3+6}{x^2}$.

**Oplossing**

Herschrijf de functie $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2}+\dfrac{3x^3}{x^2}+\dfrac{6}{x^2}=x^2+3x+\dfrac{6}{x^2}$, dit is een som van standaardfuncties.

Dan is een primitieve functie $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\dfrac{6}{x}+C$

### Opgave 6

Herschrijf de functie en geef een primitieve.

**a.** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ **b.** $f(x)=\dfrac{x^4+3x^3+x+5}{x}$ **c.** $f(x)=\dfrac{x^4+x^3}{x^5}$

### Opgave 7

Gegeven zijn de functies $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $g(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ en $h(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+1}$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|u(x)|+C$$

**a.** Geef een primitieve van *f* en van *g*.
**b.** Leg uit dat $h(x)=f(x)+g(x)$.
**c.** Geef een primitieve van *h*.

### Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+7}$

**a.** De functie is te schrijven als $f(x)=\dfrac{2x}{x+7}+\dfrac{3}{x+7}$.
Licht toe dat deze splitsing correct is, maar ongeschikt om $f$ te primitiveren.

**b.** De functie is ook te schrijven als $f(x)=2+\dfrac{-11}{x+7}$.
Licht toe dat deze splitsing correct is en wel geschikt om $f$ te primitiveren.

**Voorbeeld**

Geef een primitieve functie van $f(x)=\dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$.

$$\begin{array}{l} x-1\,/\,x^2-3x+5\,\backslash\,x-2 \\ \quad\;\; \underline{x^2-\;x} \\ \qquad\; -2x+5 \\ \qquad\; \underline{-2x+2} \\ \qquad\qquad\;\; 3 \end{array}$$

**Oplossing**

Herschrijf de functie (zie staartdeling)

$f(x)=x-2+\dfrac{3}{x-1}$, dit is een som van standaardfuncties.

Dan is een primitieve functie $F(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3\ln|x-1|+C$

### Opgave 9

Herschrijf de functie en geef een primitieve.

**a.** $f(x)=\dfrac{x^2+x-8}{x-1}$ **b.** $f(x)=\dfrac{2x^2+x-8}{x+1}$ **c.** $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1}$

## 2.3 Integreren met breuksplitsen

Hoe gaat eigenlijk het optellen met breuken?

$\frac{2}{7}+\frac{3}{4}=\frac{8}{28}+\frac{21}{28}=\frac{29}{28}$ of met variabelen $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

Het omgekeerde kan ook (bron www.wisfaq.nl):

$\frac{x+17}{x^2-x-12}=\frac{x+17}{(x+3)(x-4)}=\frac{...}{x+3}+\frac{...}{x-4}$ , wat moet er op de puntjes staan?

Na enig puzzelen vind je $\frac{-2}{x+3}+\frac{3}{x-4}$.

Hoe kun je die waarden systematisch vinden?

$$\frac{x+17}{(x+3)(x-4)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)}{(x+3)(x-4)}+\frac{B(x+3)}{(x+3)(x-4)}=\frac{A(x-4)+B(x+3)}{(x+3)(x-4)}$$

Dus $A(x-4)+B(x+3)=x+17 \Rightarrow (A+B-1)x+(-4A+3B-17)=0$, waar voor alle $x$, dus

$$\begin{cases} A+B-1=0 \\ -4A+3B-17=0 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 4A+4B-4=0 \\ \underline{-4A+3B-17=0}- \end{array}$$

$$7B-21=0 \Rightarrow B=3 \wedge A=-2$$

Deze methode heet **breuksplitsen**.

**Voorbeeld**

Geef een primitieve functie van $f(x)=\frac{x+17}{x^2-x-12}$.

**Oplossing**

Herschrijf de functie $f(x)=\frac{-2}{x+3}+\frac{3}{x-4}$ met de methode van breuksplitsen.

Dan is een primitieve functie $F(x)=-2\ln|x+3|+3\ln|x-4|+C=\ln\frac{|x-4|^3}{(x+3)^2}+C$

### Opgave 10

Herschrijf de functie en geef een primitieve.

**a.** $f(x)=\frac{3x-1}{x^2+7x+12}$ **b.** $f(x)=\frac{4}{x^2+2x-3}$ **c.** $f(x)=\frac{5x-8}{x^2-2x-8}$

### Opgave 11

Kies een geschikte methode om de functie te herschrijven en geef een primitieve.

**a.** $f(x)=\frac{2x^2+5x+7}{x+1}$ **c.** $f(x)=\frac{8x-34}{x^2-8x+15}$ **e.** $f(x)=\frac{-4x+3}{2x+1}$

**b.** $f(x)=\frac{x}{x-3}$ **d.** $f(x)=\frac{3-x}{x+1}$ **f.** $f(x)=\frac{4x^2+7x}{x^3}$

### Opgave 12

Bereken exact.

**a.** $\int_2^3 \frac{x^2-2x+3}{x-1}\,dx$ **b.** $\int_1^2 \frac{6x^2+7x}{2x+1}\,dx$ **c.** $\int_0^1 \frac{4x-2}{x^2+4x+3}\,dx$

## 2.4 Andere typen breuken

### Opgave 13

Gegeven zijn de functies $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+4}$ en $h(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$.

**a.** Plot de functies en schets de grafieken.
**b.** Geef opmerkelijke verschillen tussen de functies (nulpunten, max/min, asymptoten).

**AANPAK:** Primitiveren van functies van het type $f(x)=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.

Als de noemer

- twee nulpunten $x_1$, $x_2$ heeft, dan herschrijf je *f* als $f(x)=\dfrac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\dfrac{A}{a(x-x_1)}+\dfrac{B}{x-x_2}$

  (zie vorige paragraaf)
- één nulpunt $x_0$ heeft, dan herschrijf je *f* als $f(x)=\dfrac{1}{a(x-x_0)^2}$. Dan is $F(x)=-\dfrac{1}{a(x-x_0)}+C$
- geen nulpunten heeft, dan herschrijf je *f* als $f(x)=\frac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{(\frac{x+b_1}{a_1})^2+1}$.

  Dan is $F(x)=\frac{1}{a}\arctan(\frac{x+b_1}{a_1})+C$

**Voorbeeld**

Geef een primitieve functie van $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+4}$ en $h(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$

**Oplossing**

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+3}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\Rightarrow F(x)=-\tfrac{1}{2}\ln|x+3|+\tfrac{1}{2}\ln|x+1|+C=\ln\sqrt{\left|\frac{x+1}{x+3}\right|}+C$$

$$g(x)=\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{1}{(x+2)^2}\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{x+2}+C$$

$$h(x)=\frac{1}{x^2+4x+5}=\frac{1}{(x+2)^2+1}\Rightarrow F(x)=\arctan(x+2)+C$$

### Opgave 14

Geef een primitieve functie van

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+8}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+9}$ en $h(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+10}$.

### Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+17}$.

**a.** Herschrijf de functie, zoals in het voorbeeld hierboven.
**b.** Toon aan dat de grafiek van *f* symmetrisch is ten opzichte van de lijn $x=4$, door $x=4+h$ en $x=4-h$ in te vullen.
**c.** Het vlakdeel *V* wordt ingesloten door de grafiek van *f*, de *x*-as en de lijnen $x=4$ en $x=5$.
Bereken exact de oppervlakte van *V*.
**d.** Het vlakdeel *W* wordt ingesloten door de grafiek van *f*, de *x*-as en de lijnen $x=4$ en $x=p$ met $p>4$, zodat de oppervlakte van *W* is $\frac{1}{3}\pi$.
Bereken exact de waarde van *p*.

**Voorbeeld:** **a.** Geef een primitieve functie van $f(x)=\dfrac{6}{9x^2+4}$

**b.** Bereken $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$

**Oplossing**

**a.** Eerst teller en noemer delen door 4.

$$f(x)=\frac{6}{9x^2+4}=\frac{\frac{6}{4}}{\frac{9}{4}x^2+1}=\frac{\frac{3}{2}}{(\frac{3}{2}x)^2+1}\Rightarrow F(x)=\int\frac{\frac{3}{2}}{(\frac{3}{2}x)^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(\frac{3}{2}x)^2+1}\mathrm{d}\tfrac{3}{2}x=\arctan(\tfrac{3}{2}x)+C$$

**b.** Eerst teller en noemer delen door 2.

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}x)^2}}\mathrm{d}(\tfrac{1}{2}x)=\left[\arcsin(\tfrac{1}{2}x)\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$=\arcsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})-\arcsin(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{3}\pi-\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{1}{6}\pi$$

## Opgave 16

Geef een primitieve functie.

**a.** $f(x)=\dfrac{4}{x^2+4}$ **b.** $g(x)=\dfrac{12}{16x^2+1}$

## Opgave 17

Bereken exact en schrijf alle tussenstappen op, zoals in het voorbeeld.

**a.** $\displaystyle\int_0^1\frac{3}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_3^7\frac{4}{x^2-6x+25}\mathrm{d}x$

**b.** $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}\sqrt{2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x$ **d.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x$

## 2.5 Kwadratische vormen in de noemer

We bekijken de functie $f(x)=\frac{5x-1}{x^2+6x+9}$. Als we een primitieve van *f* willen vinden, zullen we weer moeten terugvallen op breuksplitsing. Er ontstaat dan de volgende vorm: $f(x)=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+3}$.
Hier zijn de noemers al gelijknamig, zodat het niet nodig is om te werken naar de kwadratische noemer. In dat geval krijgen we niet de originele vorm van *f*. Je kunt beide breuken ook vermenigvuldigen met *x* + 3. Maar de vergelijking $Ax+Bx+3A+3B=3x-7$ blijkt niet oplosbaar.

Als $f(x)=\frac{cx+d}{(ax+b)^2}$ dan kun je *f* splitsen in de vorm $f(x)=\frac{A}{(ax+b)^2}+\frac{B}{ax+b}$.
De primitieve van *f* heeft dan de vorm $F(x)=\frac{C_1}{ax+b}+C_2\cdot\ln|ax+b|+C_3$.

Als we kijken naar de functie uit het voorbeeld, dan krijgen we:
$$f(x)=\frac{A}{(x+3)^2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A+Bx+3B}{(x+3)^2}$$
Hieruit volgt dat $B=5$, en $A+3\cdot5=-1$, dus $A=-16$.
$$\int f(x)dx=\int\frac{-16}{(x+3)^2}dx+\int\frac{5}{(x+3)}dx=\frac{16}{x+3}+5\ln|x+3|+C$$

### Discriminant < 0

We hebben al eerder gezien dat er een kwadratische vorm in de noemer stond waarbij de discriminant kleiner was dan nul. Toen bleek dat we die vorm toevallig konden omschrijven naar $A^2+1$, zodat de primitieve een arctan werd. Dit leek misschien toeval omdat de 1 in de noemer stond, maar je kunt dit altijd afdwingen.

$$g(x)=\frac{1}{x^2+4x+7}=\frac{1}{(x+2)^2+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}(x+2)^2+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(\frac{x+2}{\sqrt{3}})^2+1}$$
$$G(x)=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\arctan(\tfrac{x+2}{\sqrt{3}})+C$$

**Voorbeeld:**
Primitiveer $k(x)=\frac{x-4}{(x+1)(x^2+2x+3)}$
Merk op dat de noemer niet verder ontbonden kan worden. Omdat we nu bij breuksplitsing een kwadratische vorm over houden, gebruiken we voor de teller een lineaire vorm (één graad lager).
Dus $k(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+3}=\frac{Ax^2+2Ax+3A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(x^2+2x+3)}$

Het hierbij horend stelsel is dan $\begin{cases}A+B=0\\2A+B+C=1\\3A+C=-4\end{cases}$

Trek de derde regel van de tweede af, dan geldt $A-B=-5$. Tel hier de eerste regel bij op en dan vindt je $A=-2\frac{1}{2}$ en $B=2\frac{1}{2}$. Invullen in regel 3 geeft $C=3\frac{1}{2}$.

Dus $k(x)=\dfrac{-2\frac{1}{2}}{x+1}+\dfrac{2\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}}{x^2+2x+3}$

Dan is $\int k(x)dx=-2\frac{1}{2}\ln|x+1|+\int\dfrac{2\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}}{x^2+2x+3}dx=-2\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\dfrac{5x+7}{x^2+2x+3}dx$

Voor de integraal die over blijft hebben we nog wat werk te doen voordat we een primitieve kunnen vinden. We kunnen kijken of we hier een ln-functie van kunnen maken. Met de kettingregel zou de teller dan $2x+2$ worden. Met een factor voor de integraal kunnen we er dan $5x$ van maken, maar die 7 krijgen we niet helemaal weg. Voor dat stuk moet een arctan geforceerd worden.

$$\int\frac{5x+7}{x^2+2x+3}dx=\int\frac{5x+5}{x^2+2x+3}dx+\int\frac{2}{x^2+2x+3}dx=\tfrac{5}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx+2\int\frac{1}{(x+1)^2+2}dx=$$

$$\tfrac{5}{2}\ln|x^2+2x+3|+2\cdot\tfrac{1}{2}\int\frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1}dx=\tfrac{5}{2}\ln|x^2+2x+3|+\sqrt{2}\cdot\arctan(\tfrac{x+1}{\sqrt{2}})+C$$

Dus $\int k(x)dx=-2\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{5}{4}\ln|x^2+2x+3|+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}})+C_1$

## Opgave 18

Bepaal de primitieve functie van:

**a.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

**b.** $g(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+3x+2}$

**c.** $h(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2+4}$

**d.** $j(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+x+1}$

**e.** $k(x)=\dfrac{7x-4}{(x-1)^2(x+2)}$

**f.** $l(x)=\dfrac{x^4+x^3}{x^3-1}$

# Hoofdstuk 3 Integreren met de substitutiemethode

*Vervangen (=substitutie)*

## Inhoud

# Voorkennis Differentiëren met de Kettingregel

De functie $h(x)=3^{2x+1}$ kun je opvatten als een samenstelling van $f(x)=2x+1$ en $g(x)=3^x$.
Hierbij worden de functiewaarden van *f* in de functie *g* ingevuld. Je noteert dit als .
Een functie die een samenstelling is van meerdere functies heet een **kettingfunctie**, waarvan de oorspronkelijke functies de schakels zijn. Je kunt de samenstelling ook weergeven met de formules $u=2x+1$ en $y=3^u$.

### Opgave V1

Geef het functievoorschrift van *h* als: $x \xrightarrow{\dots} \dots \xrightarrow{\dots} y$

**a.** $h(x)=\sin(3x-2)$

**b.** $h(x)=(x+1)^3$

**c.** $h(x)={}^2\log(2x+2)$

**d.** $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

Je vindt de afgeleide functie van een kettingfunctie door de afgeleiden van de samenstellende functies met elkaar te vermenigvuldigen. Deze regel heet de **kettingregel**:
Als $h(x)=g(f(x))$ dan geldt $h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

**Voorbeeld 1**

Geef de afgeleide functie van $h(x)=\sqrt{2x+6}$.

**Oplossing (Analyse jaar 1)**

De functie *f* voldoet aan de volgende samenstelling:

$x \longrightarrow 2x+6 \longrightarrow \sqrt{2x+6}$.

$h(x)=g(f(x))$ met $f(x)=2x+6=u$ en $g(u)=\sqrt{u}$

$g'(u)=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ en $f'(x)=2$

$h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$, dus

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x+6}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x+6}}$$

**Voorbeeld 2**

Bereken de afgeleide van $y=(x^2+3x)^8$

**Oplossing (notatie Analyse Plus)**

De formule is op te vatten als een samenstelling van de formules $u=x^2+3x$ en $y=u^8$

$\dfrac{du}{dx}=2x+3$ en $\dfrac{dy}{du}=8u^7$

zodat de afgeleide wordt:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=$$
$$=8u^7\cdot(2x+3)=8(x^2+3x)^7(2x+3)$$

### Opgave V2

Schrijf de oplossing van voorbeeld 1 met $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

### Opgave V3

Differentieer de volgende functies, geef eerst aan welke functie $u$ is , welke *y* en gebruik $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

**a.** $h(x)=(4x^2+x)^3$

**b.** $h(x)=\dfrac{2}{(3x-2)^2}$

**c.** $y=\sqrt{x^2-x}$

**d.** $y=\sqrt{\sin x}$

## 3.1 De kettingregel bij integreren van machtsfuncties

**Opgave 1**

Differentieer de volgende functies:

**a.** $f(x) = (3x^4 - 7)^6$

**b.** $f(x) = \cos^5(x)$

**c.** $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

**Opgave 2**

Gebruik de uitkomsten van de vorige opgaven om de primitieven te vinden van:

**a.** $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$

**b.** $g(x) = x^3 \cdot (3x^4 - 7)^5$

**c.** $g(x) = \sin(x) \cdot \cos^4(x)$

Bij het differentiëren van samengestelde functies speelt de kettingregel een belangrijke rol. Bij het primitiveren wordt deze regel **in omgekeerde richting gebruikt.**

**Voorbeeld:** Geef de primitieve van $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$

**Oplossing:** Herschrijf $f(x) = \left(\ln x\right)^2 \cdot \dfrac{1}{x}$ en schrijf $u = \ln x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$\int \left(\ln x\right)^2 \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int u^2 \mathrm{d}u = \tfrac{1}{3}u^3 + C$$

Dus een primitieve van $f(x) = \left(\ln x\right)^2 \cdot \dfrac{1}{x}$ is $F(x) = \tfrac{1}{3}\ln^3 x + C$

Als $u = u(x)$ een differentieerbare functie is en $f(u) = u^n$, $n \neq -1$ is continu, dan geldt dat

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u = \int u^n \mathrm{d}u = \tfrac{1}{n+1}u^{n+1} + C \text{, met } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dus een primitieve van $f(x) = \left(u(x)\right)^n \cdot u'(x)$ is $F(x) = \tfrac{1}{n+1}\left(u(x)\right)^{n+1} + C$

**Opgave 3**

Primitiveer de volgende functies door *f* te herschrijven en een geschikte functie *u* te gebruiken.

**a.** $f(x) = (2x+1)(x^2 + x + 4)^5$

**b.** $f(x) = \dfrac{\ln^6 x}{x}$

**c.** $f(x) = \sin^3(x) \cdot \cos(x)$

**d.** $f(x) = (x^2 + 2x - 7)^8(x+1)$

**Voorbeeld**: Bereken $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2\sqrt{x^2+4}}$

**Oplossing**: Schrijf $u = x^2 + 4$, dan is $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

$x = 0$ geeft $u = 4$ en $x = 2$ geeft $u = 2^2 + 4 = 8$, zodat de integraal wordt:

$$\int_4^8 \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{u}} = \int_4^8 \tfrac{1}{2}u^{-2\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{-1\frac{1}{2}}u^{-1\frac{1}{2}}\right]_4^8 = \left[\frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{u\sqrt{u}}\right]_4^8 = -\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{8\sqrt{8}} - \frac{1}{4\sqrt{4}}\right) =$$

$$-\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{16\sqrt{2}} - \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{48\sqrt{2}} + \frac{1}{24}$$

**Opgave 4**

Bereken de volgende integralen door een geschikte functie *u* te gebruiken.

**a.** $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}}\,\mathrm{d}x$

**b.** $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{5}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

**c.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

**d.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

**e.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

**f.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

## 3.2 De kettingregel bij integreren van macht n=-1

### Opgave 5
Differentieer de volgende functies:

**a.** $f(x)=\ln(x^2+4)$ **b.** $f(x)=\ln(5x+12)$

### Opgave 6
Gebruik de uitkomsten van de vorige opgaven om de primitieven te vinden van:

**a.** $g(x)=\dfrac{5}{5x+12}$ **b.** $g(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

**Voorbeeld:** Geef de primitieve van $f(x)=\dfrac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+7}$

**Oplossing:** Schrijf $u=x^3+2x^2+7 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3x^2+4x \Rightarrow \mathrm{d}u=(3x^2+4x)\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+7}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x^3+2x^2+7}.(3x^2+4x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln|u|+C$$

Dus een primitieve van $f(x)=\dfrac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+7}$ is $F(x)=\ln|x^3+2x+7|+C$

Als $u=u(x)$ een differentieerbare functie is en $f(u)=\dfrac{1}{u}$, is continu op zijn domein, dan geldt dat

$\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln|u|+C$, met $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u'(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=u'(x)\,\mathrm{d}x$.

Dus een primitieve van $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ is $F(x)=\ln|u(x)|+C$

### Opgave 7
Primitiveer de volgende functies door een geschikte functie $u$ te gebruiken.

**a.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x-5}$

**b.** $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^4+4x+17}$

**c.** $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

**d.** $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

### Opgave 8
Wat is nu eigenlijk de primitieve functie van $f(x)=\tan x$? Die vraag kun je nu oplossen!

**a.** Herschrijf het functievoorschrift van $f$ zodat de tangens er niet in voorkomt.

**b.** Schrijf $u=\cos x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\ldots$

**c.** Laat zien dat de integraal $\int \tan x\,\mathrm{d}x=\int \ldots \mathrm{d}u$ op te lossen is tot $F(u)=\ldots+C$

**d.** Elimineer $u$ en schrijf de primitieve als een functie van $x$.

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

## Opgave 9

Om de primitieve van $f(x)=\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos x}$ te vinden volg je de volgende stappen.

**a.** Schrijf $u=\tan x$. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

**b.** Ga na dat $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$. Geef de tussenliggende stappen.

**c.** Geef nu de primitieve van $f(x)$.

## 3.3 De substitutiemethode

Bij het berekenen van een integraal is het niet altijd mogelijk om direct de primitieve van een functie te vinden. Eén van de manieren om toch de integraal te berekenen is de substitutiemethode.
Hierbij speelt de kettingregel (weer) een sleutelrol.

Als $u = u(x)$ een differentieerbare functie met een bereik op interval A en $f$ is continu op A, dan geldt dat $\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$, met $\mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$.

Als $g'(x)$ continu is op interval $[a,b]$, dan geldt dat $\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u$.

**Voorbeeld**: Bereken $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

**Oplossing**:
Gebruik $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ om $\cos^2 x$ uit de integraal weg te werken.

De integraal wordt dan $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$. Schrijf

$u = \sin x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$.

Invullen levert $I = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} (1-u^2)\,\mathrm{d}u = \left[u - \tfrac{1}{3}u^3\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{12}\sqrt{2} = \tfrac{5}{12}\sqrt{2}$.

### Opgave 10

Primitiveer de volgende functies door een geschikte functie *u* te gebruiken.

**a.** $f(x) = \sin^3 x$

**b.** $f(x) = \cos^5 x$

### Opgave 11

Gegeven is de integraal $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x \cdot \sin^6 x\,\mathrm{d}x$. Bereken de integraal met de volgende stappen.

**a.** Herleid de integraal tot $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 x \cdot \sin^6 x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x$. Hoe doe je dat?

**b.** Werk $\cos^2 x$ uit de integraal weg. Schrijf het resultaat op.

**c.** Schrijf $u = \sin x$, dan is $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$.

Laat zien dat nu de integraal te schrijven is als: $\int_{\dots}^{\dots} (1-u^2)\cdot u^6\,\mathrm{d}u$

**d.** Bereken ook de nieuwe grenzen: bij $x = 0$ hoort $u = \sin x = \dots$
bij $x = \frac{1}{2}\pi$ hoort $u = \sin x = \dots$ Laat zien dat de uitkomst van de integraal $\frac{2}{63}$ is.

**e.** Geef de primitieve functie van $f(x) = \cos^3 x \cdot \sin^6 x$

## Opgave 12

$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$

Gegeven is de integraal $\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

**a.** Schrijf $x = \sin t$, dan is $\frac{dx}{dt} = \ldots \Rightarrow dx = \ldots$.

**b.** Laat zien dat de integraal geschreven kan worden als

$$\ldots = \int_{\ldots}^{\ldots} \cos t \cdot \cos t\,dt = \ldots = \int_{\ldots}^{\ldots} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$

**c.** Bereken ook de nieuwe grenzen: bij $x = 0$ hoort $x = \sin t$ dus $t = \ldots$
bij $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ hoort $t = \ldots$

**d.** Laat met primitiveren zien dat de uitkomst van de integraal $\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}$ is.

**e.** Je had dit antwoord ook met meetkunde kunnen vinden. Hoe?

## Opgave 13

Bereken de volgende integralen, vermeld steeds welke substitutie je gebruikt.

**a.** $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sin^4 x \cdot \cos^3 x\,dx$

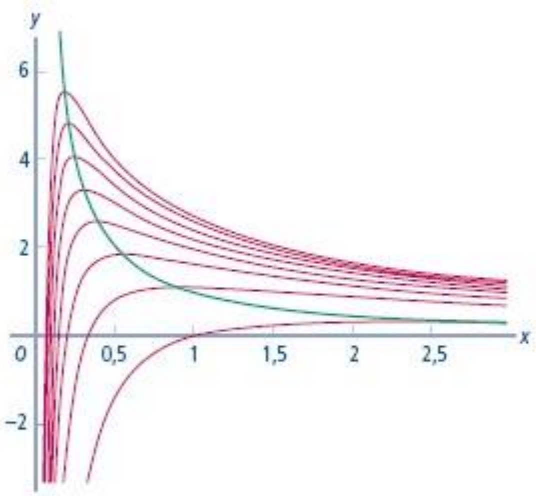
**b.** $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\tan x\,dx}{\cos x}$

**c.** $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^2 x}$

**d.** $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\tan^3 x\,dx}{\cos^2 x}$

## Opgave 14

Van de familie van functies $f_k(x) = \frac{\ln(kx)}{x}$ met $k > 0$ is voor een aantal waarden van $k$ de grafiek getekend. Ook zie je kromme $y = \frac{1}{x}$.



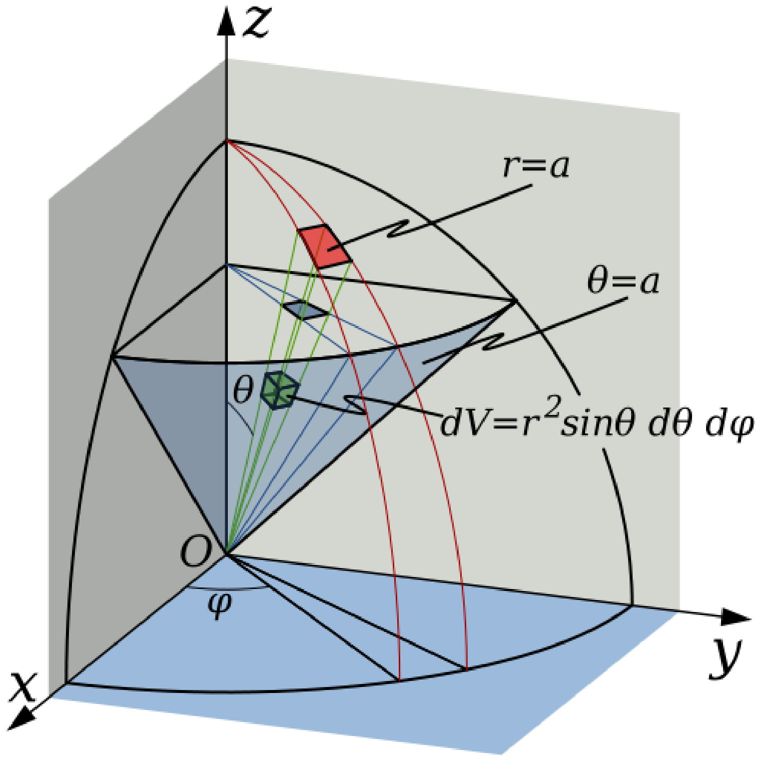

**a.** Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van $f_1$.

**b.** Het lijkt dat voor elke waarde van $k$ de top van de grafiek van $f_k$ op de kromme $y = \frac{1}{x}$ ligt.
Toon aan dat dit inderdaad het geval is.

**c.** Bereken exact de $x$-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van $f_2$ met de $x$-as.

**d.** Toon aan dat de functies $F_k(x) = 0,5(\ln(kx))^2 + c$ primitieven zijn van $f_k$.
Doe dit op twee manieren: met differentiëren en met primitiveren.

# Hoofdstuk 4 Integreren met partiële integratie




## Inhoud

## 4.1 Partiële integratie

Iedere regel voor differentiëren heeft een corresponderende regel voor integreren. Bij de productregel van het differentiëren hoort de partiële integratieregel voor het integreren.

**productregel**
$h(x)=f(x)\cdot g(x)\Rightarrow$
$h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

### Opgave 1

Differentieer de functie $f(x)=x^2\cdot\sin x$

Uit de productregel van differentiëren volgt:

$$\int[f(x)g'(x)+f'(x)g(x)]dx=h(x)\Rightarrow\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x+\int g(x)f'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)$$

$$\Rightarrow\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)\mathrm{d}x\ \ (1)$$

Stel nu $u=f(x)$ dan is $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(x)\Rightarrow\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x$ en $v=g(x)$ dan is

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=g'(x)\Rightarrow\mathrm{d}v=g'(x)\,\mathrm{d}x$

Dan ontstaat na substitutie: $\int u\ \mathrm{d}v=uv-\int v\ \mathrm{d}u\ \ (2)$

Het gebruik van de productregel bij integreren wordt **partieel integreren** genoemd.

**Voorbeeld**: Bereken $\int_0^{\frac14\pi}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

**Oplossing:** Schrijf de integraal als $\int_0^{\frac14\pi}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Neem $u=x$, dan is $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1\Rightarrow\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

En kies $\mathrm{d}v=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow v=\tan x$.

Neem nu formule (2) over en vul daarna alles op de goede plaats in:

$$\int u\ \mathrm{d}v\quad=\quad u\cdot v\quad-\quad\int v\,\mathrm{d}u$$

$$\int_0^{\frac14\pi}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=[x\cdot\tan x]_0^{\frac14\pi}-\int_0^{\frac14\pi}1\cdot\tan x\,\mathrm{d}x$$

($\int\tan x\,\mathrm{d}x$ hebben we eerder opgelost)

$$\int_0^{\frac14\pi}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=[x\cdot\tan x]_0^{\frac14\pi}-[-\ln|\cos x|]_0^{\frac14\pi}=(\tfrac14\pi\cdot1-0)+(\ln|\tfrac12\sqrt2|-\ln|1|)=\tfrac14\pi+\ln(\tfrac12\sqrt2)$$

Bij het toepassen van partiële integratie is het over het algemeen handig om voor $u$ de functie te kiezen die eenvoudiger wordt als we deze differentiëren.

### Opgave 2

Om $\int_0^{\frac12\pi}x\cos x\,\mathrm{d}x$ te berekenen voer je de volgende stappen uit:

**a.** Kies $u=x$ dan is $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\ldots$, dus $\mathrm{d}u=\ldots\mathrm{d}x$.

**b.** Neem $\mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x$. Welke functie is $v$ als $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\cos x$?

**c.** Neem nu formule (2) van partieel integreren en vul links en rechts voor $u$ en $v$ de juiste functies is.

Laat zien dat je na herleiden krijgt: $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = [x\sin x]_o^{\frac{1}{2}\pi} - [-\cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi}$.

**d.** Bereken de uitkomst.

## Opgave 3

Bereken de volgende integralen:

**a.** $\int_0^1 x\cdot \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}x$

**b.** $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$

Soms geeft partieel integreren een oplossing die je anders niet zo makkelijk had kunnen vinden.

**Voorbeeld**: Geef de primitieve functie van $f(x) = \arcsin x$.

**Oplossing:** Schrijf de integraal als $\int \arcsin x \cdot 1\mathrm{d}x$.

Neem $u = \arcsin x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ en kies $\mathrm{d}v = 1\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow v = x$.

Neem nu formule (2) over en vul daarna alles op de goede plaats in:

$$\int u\ \mathrm{d}v \qquad = \quad u\cdot v \qquad - \quad \int v\,\mathrm{d}u$$

$$\int \arcsin x\cdot 1\ \mathrm{d}x = \arcsin x\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = x\cdot\arcsin x + \int\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

($\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ hebben we eerder opgelost)

## Opgave 4

Bereken de primitieve functie.

**a.** $f(x) = \arccos x$

**b.** $f(x) = \arctan x$

## Opgave 5

Om $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\cdot 1\mathrm{d}x$ te berekenen voer je de volgende stappen uit:

**a.** Kies $u = \ln x$ dan is $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \ldots$, dus $\mathrm{d}u = \ldots\mathrm{d}x$.

**b.** Neem $\mathrm{d}v = 1\cdot\mathrm{d}x$. Welke functie is $v$ als $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1$?

**c.** Neem nu formule (2) van partieel integreren en vul links en rechts voor $u$ en $v$ de juiste functies is.

Laat zien dat je na herleiden krijgt: $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\cdot 1\mathrm{d}x = [\ln x\cdot x]_1^{\mathrm{e}} - [x]_1^{\mathrm{e}}$. Bereken de uitkomst.

**d.** Welke functie is nu een primitieve van $h(x) = \ln x$?

## Opgave 6

Bereken de volgende integraal: $\int_1^{e} x \cdot \ln x \, dx$.

## Opgave 7

Bereken de volgende integralen door tweemaal partieel te integreren.

**a.** $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2 \cos x \, dx$

**b.** $\int_1^{e} \ln^2 x \, dx$

## Opgave 8

Soms kom je na tweemaal partieel integreren dezelfde functie weer tegen. Toch ben je dan wel iets opgeschoten. Gegeven is de integraal $\int_0^{\pi} \sin x \cdot e^x \, dx$.

**a.** Kies $u = \sin x$ dan is $\frac{du}{dx} = \ldots$, dus $du = \ldots dx$.

**b.** Neem $dv = e^x dx$. Welke functie is $v$ als $\frac{dv}{dx} = e^x$?

**c.** Neem nu formule (2) van partieel integreren en vul links en rechts voor $u$ en $v$ de juiste functies is.
Leg uit dat je na herleiden krijgt: $\int_0^{\pi} \sin x \cdot e^x \, dx = \left[\sin x \cdot e^x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cdot \cos x \, dx = -\int_0^{\pi} e^x \cdot \cos x \, dx$.

**d.** De laatste integraal in opgave c pak je op dezelfde manier aan: $-\int_0^{\pi} \cos x \cdot e^x dx = \ldots$

Laat zien dat deze te herleiden is tot: $e^{\pi} + 1 - \int_0^{\pi} \sin x \cdot e^x \, dx$

**e.** Als we de gezochte integraal aangeven met $A = \int_0^{\pi} \sin x \cdot e^x \, dx$.

Ga na dat het resultaat tot nu toe is: $A = e^{\pi} + 1 - A$ en dat daaruit volgt:
$2A = e^{\pi} + 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$

## Opgave 9

Bereken een primitieve van de functie

**a.** $f(x) = e^{-x} \cdot \cos x$.

**b.** $f(x) = \sin x \cdot (e^x + 1)$

### Opgave 10

Voor het oplossen van deze opgaven heb je verschillende van de voorgaande technieken van partiële integratie nodig.

Bereken een primitieve van de functie.

**a.** $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{3x}}$

**b.** $f(x) = \cos(\ln x)$

**c.** $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^x$

## 4.2 Gemengde opgaven integreren

In de opgaven staan alle methoden om te primitiveren door elkaar: integreren met breuken, de substitutiemethode en partieel integreren. Kijk terug in de betreffende hoofdstukken.

### Opgave 11

Bereken de volgende integralen

**a.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$

**b.** $\displaystyle\int_1^e (x+\ln x)\,\mathrm{d}x$

**c.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

**d.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x-2}\,\mathrm{d}x$

### Opgave 12

Primitiveer de volgende functies

**c.** $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

**d.** $f(x)=\dfrac{4}{x^2+4}$

**e.** $f(x)=\ln(\sin x)\cdot\cos x$

**f.** $f(x)=x^2\cdot\sin(x)$

**g.** $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ (aanwijzing: vermenigvuldig teller en noemer met $\mathrm{e}^x$)

### Opgave 13

Gegeven $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+b}\,\mathrm{d}x = a$ voor elke $a>0$ Bereken *b*.

### Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x)=2\sin(x)\cdot\cos(x)$.

Geef een primitieve functie van *f*. Los deze vraag op drie verschillende manieren op.

### Opgave 15

Bereken een primitieve van de functie.

**a.** $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

**b.** $f(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$

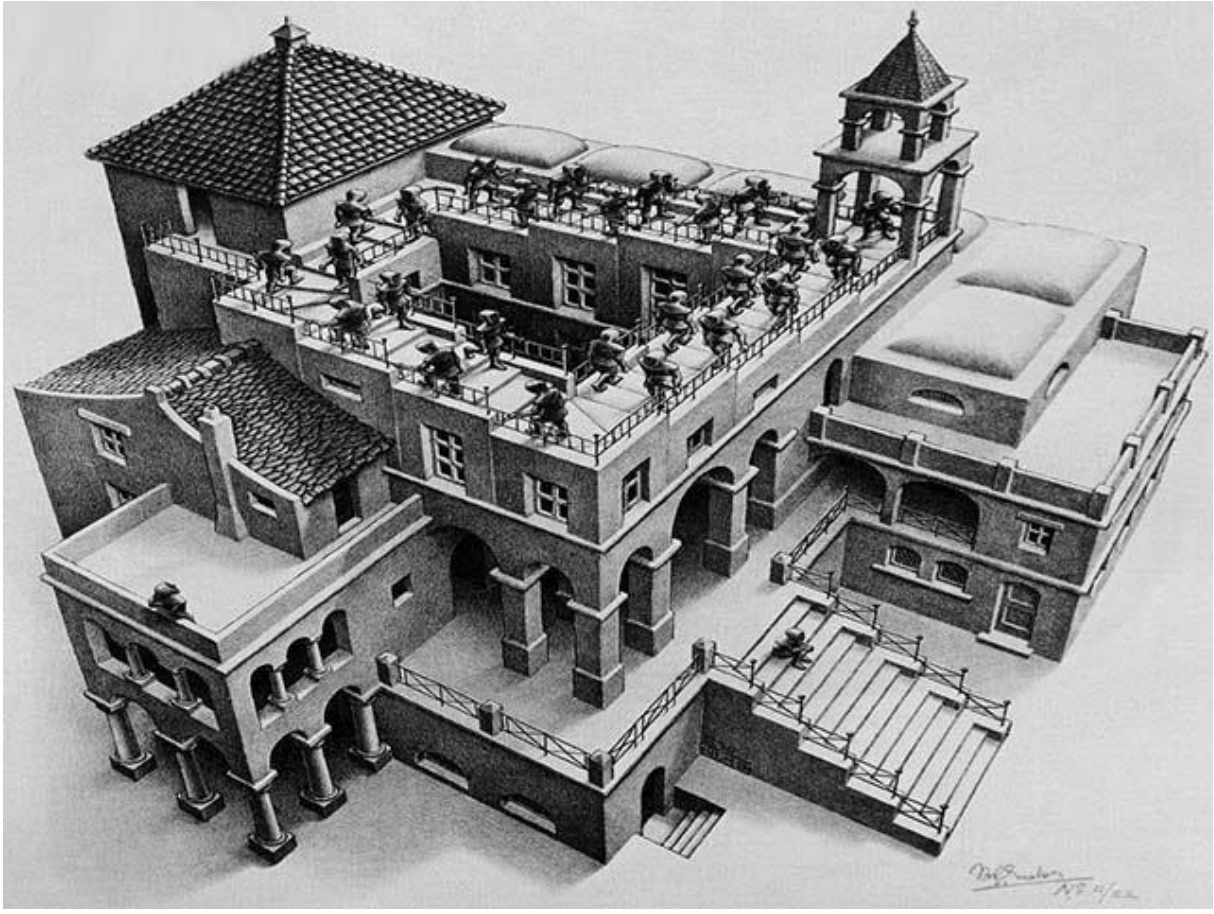
**c.** $f(x)=\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$

**d.** $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$

**e.** $f(x)=x^4\cdot\ln(3x)$

**f.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{36-x^2}}$

# Hoofdstuk 5 Oneigenlijke integralen



## Inhoud

## 5.0 Inleiding.

We bekijken de integraal $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x$.

Als we, zonder ons af te vragen of het eigenlijk mag, de integraal gaan berekenen vinden het volgende antwoord:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x = \left[ -\frac{1}{3x^3} \right]_{-1}^{1} = -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} = -\tfrac{2}{3}$$ Het antwoord is negatief.

Dat is vreemd, want de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x^4}$ ligt in zijn geheel boven de *x*-as en kan dus niet negatief zijn.

Het probleem is dat het integratie-interval niet volledig gedefinieerd is op het domein van *f*. De grafiek van *f* bevat namelijk een verticale asymptoot voor $x = 0$. Een discontinuïteit op een integratie-interval is een voorbeeld van een oneigenlijke integraal.

Tot nu toe hebben we integralen $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ berekend, waarbij *f* een continue functie is op het begrensde interval $[a, b]$. In dit hoofdstuk gaan we kijken naar integralen waarvan het integratie-interval niet begrensd is en/of de integrant discontinu is op het integratie-interval.

## 5.1 Niet begrensde integratie-intervallen.

In deze paragraaf kijken we naar integralen die geen precieze onder- en/of bovengrens kennen.

We kunnen **drie gevallen** onderscheiden:

1. Een niet-begrensde bovengrens: integratie-interval = $[a, \rightarrow\rangle$
2. Een niet-begrensde ondergrens: integratie-interval = $\langle\leftarrow, b]$
3. Een niet-begrensde onder- en bovengrens: integratie-interval = $\mathbb{R}$

In geval 1 berekenen we de integraal $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$

In geval 2 berekenen we de integraal $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$

In geval 3 berekenen we de integraal $\int f(x)\mathrm{d}x = \lim_{s\to-\infty}\int_s^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty}\int_c^t f(x)\mathrm{d}x$

waarbij $c$ een willekeurig gekozen getal is. Meestal wordt hier 0 gekozen.

Als de limieten bestaan dan zal de oneigenlijke integraal convergeren naar de limietwaarde (in geval 3 convergeert de integraal naar de som van de limietwaarden). Als een limiet niet bestaat, dan zal de integraal divergeren.

**Voorbeeld 1**

Bereken, indien mogelijk $\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$

**Oplossing:**

$$\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}(-e^{-t} - -1) = 0+1 = 1$$

**Voorbeeld 2**

Bereken, indien mogelijk $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

**Oplossing:**

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 (1-x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\left[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(-2\cdot 1 - \left(-2\sqrt{1-t}\right)\right) = \infty$$

De limiet bestaat niet, dus de integraal divergeert.

Sommige limieten zijn niet gemakkelijk te berekenen. Je kunt dan gebruik maken van de insluitstelling of standaardlimieten (zie Analyse: Rijen en limieten).
Je mag zonder bewijs gebruik maken van:

(hierbij zijn $a$ en $k$ constantes)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a}{t^k} = 0 \quad \text{met } k \geq 1$$

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{a} = 1 \quad \text{met } a > 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^k}{a^t} = 0 \quad \text{met } a > 1$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{a}{t}\right)^t = e^a \quad \text{met } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(k)}{t^k} = 0 \quad \text{met } k > 0$$

## Opgave 1

Bereken indien mogelijk de volgende integralen.

**a.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

**b.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

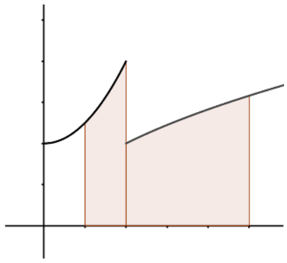
**c.** $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

**d.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(8)}{2^x}\,\mathrm{d}x$

**e.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 3^x\,\mathrm{d}x$

**f.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

## 5.2 Discontinu op het integratie-interval



Een grafiek kan op een interval $[a,b]$ op twee verschillende manieren discontinu zijn. Er kan zich namelijk een verticale asymptoot op het interval bevinden of een “sprong”. In de figuur hiernaast kun je zien dat in geval van een “sprong” je het integratie-interval eenvoudig kunt opdelen. De totale integraal is dan gelijk aan de som van de twee deel-integralen.
We zullen ons daarom alleen beperken tot de integralen waarop zich een asymptoot op het integratie-interval bevindt.

In het geval van de verticale asymptoot kunnen we **vier situaties** onderscheiden.

Situatie 1: De asymptoot bevindt zich in de bovengrens.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{q\uparrow b}\int_a^q f(x)dx$$

Situatie 2: De asymptoot bevindt zich in de ondergrens.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p\downarrow a}\int_p^b f(x)dx$$

Situatie 3: De integrant heeft een asymptoot in zowel de onder- als bovengrens.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p\downarrow a}\int_p^c f(x)dx + \lim_{q\uparrow b}\int_c^q f(x)dx \text{ met } a < c < b$$

Situatie 4: De asymptoot bevindt zich in $x = d$ met $a < d < b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p\uparrow d}\int_a^d f(x)dx + \lim_{q\downarrow d}\int_q^b f(x)dx$$

Als de limieten bestaan dan convergeert de integraal naar de limietwaarde in geval 1 en 2. In de gevallen 3 en 4 convergeert de integraal naar de som van de limietwaarden.

**Voorbeeld 1**

Bereken, indien mogelijk $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Oplossing

De functie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ heeft een verticale asymptoot in $x = 0$, verder is de functie continu voor positieve waarden van *x*.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{p\downarrow 0}\int_p^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{p\downarrow 0}\left[2\sqrt{x}\right]_p^1 = \lim_{p\downarrow 0}\left(2-2\sqrt{p}\right) = 2$$

Ook bij deze integralen is er een aantal standaardlimieten inzetbaar:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{a}} \quad \text{met } a\in\mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x\downarrow 0} x^a\cdot\ln(x)=0 \quad \text{met } a\in\mathbb{R}, \text{ waarbij } a \text{ een constante voorstelt.}$$

**Voorbeeld 2**

Bereken, indien mogelijk $\int_0^{e^2}\left(1+\ln(x)\right)\mathrm{d}x$

**Oplossing:**

$$\int_0^{e^2}\left(1+\ln(x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^{e^2}\mathrm{d}x+\lim_{p\downarrow 0}\int_p^{e^2}\ln(x)\mathrm{d}x=\left[x\right]_0^{e^2}+\lim_{p\downarrow 0}\left(\left[x\ln(x)\right]_p^{e^2}-\int_p^{e^2}x\cdot\tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\left[x\right]_0^{e^2}-\lim_{p\downarrow 0}\left[x\ln(x)\right]_p^{e^2}-\left[x\right]_0^{e^2}=\lim_{p\downarrow 0}\left(e^2\ln(e^2)-p\ln(p)\right)=2e^2-0=2e^2$$

**Voorbeeld 3**

We bereken nogmaals de integraal uit de inleiding: $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x.$

**Oplossing:**

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x=\lim_{p\uparrow 0}\int_{-1}^{p}\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x+\lim_{q\downarrow 0}\int_{q}^{1}\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x=\lim_{p\uparrow 0}\left[-\tfrac{1}{3}x^{-3}\right]_{-1}^{q}+\lim_{q\downarrow 0}\left[-\tfrac{1}{3}x^{-3}\right]_{q}^{1}$$

$$=\lim_{p\uparrow 0}\left(-\frac{1}{3p^3}-+\tfrac{1}{3}\right)+\lim_{q\uparrow 0}\left(-\tfrac{1}{3}-\frac{1}{3q^3}\right)=\infty+\infty \text{ (merk op dat } p \text{ negatief is)}$$

De integraal divergeert.

## Opgave 2

Bereken, indien mogelijk de volgende integralen

**a.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{4-x}\,dx$

**b.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$

**c.** $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{1}{x^3}\,dx$

**d.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

**e.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

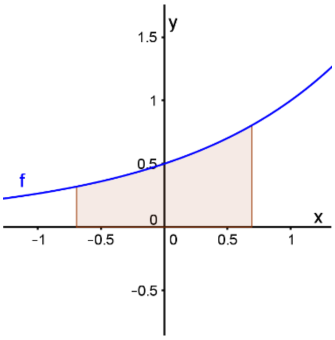
**f.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1-x^2}\,dx$

**g.** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

**h.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-3x}}{1-3x}\,dx$

## Opgave 3

Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$. Zie ook de grafiek hiernaast.




We gaan de oppervlakte onder de grafiek van $f$ berekenen op het interval $[-\ln(2), \ln(2)]$.

**a.** Deel eerst de gebroken functie uit en herschrijf $f(x)$.

**b.** Bereken $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$ door slechts 1 maal gebruik te maken van partiele integratie. Kijk goed naar de integraal die je overhoudt.

**c.** Gebruik het resultaat van **b** om de gevraagde oppervlakte exact te berekenen.

**d.** Waarom vind je hetzelfde antwoord als je geen limiet gebruikt?

## 5.3 Gemengde opgaven

Bij de volgende opgaven worden de verschillende technieken door elkaar gevraagd.

### Opgave 4

Primitiveer de volgende functies:

**a.** $f(x) = \tan(3x)$

**b.** $g(x) = \dfrac{36-3x}{x^2-16}$

**c.** $h(x) = \ln(5-x)$

**d.** $k(x) = \dfrac{\ln^2(5-x)}{x-5}$

**e.** $l(x) = x^2 e^{4x}$

**f.** $m(x) = \dfrac{8}{\sqrt{9-(3x+5)^2}}$

**g.** $n(x) = \dfrac{3\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

**h.** $p(x) = e^{\sqrt{\cos x}}\sin x$ (tip: gebruik 2 maal substitutie en dan partieel)

### Opgave 5

Bereken exact, indien mogelijk.

**a.** $\int_0^3 x^2\sqrt{x^3+9}\,dx$

**b.** $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

**c.** $\int_{\sqrt{e}}^{e} x^2 \ln(x)\,dx$

**d.** $\int_0^2 \dfrac{1}{1-x^2}\,dx$

**e.** $\int_2^{2\frac{1}{2}} \dfrac{5x-13}{x^2-5x+6}\,dx$

**f.** $\int_0^1 \left(\dfrac{\tan^2 x}{x} - \dfrac{\tan x}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right)dx$ tip: Gebruik opgave 3

# Hoofdstuk 6 Bijzondere krommen

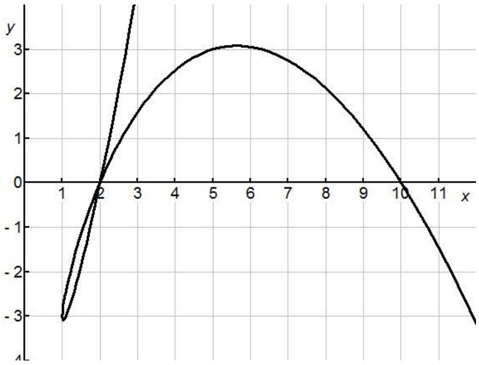
## Inhoud

# Voorkennis Parameterkrommen

### Opgave V1

Hiernaast is de baan weergegeven, die een bewegend punt $P$ heeft afgelegd. De coördinaten van $P$ op tijdstip $t$ kun je berekenen met

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 2 \\ y = t^3 - 4t \end{cases}$$




**a.** Geef de coördinaten van $P$ op het tijdstip $t = 0$.

**b.** Bereken de coördinaten van punt $P$ op de tijdstippen: $t = 1$, $t = 2$ en $t = 3$.

**c.** Neem de tekening over en geef met pijltjes aan in welke richting P beweegt.

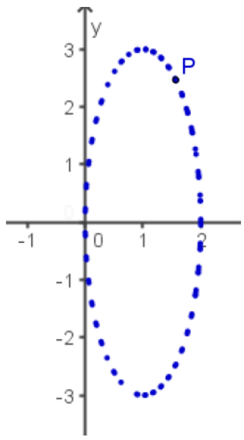
**d.** Er zijn drie verschillende tijdstippen waarop punt $P$ zich op de $x$-as bevindt. Welke tijdstippen zijn dat en welke punten op de $x$-as horen bij die tijdstippen?

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$ heet een **parametervoorstelling**.

De coördinaten van een punt $P(x, y)$ worden weergegeven als een functie van parameter $t$.
De bijbehorende grafiek wordt een **kromme** genoemd.
Als je $t$ opvat als de tijd, dan kun je $P$ opvatten als een bewegend punt.

### Opgave V2

Gegeven is de parametervoorstelling $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$




**a.** De kromme snijdt de x-as in twee verschillende punten.
Welke vergelijking moet je oplossen om de $t$-waarden van die snijpunten te vinden?

**b.** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de kromme met de x-as.

**c.** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de kromme met de y-as.

De helling van de lijn door twee punten $P$ en $Q$ op de kromme $K$ is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Hiernaast zie je hoe je deze helling berekent.
Met $\Delta t \to 0$, krijg je de exacte helling van de raaklijn aan de kromme in punt $P$.

De horizontale raaklijn vind je in de punten met $\dfrac{dy}{dt} = 0$ en

De verticale raaklijn vind je in de punten met $\dfrac{dx}{dt} = 0$.

$$\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}, \text{ mits } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

### Opgave V3

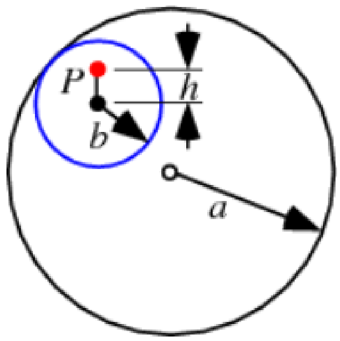
**a.** Het hoogste punt van de kromme van de vorige opgave heeft een horizontale raaklijn. Bereken $t$.

**b.** Welke waarde van $t$ hoort er bij punt $P(1\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$? Geef de vergelijking van de raaklijn in $P$.

**c.** Wat is de kleinste periode waarin de gehele figuur getekend wordt?

## 6.1 De hypotrochoide, een bijzonder voorbeeld

Zie: **http://mathworld.wolfram.com/Hypotrochoid.html** voor de animaties.

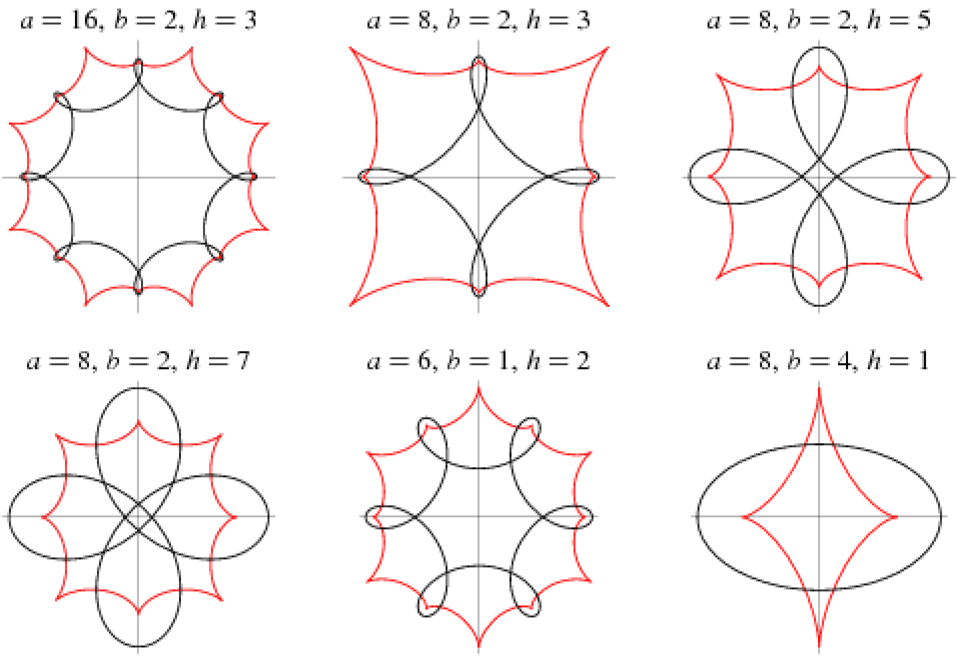



Een **hypotrochoïde** is een kromme die als volgt ontstaat:

- een cirkel met straal $b$ rolt zonder glijden aan de binnenkant van een vaste cirkel met straal $a$, waarbij $a > b > 0$ .
- de kromme is de baan van een punt $P$ dat vast is t.o.v. de rollende cirkel, namelijk op afstand $h$ van het middelpunt ervan.

De parametervoorstelling is

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos t + h\cos(\dfrac{a-b}{b}t) \\ y = (a-b)\sin t - h\sin(\dfrac{a-b}{b}t) \end{cases}$$

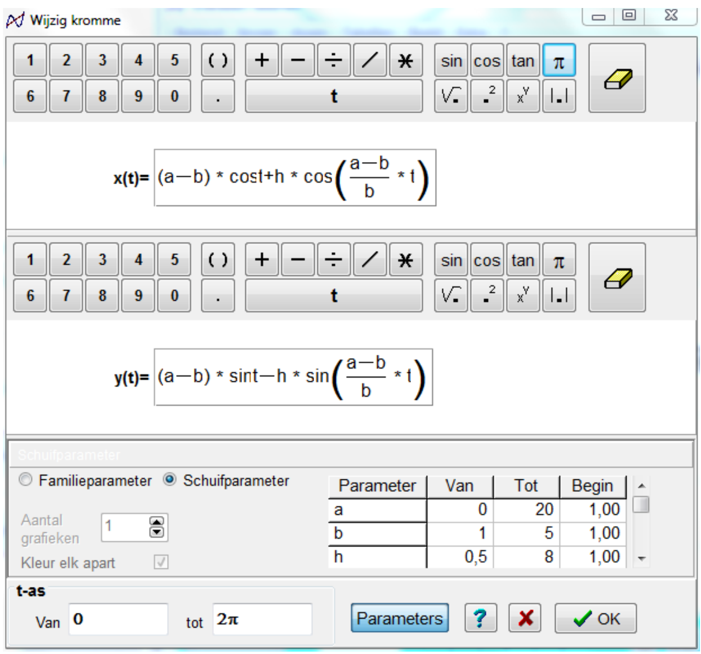



**Opgave 1**

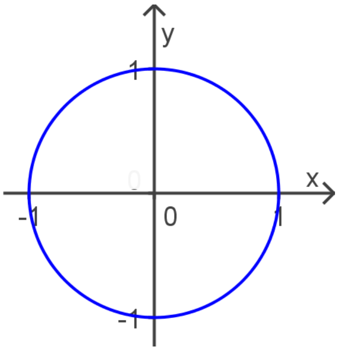
Kies een computertoepassing om een hypotrochoïde te tekenen.

**a.** Open **Vu-Grafiek**, hoofdmenu **Grafieken tekenen.** Voer de formules in met alle parameters, zie screenshot hiernaast.

**b.** Als je GeoGebra gebruikt, dan moet je eerst voor $a$, $b$, $h$ en $t$ schuifknoppen invoeren.



## 6.2 Werken met de GR



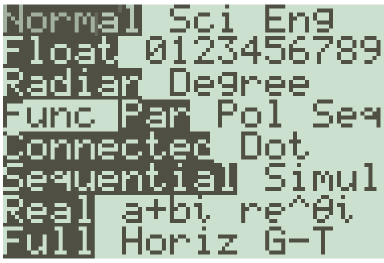

Een manier om cirkelbewegingen te definiëren is met behulp van parameterkrommen. Hierbij worden voor de $x$- en $y$-coördinaat twee functies gegeven. Bij voorbeeld:

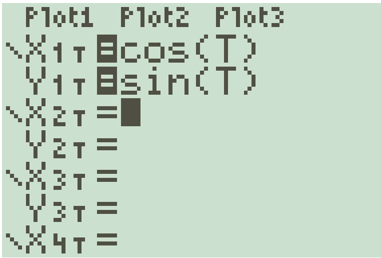
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

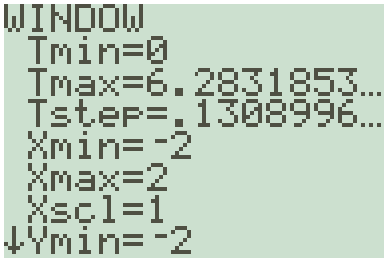
In Vu-Grafiek of GeoGebra ziet het er zo uit:
Ga na dat bij $t = \frac{1}{2}\pi$ het punt (0, 1) hoort.
Welk punt hoort bij $t = \frac{1}{4}\pi$?

### Met de grafische rekenmachine:

Via [MODE] kan je de GR in de 'parameterstand' zetten. Je kunt dan via [Y=] je parametervoorstelling invoeren, met [WINDOW] het venster aanpassen en met via [GRAPH} de kromme tekenen:




### Opgave 2

**a.** Voer bovenstaande opdrachten in in de grafische rekenmachine.
Je krijgt waarschijnlijk een figuur die er niet uit ziet als de eenheidcirkel. Verander de instellingen van het venster zodat er wel een cirkel in beeld komt.

**b.** Plot ook de parameterkrommen van: $\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ en $\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

**c.** Gegeven is de volgende parametervoorstelling: $\begin{cases} x(t) = 8 \cdot \sin(t) \cdot \cos(2t) \\ y(t) = 5 \cdot \sin(t) \end{cases}$ met $0 \le t \le 2\pi$

Plot de grafiek en bereken de coördinaten van het punt $Q$ waar $y(t)$ maximaal is.

**d.** Gegeven is de volgende parametervoorstelling:
$\begin{cases} x(t) = 8 \cdot \sin(t) \cdot \cos(2t) \\ y(t) = 5 \cdot \sin(2t) \end{cases}$ met $0 \le t \le 2\pi$
Plot de grafiek en bereken de waarden van $t$ bij de snijpunten met de x-as.

> In een **keerpunt** verandert de bewegingsrichting zowel in de $x$-richting als in de $y$-richting.
> Als van een kromme $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ beide gelijk zijn aan 0 dan is er in veel gevallen een keerpunt.

**e.** In welke bovenstaande krommen is er sprake van een keerpunt of meerdere keerpunten?

### Opgave 3

Gegeven de kromme $K$ met parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = 2 + 2\sin \frac{1}{2}t \\ y(t) = 3\sin 2t \end{cases}$

**a.** Voor welke waarden van $t$ wordt deze kromme precies één keer doorlopen?
**b.** Hoe kun je de periode afleiden uit de gegeven parametervoorstelling? **http://www.math4all.nl**

## 6.3 Lissajous-figuren

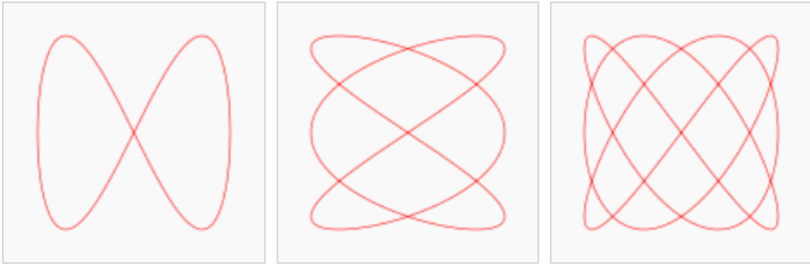
Lissajousfiguren zijn genoemd naar Jules Antoine Lissajous (1822-1880).

De volgende formule beschrijft de figuren:

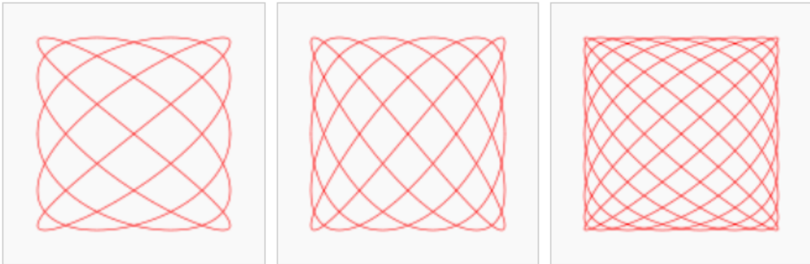
$$\begin{cases} x = A\cos at \\ y = B\sin bt \end{cases}$$

Kies $A$=$B$=4 en varieer met $a$ en $b$.

afbeelding van: **http://nl.wikipedia.org/wiki/Lissajousfiguur**



$a$ = 1, $b$ = 2 (1:2) $a$ = 3, $b$ = 2 (3:2) $a$ = 3, $b$ = 4 (3:4)

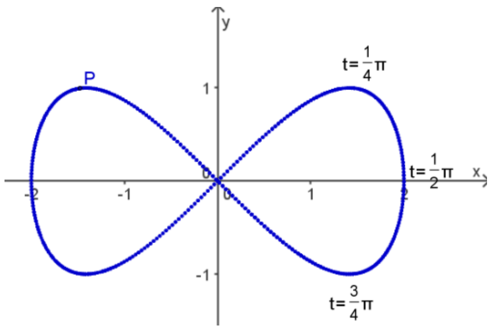


$a$ = 5, $b$ = 4 (5:4) $a$ = 5, $b$ = 6 (5:6) $a$ = 9, $b$ = 8 (9:8)

Een kromme die hoort bij een parametervoorstelling waarbij *x* en *y* sinusfuncties zijn heet een **Lissajousfiguur**.
De periode van een kromme is de tijd die verloopt totdat de beweging zich herhaalt.
Deze periode is gelijk aan de gemeenschappelijke periode van x en y.

### Opgave 4

Gegeven is de Lissajous-figuur $K$ met de volgende parametervoorstelling: $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = s\,\text{in}(2t) \end{cases}$




**a.** Ga na dat de figuur hiernaast de grafiek van $K$ is en bereken de coördinaten van de snijpunten van $K$ en $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

**b.** Geef de vergelijking van de raaklijnen in het punt (0,0).

De snelheid waarmee een bewegend punt een kromme doorloopt heet de **baansnelheid**.
De grootte van de baansnelheid berekenen je door de snelheidsvector te ontbinden in een horizontale component $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ en een verticale component $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.
Uit de stelling van Pythagoras volgt de formule voor de baansnelheid: $v(t) = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$.

### Opgave 5

Gegeven de kromme $K$ met parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \sin^2(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$

**a.** Bereken de baansnelheid op $t = \frac{1}{3}\pi$.

**b.** Schrijf $x(t)$ als een sinusfunctie zonder kwadraat.

### Opgave 6

Gegeven $\begin{cases} x(t) = 3\sin(t) \\ y(t) = 2\sin(3t) \end{cases}$

Bereken **exact** de coördinaten van de keerpunten.

## 6.4 Cycloïden

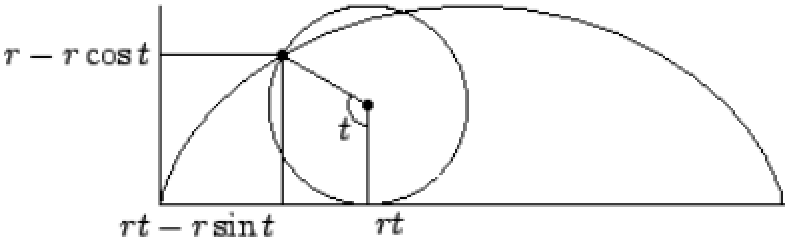
Een punt op een rollend fietswiel beschrijft een cirkel ten opzichte van de as. Hoe wordt de beweging beschreven die dat punt maakt ten opzichte van een vast punt op de grond?
Zie animaties op **http://home.planet.nl/~hietb062/java5.htm**, of
**http://www.wisfaq.nl/show3archive.asp?id=38376&j=2005** ,
**http://curvebank.calstatela.edu/cycloidmaple/cycloid.htm**
en **http://web.cortial.net/bibliohtml/hyp_ep_j.html** .

Christiaan Huygens onderzocht hoe je een slingeruurwerk regelmatig kon laten lopen. In tegenstelling tot wat je misschien zou denken is bij een gewone slinger - een gewicht aan een touwtje dat aan een vast punt hangt - de slingertijd afhankelijk van de uitwijking. Bij grotere uitwijking wordt de slingertijd ook groter en dat is niet zo handig als je een slingeruurwerk wilt maken: je kunt er niet zeker van zijn dat je de slinger altijd dezelfde uitwijking geeft. Huygens ontdekte dat als je het gewicht van een slinger niet langs een cirkel maar langs een cycloïde kon leiden je je de slingertijd onafhankelijk van de uitwijking werd. Hierom heet de cycloïde ook wel de tautochroon, van tautos (gelijk) en chronos (tijd). De cycloïde (wielkromme) was een in die tijd al bekende kromme, je krijgt hem door een cirkel (zonder slippen) over een lijn te laten rollen en dan de baan van één punt te volgen.

De parametervoorstelling die hierbij hoort is

$$\begin{cases} x = rt - r\sin t \\ y = r - r\cos t \end{cases}$$

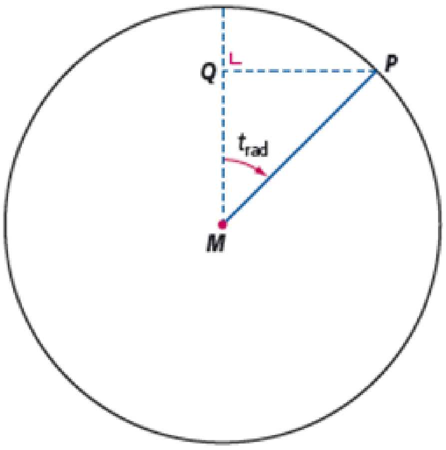
waarbij $r$ de straal is van de rollende cirkel.




Als je deze kromme nu ondersteboven hangt dan krijg je de eigenlijke tautochrone kromme:
Het maakt niet uit hoe hoog (of laag) je begint: het duurt altijd even lang om (wrijvingsloos) naar het laagste punt te glijden.

Een cycloïde kun je gebruiken bij het ontwerpen van skateboardhellingen: als je die in de vorm van een cycloïde maakt bereik je dat een skateboarder de hele tijd een regelmatig ritme aan kan houden. De slingertijd is immers tijdens het gangmaken en het uitvoeren van allerlei kunstjes gelijk en dat betekent weer dat je je al tijdens dat gangmaken op je ritme kunt instellen.
De cycloide is in zekere zin ook de moeilijkste baan: hij geeft de kortste `slingertijd' en vraagt dus het meest van je reactievermogen.

### Opgave 7




Hiernaast is een wiel getekend. De straal van het wiel is 2 meter, het wiel draait rond met een snelheid van 1 radiaal per seconde. Een volledige rondgang is 2π rad en de omtrek van het wiel is $2\pi \cdot 2 = 4\pi$ meter. Op $t = 0$ ligt het punt $P$ aan de bovenzijde van het wiel.

**a.** Bekijk de grafiek, die de baan van het punt $P$ weergeeft in een assenstelsel. Wat zijn de coördinaten van het punt $P$ op het tijdstip $t = 0$?

**b.** Leg uit dat het wiel per seconde 2 meter vooruit gaat.

**c.** Verklaar met de tekening hiernaast dat $PQ = 2\sin t$ en $MQ = 2\cos t$

**d.** Leg uit dat voor de coördinaten van $M$ geldt: $x = 2t$ en $y = 2$.

**e.** Leg uit dat voor de coördinaten van $P$ na $t$ seconden geldt: $x = 2t + 2\sin t$ en $y = 2 + 2\cos t$

### Opgave 8

**a.** Stel de parametervoorstelling op voor een punt $Q$ op de omtrek van hetzelfde wiel, dat zich op tijdstip $t = 0$ op de grond bevindt. Plot de baan van $Q$ in hetzelfde assenstelsel.

**b.** Doe hetzelfde voor een punt $R$, dat zich op het wiel bevindt, precies in het midden tussen $M$ en $P$.

### Opgave 9

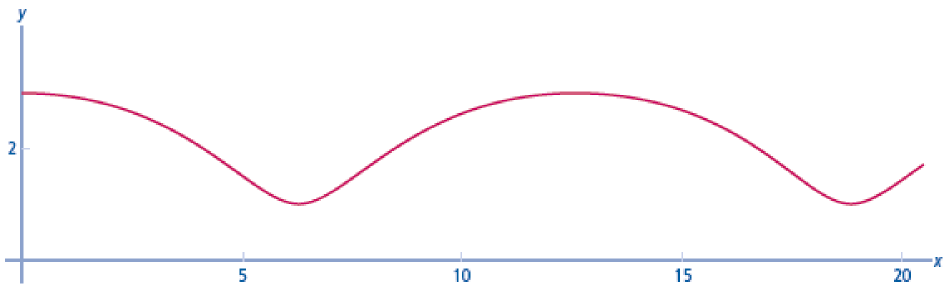
**a.** Bereken $\dfrac{dx}{dt}$ en $\dfrac{dy}{dt}$ voor het punt $P$ in opdracht 7.

**b.** Druk de baansnelheid $v$ uit in $t$ en plot de grafiek van de functie $v$.

**c.** Waarom mag je de grafiek van $v$ niet in hetzelfde assenstelsel als de kromme van opdracht 7 tekenen?

**d.** Op welke tijdstippen is de snelheid maximaal of minimaal? Kun je dit zonder rekenwerk verklaren?

> De kromme die ontstaat doordat een punt loopt op de omtrek van een rollende cirkel, heet een **cycloïde**.
> De cycloïde werd reeds uitvoerig bestudeerd door wiskundigen in de 15e en 16e eeuw, waaronder Torricelli en Christiaan Huygens.
> Een cycloïde ontstaat door de combinatie van een rechtlijnige beweging en een cirkelbeweging.
>
> Het woord cycloïde komt uit het Grieks: κυκλος =*cirkel*.



### Opgave 10

Gegeven zijn parametervoorstellingen met de vorm

$$\begin{cases} x = at - b\cos t \\ y = a - b\sin t \end{cases}$$

Deze parametervoorstellingen beschrijven de beweging van een punt $P$ op een wiel met middelpunt $M$. Om een cycloïde te krijgen moeten $a$ en $b$ gelijk zijn.

**a.** Aan welke voorwaarde moeten $a$ en $b$ voldoen als de afstand $MP$ kleiner is dan de straal van het wiel?

**b.** Het wiel van een trein heeft een zogenaamde flens, dat is de rand die ervoor zorgt dat de trein niet ontspoort. Op de flens liggen punten die verder van het middelpunt liggen dan de rail. Wat weet je bij deze punten over de waarden van $a$ en $b$?

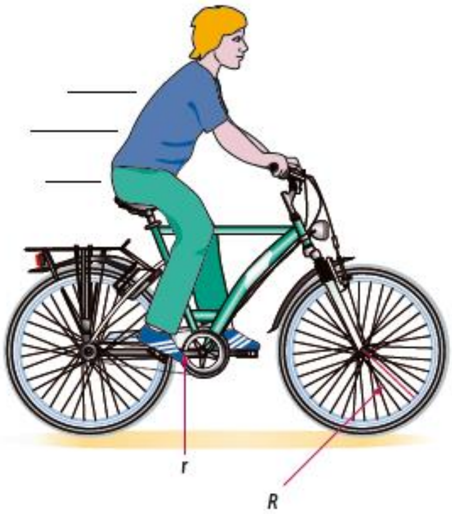
**c.** Plot de kromme voor deze situatie (vraag b).

**d.** Waaruit blijkt dat het punt van opdracht c zich op een bepaald moment beweegt in een richting tegengesteld aan die van de trein?

**e.** Bereken $\dfrac{dx}{dt}$ en $\dfrac{dy}{dt}$ voor het punt uit vraag b.

**f.** Druk de baansnelheid $v$ uit in $t$ en plot de grafiek van de functie $v$. Hoe zie je in deze grafiek dat het punt zich in tegengestelde richting van de trein beweegt?

### Opgave 11




Bij het fietsen maken de trappers een cirkelbeweging ten opzichte van de fiets. Om te onderzoeken in welk geval de trappers achterwaarts bewegen ten opzichte van de grond gebruik je de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = Rt - r\cos pt \\ y = \frac{1}{2}R - r\sin pt \end{cases}$$

**a.** Bekijk de parametervoorstelling van de kromme.
Dat is $x = 0{,}8t + 0{,}2\sin 2t$ en $y = 0{,}4 + 0{,}2\cos 2t$.
Welke waarden hebben $R$, $r$ en $p$ in dit geval?
Welke gegevens heb je nu over de fiets?

**b.** Bij een moeilijke klim kies je een lagere versnelling. Daarbij maken de trappers veel meer omwentelingen. Wat moet je veranderen in de parametervoorstelling om de bij zo'n situatie passende kromme te plotten?

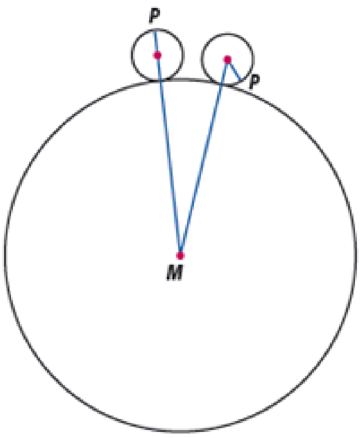
**c.** Bekijk de kromme die je met de gegevens van opdracht **b** krijgt. Gaan de trappers alleen vooruit of ook achteruit?

**d.** Welke van de volgende uitdrukkingen heb je nodig om te berekenen of de trappers achterwaarts bewegen: $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ of de baansnelheid?

## 6.5 Epicycloïden

Een ander type beweging vindt plaats als een punt een cirkel doorloopt, die zelf weer langs een grotere cirkel beweegt. De beweging van een punt op de kleinere cirkel is dan de combinatie van twee cirkelbewegingen. De kromme die ontstaat heet een **epicycloïde**.

### Opgave 12




Een cirkel met straal 1 m rolt over de buitenzijde van een grotere cirkel met een straal 10 m. De baan die een punt op de rand van het kleine cirkel doorloopt is te vergelijken met een cycloïde.
Neem aan dat het wiel zich per seconde 1 m langs de cirkel verplaatst. Het punt *P* bevindt zich op het tijdstip $t = 0$ aan de bovenzijde.

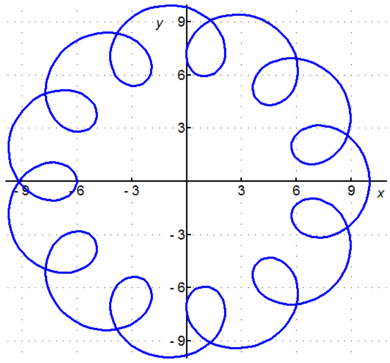
**a.** Waarom is *MN* na *t* seconden 0,1*t* radialen gedraaid?

**b.** Leg uit dat *NP* na *t* seconden 1,1*t* rad gedraaid is.

**c.** Verklaar nu de parametervoorstelling voor de baan van punt *P*.

**d.** Verander de parametervoorstelling zodanig dat de baan wordt beschreven van het punt *Q* dat midden tussen *N* en *P* ligt

### Opgave 13




De krommen hiernaast en van de vorige opgave behoren beide bij een parametervoorstelling van de vorm $\begin{cases} x = R\cos t + r\cos ct \\ y = R\sin t + r\sin ct \end{cases}$

Zoek met VU-Grafiek geschikte waarden voor *R*, *r* en *c* om deze krommen op het scherm te laten verschijnen.
Gebruik de knop (animatie van VU-grafiek) om te zien hoe de krommen worden doorlopen.

### Opgave 14

Bij een kermisattractie draaien bakjes met zitplaatsen in 2 seconden rond, terwijl de arm waar ze aan vast zitten zelf in 8 seconden ronddraait.
Neem aan dat je op 1 m van de as van het bakje zit en dat de straal van de arm 7 m is.

**a.** Gebruik een parametervoorstelling van de vorm $\begin{cases} x = R\cos at + r\cos bt \\ y = R\sin at + r\sin bt \end{cases}$

Leg uit waarom dit een verstandige keuze is.

**b.** Stel een parametervoorstelling op voor deze beweging en maak een plot.

**c.** Druk de baansnelheid *v* uit in *t* en plot de grafiek van *v*.

**d.** Op welke tijdstippen van een rondgang is de baansnelheid minimaal?

**e.** Hoe groot is de maximale snelheid?

# 6.6 Poolvoorstellingen

Veel krommen zijn de grafiek van een functie of kunnen worden beschreven met een parametervoorstelling. In de volgende opdrachten werk je met de optie poolvoorstellingen.

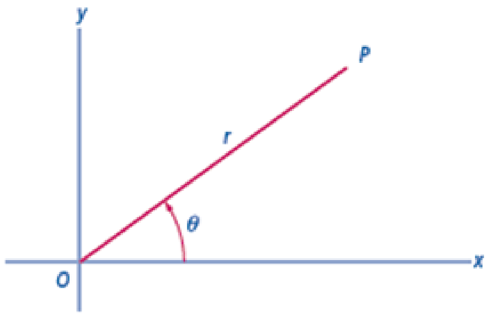
### Opgave 15

Teken een cirkel C met straal 2. Je kunt de coördinaten van de punten op de cirkel uitdrukken in poolcoördinaten, waarbij je de hoek $\theta$ uitdrukt in radialen.

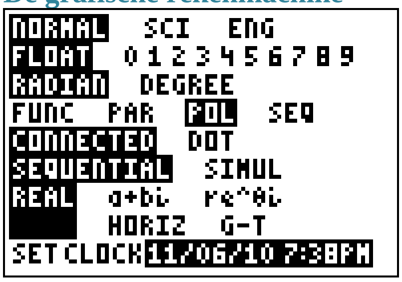
**a.** Leg uit dat voor elk punt op de cirkel geldt: $x = 2\cos\theta$ en $y = 2\sin\theta$.

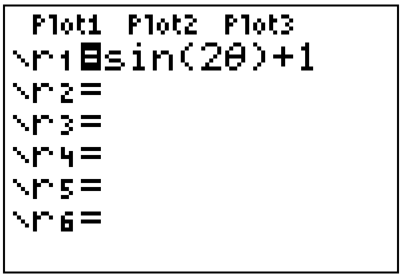
**b.** Geef een parametervoorstelling die bij de kromme C past.

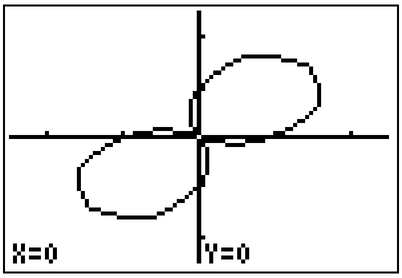
**c.** Leg uit dat je C kunt beschrijven met de vergelijking $x^2 + y^2 = 4$

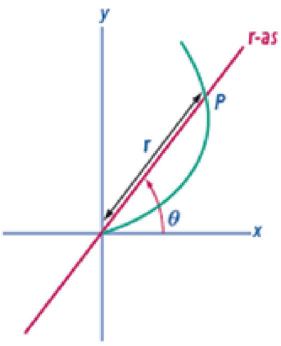



### De grafische rekenmachine

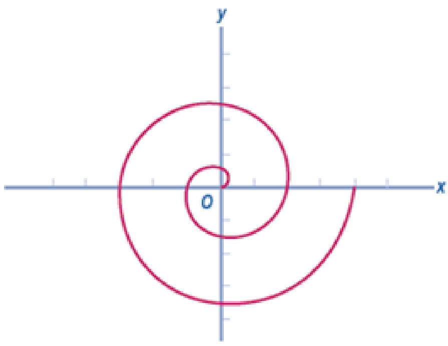



| $\theta$ | $r$ |
|---|---|
| $\frac{1}{12}\pi$ | $\frac{1}{12}$ |
| $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{6}$ |
| $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{3}$ |
| $\frac{1}{2}\pi$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\pi$ | $1$ |
| $3\frac{1}{2}\pi$ | $3\frac{1}{2}$ |



### Opgave 16

Plot en teken de krommen bij de drie poolvoorstellingen hiernaast.
Neem $\theta$ uit interval $[0,4\pi]$.
Geef in je tekening de punten aan die horen bij $\theta = \frac{1}{6}\pi$, $\theta = 1\frac{1}{4}\pi$ en $\theta = 2\frac{1}{6}\pi$.

$$r = 2\sin\theta$$
$$r = 1\frac{1}{2}$$
$$r = -3\cos 2\theta$$

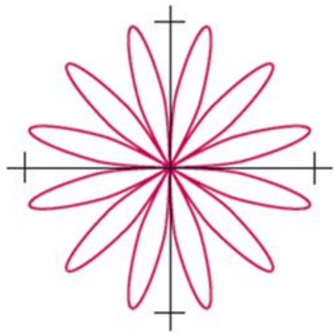
### Opgave 17

**a.** Plot en schets de grafiek van $r = \sin 2\theta$.

**b.** Leg uit dat bij de kromme de volgende parametervoorstelling hoort: $\begin{cases} x(t) = \sin 2\theta \cdot \cos\theta \\ y(t) = \sin 2\theta \cdot \sin\theta \end{cases}$

### Opgave 18

Gegeven is de familie van krommen $r = \sin n\theta$.

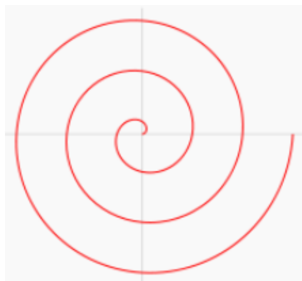


**a.** Plot de kromme voor een aantal waarden van *n*.
Waarom liggen alle punten van deze krommen op of binnen de eenheidscirkel?

**b.** De krommen lijken op bloemen. Zoek een verband tussen het aantal blaadjes en het getal *n*. Verklaar je antwoord.

**c.** Voor *n*=2 heeft de kromme vier symmetrieassen. Welk verband is er tussen de waarde van *n* en het aantal symmetrieassen?

Een **archimedes-spiraal** is een meetkundige kromme in de vorm van een spiraal waarvan de vergelijking in poolcoördinaten luidt: $r = a + b\theta$.
Daarin zijn *a* en *b* twee parameters die respectievelijk het beginpunt en de spatiëring (=ruimte tussen de bogen) bepalen.



### Opgave 19

**a.** Als je *a* = 0 kiest, begint de spiraal in de oorsprong. Licht dit toe.

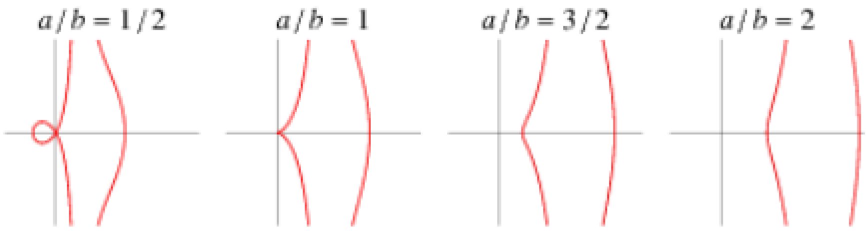
**b.** Teken de spiraal voor $b = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$ en $b = 1$.
Kies $\theta = 0$ tot $\theta = 8\pi$

Het laatste type krommen is de **conchoïde**. Een conchoïde kun je niet met een functie beschrijven. Het lukt wel met een parametervoorstelling, maar het is eenvoudiger met de poolvoorstelling.

### Opgave 20

Een poolvoorstelling voor de conchoïde is $r = b + \dfrac{a}{\sin\theta}$

Teken onderstaande conchoïdes voor verschillende waarde van *a* en *b*.
Merk op dat de GR de plaatjes tekent met de assen verwisseld.



# Hoofdstuk 7 Numerieke wiskunde

"Numerieke wiskunde is een deelgebied van de wiskunde waarin algoritmes voor problemen in de continue wiskunde bestudeerd worden (in tegenstelling tot discrete wiskunde). Dit betekent dat het vooral gaat over reële of complexe variabelen, de oplossing van differentiaalvergelijkingen en andere vergelijkbare problemen die optreden in de natuurkunde en techniek."

**http://nl.wikipedia.org/wiki/Numerieke_wiskunde**

## Inhoud

## 7.1 Lineaire benadering

Als je op een grafiek sterk inzoomt op een punt lijkt de grafiek meestal op een rechte lijn.
We gaan uitzoeken hoe je de vergelijking van die lijn vindt.

### Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 3x + 1$

**c.** Plot de grafiek van f en zoom in op het punt $P(1, 5)$. Wat zie je?
**d.** Bereken exact de helling van de raaklijn met behulp van $f'$.
**e.** Geef de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van $f$ in $P$.

| | |
|---|---|
| Grafieken van functies kun je op een klein gebied rondom een punt $P$ op de grafiek bijna altijd benaderen met een lijn $l$.<br>Die lijn is de raaklijn aan de grafiek van die functie en de vergelijking van die lijn wordt ook wel de eerstegraads benadering, **lineaire benadering** of **linearisering** van de functie $f$ in het punt $P$ genoemd. | **Voorbeeld**<br>Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x$<br>Lijn l is de linearisering in punt $P(3, -3)$.<br>Stel een vergelijking van $l$ op.<br>**Oplossing**<br>De afgeleide is $f'(x) = -x^2 + 2$<br>De helling van $l$ is $f'(3) = -9 + 2 = -7$<br>De vergelijking van $l$ is $y = -7x + b$.<br>Vul de coördinaten van $P$ in: $-3 = -7 \cdot 3 + b \Rightarrow b = 18$<br>De vergelijking van l is $y = -7x + 18$ |

### Opgave 2

Bereken exact de lineaire benadering van de volgende functies in het punt $P$ met $x$-coördinaat 3.

**a.** $f(x) = x^3 - 2x^2$
**b.** $g(x) = x + \sqrt{3x}$

### Opgave 3

Een lijn met helling 2 raakt de grafiek van een functie in het punt $P(3, 5)$

**h.** Verklaar waarom deze lijn voldoet aan de vergelijking $y = 5 + 2(x-3)$.
**i.** Het punt $P(p, q)$ ligt op de grafiek van een functie $f$.
Verklaar waarom de raaklijn in punt $P$ aan de vergelijking $y = q + f'(p) \cdot (x - p)$ voldoet.
**j.** Laat zien dat de vergelijking ook geschreven kan worden als $y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$.

> Als $l$ een linearisering is van de functie $f$ in een punt $P(p, q)$, dan kun je de vergelijking van $l$ schrijven als $y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$.

### Opgave 4

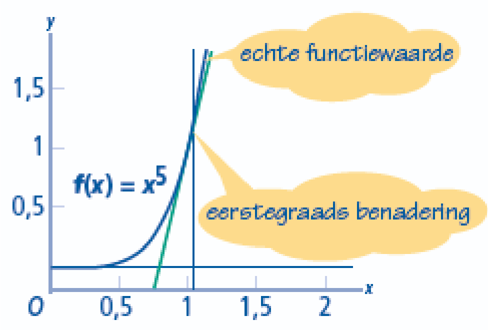
Gegeven is de functie $f(x) = x^3 + 2x + 3$.

**a.** Geef de vergelijking van de linearisering van $f$ in (0, 3).
**b.** Doe dit ook voor de linearisering van $f$ in $(-1, 0)$.
**c.** Stel de vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van de functie $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$ in het punt met $x = -2$.

### Opgave 5

**a.** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Stel de lineaire benadering op van f in het punt $P(1, 1)$.
**b.** Gebruik de lineaire benadering om $f(1{,}006)$ te schatten.

**c.** Bereken $f(1{,}006)$ met je rekenmachine. Hoeveel procent wijkt je benadering bij b af van de uitkomst bij c?

| | |
|---|---|
| De lineaire of eerstegraads benadering werd vroeger vaak gebruikt om functiewaarden te schatten, bijvoorbeeld om tabellen van wortels samen te stellen. | **Voorbeeld**<br>Bereken de eerstegraads benadering van het getal $1{,}04^5$.<br>Neem als raakpunt (1, 1).<br><br><br>**Oplossing**<br>De raaklijn aan de grafiek van $f(x)=x^5$ is<br>$y=f(1)+f'(1)\cdot(x-1)$<br>$f'(x)=5x^4 \Rightarrow f'(1)=5$. De raaklijn is dus $y=5(x-1)+1$.<br>De benadering is dan $y=5(1{,}04-1)+1=1{,}2$<br>Deze benadering wijkt ongeveer 1,4% af van de werkelijke waarde. |

## Opgave 6

Gebruik de functie $f(x)=x^{17}$ en het raakpunt bij $x=2$ om de volgende getallen te benaderen met een lineaire benadering. Bereken ook steeds hoeveel procent je benadering afwijkt van de waarde die je rekenmachine geeft.

**a.** $2{,}01^{17}$ **b.** $2{,}003^{17}$ **c.** $1{,}98^{17}$

## Opgave 7

Gegeven zijn de functies $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{5+x^2}$, $s(x)=f(x)+g(x)$ en $p(x)=f(x)\cdot g(x)$.

**a.** Stel lineaire benaderingen op van *f, g, s* en *p* in het punt met $x=2$.
**b.** Toon aan dat de lineaire benaderingen van *s* gelijk is aan de som van de lineaire benaderingen van *f* en van *g*.
**c.** Laat zien dat lineaire benadering van *p* niet gelijk is aan het product van de lineaire benaderingen van *f* en van *g*.

In het tweedeklasboek deel B van Getal & Ruimte staat op blz 43 de volgende opdracht: hoe werkt dat precies?

**Wortels benaderen met de methode van Heron**

**3** De Griekse wiskundige Heron heeft in zijn boek 'Metrica' een methode beschreven om wortels te benaderen. Hiernaast zie je hoe de methode werkt. De stappen 2 en 3 worden steeds herhaald. Zo'n rekenmethode, waarbij je door het herhalen van stappen telkens een lus doorloopt, heet een **iteratieve methode**.

a Gebruik de methode van Heron om $\sqrt{95}$ te benaderen. Neem als eerste benadering 10.


**De methode van Heron om $\sqrt{a}$ te benaderen**

**Stap 1**
Kies een eerste benadering van $\sqrt{a}$, bijvoorbeeld $b$.

**Stap 2**
Bereken $\dfrac{b+\dfrac{a}{b}}{2}$.

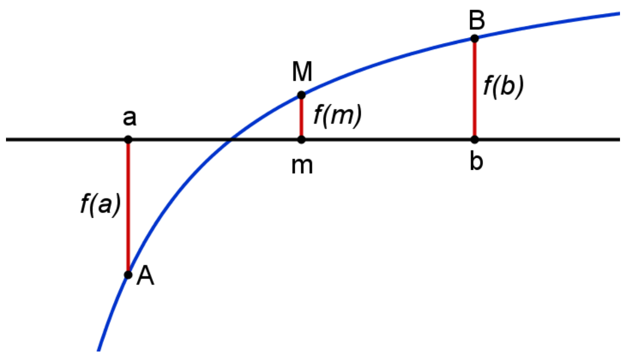
**Stap 3**
De uitkomst van stap 2 wordt de nieuwe $b$. Ga naar stap 2.
Elke nieuwe uitkomst van stap 2 benadert $\sqrt{a}$ beter.

Gebruik je rekenmachine. Hoeveel keer moet je de lus doorloopen om een benadering te krijgen waarvan de eerste acht decimalen correct zijn?

## 7.2 Halveringsmethode

Een methode die veel gebruikt wordt om nulpunten te vinden is de **halveringsmethode** of **bisectiemethode**. Het principe is eenvoudig en de methode is op een computer te implementeren.

Als *f* continu is op interval [*a*, *b*] en als $f(a)<0 \wedge f(b)>0$ of $f(a)>0 \wedge f(b)<0$, dan heeft *f* minstens één nulpunt α in [*a*, *b*]. (Zie stelling van Bolzano)




We veronderstellen dat er ook hoogstens één nulpunt is. In de uitleg is $f(a)<0 \wedge f(b)>0$.

Je berekent eerst $m=\dfrac{a+b}{2}$ en daarna bereken je $f(m)$.

Er zijn nu drie mogelijkheden:

I. Als $f(m)=0$ dan hebben $\alpha$ gevonden en zijn we dus klaar.

II. Als $f(a)<f(m)<0$, dan neem je $a=m$ en herhaal het proces.

III. Als $0<f(m)<f(b)$, dan neem je $b=m$ en herhaal het proces (zie plaatje).

We stoppen als $|a-b|<\varepsilon$, waarbij $\varepsilon$ een vooraf afgesproken nauwkeurigheid is.

**Voorbeeld:** Bereken $\sqrt{2}$

**Oplossing:**

$\sqrt{2}$ is de positieve wortel van de vergelijking $f(x)=x^2-2=0$. We kiezen $a$=1 en $b$=2. Op de manier zoals hierboven besproken krijgen we: $\sqrt{2}\approx 1{,}414...$

Dit lijkt omslachtig maar met een computer is het aantal stappen geen probleem. De zekerheid dat het een eindig proces dat zeker een oplossing geeft is veel waard.

| n | a | b | x | x²-2 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1,5 | 0,25 |
| 1 | 1 | 1,5 | 1,25 | -0,4375 |
| 2 | 1,25 | 1,5 | 1,375 | -0,10938 |
| 3 | 1,375 | 1,5 | 1,4375 | 0,066406 |
| 4 | 1,375 | 1,4375 | 1,40625 | -0,02246 |
| 5 | 1,40625 | 1,4374 | 1,421825 | 0,021586 |
| 6 | 1,40625 | 1,421825 | 1,414038 | -0,0005 |
| 7 | … | … | … | … |

### Opgave 8

**a.** Los de vergelijking $xe^{2x}-1=0$ op m.b.v. de halveringsmethode.
Neem a=0 en b=1 en bereken minimaal 6 stappen.

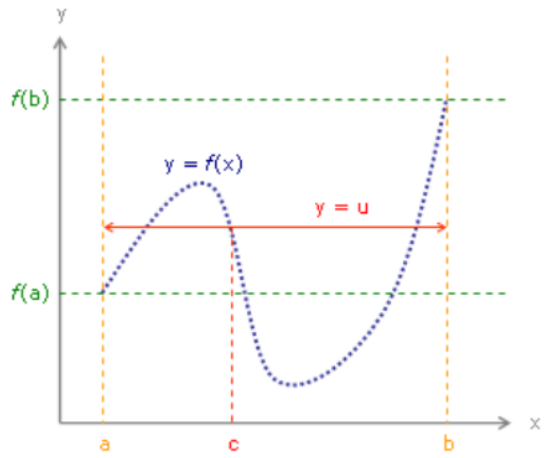
**b.** Los de vergelijking $xe^{2x}-1=0$ op m.b.v. je grafische rekenmachine.
Vergelijk deze oplossing met je antwoord van vraag a.

Hetgeen hierboven behandeld is, is een bijzonder geval van de

**Tussenwaardestelling**

Als *f* een continue functie op het interval [*a*, *b*] en γ een getal tussen *f(a)* en *f(b)*, dus $f(a)<u<f(b)$ of $f(b)<u<f(a)$, dan $c\in[a,\, b]$ met $f(c)=u$.

In het speciale geval dat $u$ = 0 heet de stelling: **de stelling van Bolzano**.

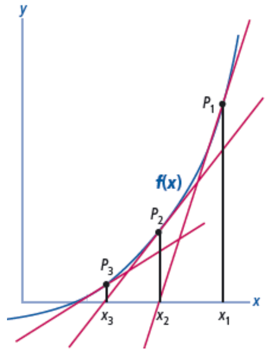


## 7.3 De methode van Newton-Raphson

Lineaire benaderingen kunnen worden toegepast bij rekenmachines om nulpunten van functies te vinden. Bij de **methode van Newton-Raphson** wordt begonnen met een eerste schatting $x_1$ voor het nulpunt.
De raaklijn in $P(x_1, y_1)$ met $y_1 = f(x_1)$ snijdt de $x$-as in $x_2$ wat een betere schatting voor het nulpunt geeft. Door steeds opnieuw te benaderen kun je het nulpunt zeer precies bepalen.

Hierbij is

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$




### Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 3$

**a.** Teken de grafiek op het interval $[-2, 3]$.

**b.** Neem $x_1 = 3$ als eerste schatting voor het rechter nulpunt.
Toon aan dat $y = 13x - 33$ de eerstegraads benadering van $f(x)$ is in het punt $P_1(3, 6)$.

**c.** Bereken de coördinaten van het snijpunt van deze raaklijn met de x-as en teken de lijn er in de grafiek bij. Noem de x-waarde van het snijpunt $x_2$.

**d.** Ga na dat geldt $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

**e.** Ga uit van $x_2$ en bereken benadering $x_3$ op dezelfde manier.

**f.** Leg uit dat $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Herhaalde berekeningen kunnen snel worden uitgevoerd met een spreadsheet programma.
In het bestand hiernaast staan de functie en de afgeleide functie uit opdracht 9 in de cellen B5 en C5. daarna zijn ze gekopieerd naar de cellen eronder. In het invoervak zie je de inhoud van B5.
De waarde van x1 staat in cel C2. Cel A5 leest de waarde uit C2 af. In A6 staat **=A5-B5/C5**.

B5 $f_x$ =A5^3-2*A5^2-2*A5+3

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | start (*x* 1) | 3 | |
| 3 | | | | |
| 4 | x | f(x) | f'(x) | |
| 5 | 3 | 6 | 13 | |
| 6 | 2,53846 | 1,3928084 | 7,17751 | |
| 7 | 2,34441 | 0,2041459 | 5,11113 | |
| 8 | 2,30447 | 0,0079659 | 4,71385 | |
| 9 | 2,30278 | 1,403E-05 | 4,69725 | |
| 10 | 2,30278 | 4,377E-11 | 4,69722 | |
| 11 | 2,30278 | 0 | 4,69722 | |

### Opgave 10

De functie $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 3$ van opdracht 9 heeft meerdere nulpunten.
Zoek alle nulpunten door andere waarden voor $x_1$ te kiezen. Gebruik een spreasheet zoals hierboven of voer de berekeningen met de hand uit.

### Opgave 11

Gebruik een spreadsheet om de nulpunten van $f(x) = 0,2x - \sqrt[3]{x}$ te benaderen.

**a.** Zet de functie en de bijbehorende afgeleide in de cellen B5 en C5. Kopieer de ingevulde formules naar alle cellen van de kolommen B en C.

**b.** Uit een plot blijkt dat er twee nulpunten zijn. Benader het rechter nulpunt met behulp van het programma.

**c.** Het andere nulpunt kun je niet vinden met behulp van het programma. Leg uit waardoor dat komt.

## 7.4 De methode van Newton-Raphson met de GR

Het herhalen van hetzelfde proces heet **itereren**. Het gaat dus om een **iteratief proces**. Je hoopt dan dat de rij $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ snel naar een limiet nadert.

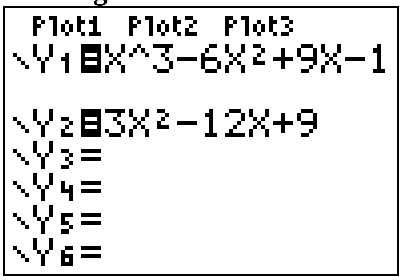
### Voorbeeld

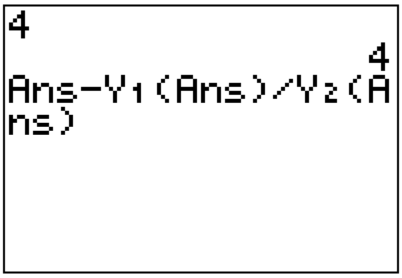
Gegeven $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. We zoeken de coördinaten van het meest rechtse nulpunt.

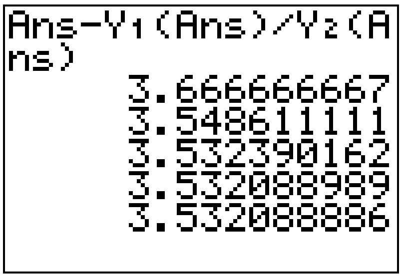
Eerst differentiëren: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

- Als startpunt kiezen we $x_1 = 4$.
- Met $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ berekenen we de volgende term.
- Dit proces herhalen we tot $x_n$ (tot het aantal gewenste/mogelijke decimalen) niet meer verandert.

Met de **grafische rekenmachine**:








Na 5 'slagen' hebben we een benadering gevonden voor het nulpunt.
$x \approx 3{,}532088886$

### Opgave 12

**a.** Maak gebruik van de functie en het algoritme van het voorbeeld met als startwaarde $x_1 = 2$.
Krijg je nu de waarde van het 'middelste nulpunt'?

**b.** Neem als startwaarde $x_1 = 0$. Krijg je nu waarde van het 'linker nulpunt'?

**c.** Neem als startwaarde $x_1 = 100$. Na hoeveel slagen krijg je $x \approx 3{,}532088886$

### Opgave 13

De functie $f(x) = \cos(x-1)$ heeft bij $x \approx 2{,}5$ een nulpunt. Benader dit nulpunt met de methode van Newton op 6 decimalen nauwkeurig.

### Opgave14

**a.** De functie $f(x) = \ln(x+3) + 1$ heeft bij $x \approx -2{,}6$ een nulpunt.
Neem als startwaarde $x_1 = 10$ en probeer een benadering in vier decimalen te vinden voor dat nulpunt met de methode van Newton.

**b.** Verklaar waarom dit niet lukt.

### Beperkingen

In een van de vorige opdrachten heb je gezien dat soms de methode van Newton 'ontspoort'. De methode kan ook eindeloos voortzetten. Je kunt zeggen dat als voor iedere x tussen nulpunt en startwaarde de grafiek met de bolle (convexe) kant naar de x-as gekeerd is dan is succes verzekerd.

## 7.5 Regula falsi

Een andere methode om nulpunten te bepalen is **Regula falsi**. Het algoritme convergeert trager dan de Newton-Raphson-methode, maar is stabieler. De methode maakt ook gebruik van opeenvolgende iteraties van het gezochte punt.
Zie de animatie op **http://nl.wikipedia.org/wiki/Regula_falsi**

Dit gaat als volgt:
Gegeven is de continue functie *f*. Bepaal twee waarden $x_0$ en $x_1$ zodat $f(x_0) < 0 \wedge f(x_1) > 0$ of $f(x_0) > 0 \wedge f(x_1) < 0$. We korten deze voorwaarde af als $f(x_0) \cdot f(x_1) > 0$
Omdat *f* continu is op $[x_0, x_1]$ heeft de vergelijking $f(x) = 0$ minstens één oplossing tussen $x_0$ en $x_1$.
We veronderstellen nu dat er ook hoogstens één oplossing is op $[x_0, x_1]$.

We berekenen $x_2 = \dfrac{x_0 \cdot f(x_1) - x_1 \cdot f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

Er zijn nu drie mogelijkheden:

I. Als $f(x_2) = 0$ dan hebben we de oplossing gevonden.

II. Als $f(x_0) \cdot f(x_2) > 0$ dan herhalen we het proces met $x_1$ en $x_2$.

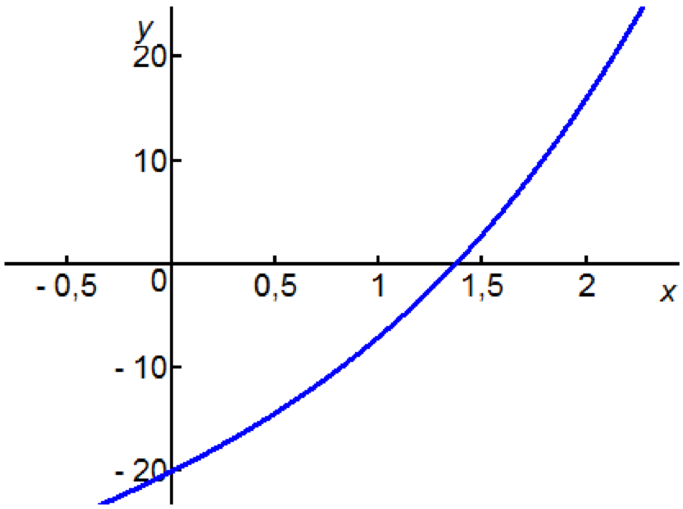
$$x_3 = \frac{x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

III. Als $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$ dan herhalen we het proces met $x_0$ en $x_2$.

$$x_3 = \frac{x_0 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_0)}{f(x_2) - f(x_0)}$$

### Opgave 15

In onderstaande tekening zie je de grafiek van $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$.




We kiezen $x_0 = 0$ en $x_1 = 2$.

**a.** Bereken $x_2$ zoals in het voorbeeld hierboven.

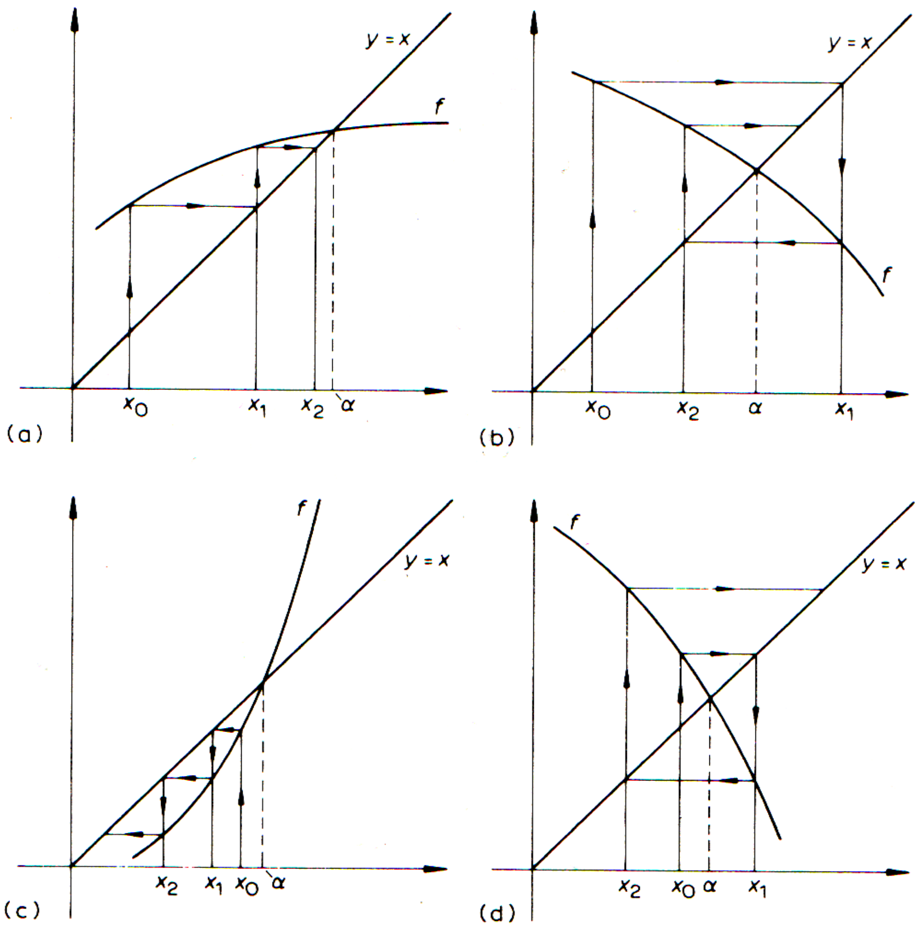
**b.** Geef $x_2$ in te tekening aan. Hoe kan je dat punt ‘meetkundig’ vinden?

**c.** Wat is nu de volgende stap?

**d.** Bereken $x_3$. Zet $x_3$ in de tekening.

## Successieve substitutie

We kijken na naar de gang van zaken bij successieve substitutie waarbij $\alpha$ een oplossing is van $x = f(x)$ en $x_0$ de startwaarde.




Er zijn verschillende mogelijke verlopen van het iteratieproces.

1. Monotoon convergent als $0 < f'(\alpha) < 1$
2. Oscillerend convergent als $-1 < f'(\alpha) < 0$
3. Monotoon divergent als $f'(\alpha) > 1$
4. Oscillerend divergent als $f'(\alpha) < -1$

### Voorbeeld

We gaan nog eens kijken naar de oplossing van $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ met successieve substitutie. Daarvoor moeten we de vergelijking $f(x) = 0$ eerst herschrijven in een vorm $x = g(x)$.

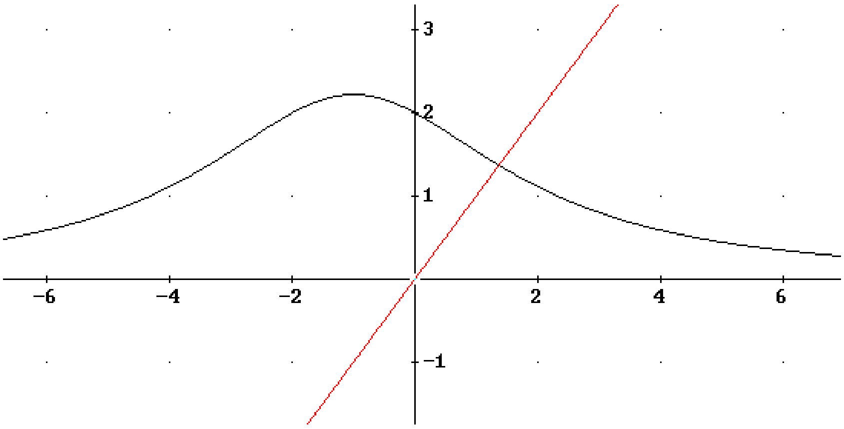
$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

$$x\left(x^2 + 2x + 10\right) = 20$$

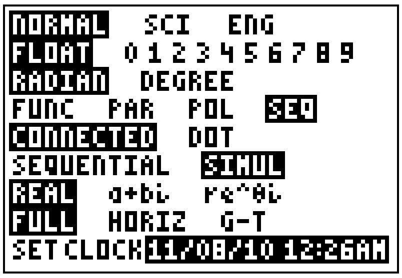
$$x = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}$$

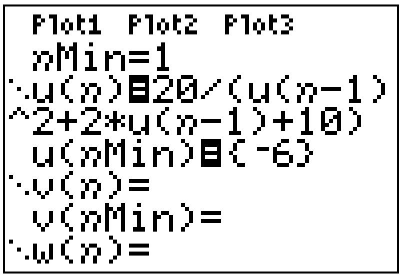
In de tekening hierna kun je de grafieken van $g(x) = \dfrac{20}{x^2 + 2x + 10}$ en $y = x$ terug vinden:




Neem als startwaarde $x_0 = -6$ en teken een aantal iteraties. Wat is $\alpha$?

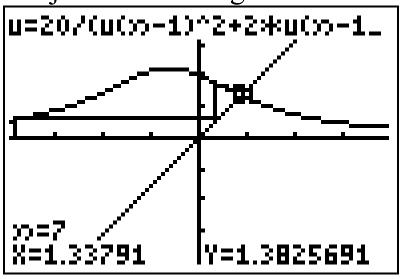
**Met de GR**





Als je dat allemaal goed instelt dan kun je zelf ‘webgrafieken’ tekenen!




Via **[MODE]** kan je GR instellen op **Seq**. Je GR bevindt zich dan in de 'rijentoestand'. Via **[Y=]** kun je dan (recursief gedefinieerde) rijen invoeren.

De **u**, **v** en **w** krijg je via **2nd 7**, **2nd 8** en **2nd 9** en de ***n*** met **[X,T,□,n]**.

De grafiek kun je krijgen door bij **[FORMAT]** te kiezen voor **Web** (in plaats van **Time**).

Met **[GRApH]** en **[TRACE]** kan je dan met het ‘pijltjerechts’ zien wat er gebeurt...

## Opgave 16

**a.** Neem als startwaarde $x_0 = 5$. Lukt het dan ook?

**b.** Bereken de afgeleide $g'(\alpha)$.

**c.** Klopt het resultaat van vraag b met:

| | |
|---|---|
| **I.** | Monotoon convergent als $0 < g'(\alpha) < 1$ |
| **II.** | Oscillerend convergent als $-1 < g'(\alpha) < 0$ |
| **III.** | Monotoon divergent als $g'(\alpha) > 1$ |
| **IV.** | Oscillerend divergent als $g'(\alpha) < -1$ |

## Opgave 17

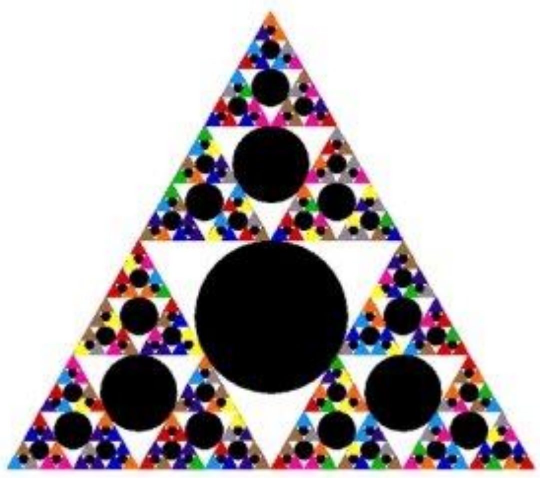
Gegeven de vergelijking $x^3 + 4x - 25 = 0$.

**a.** Schrijf de vergelijking als $x = g(x)$. Welk functie heb je voor *g* genomen?

**b.** Neem als starwaarde $x_0 = 2$. Plot de webgrafiek zoals hierboven, gebruik **trace** om een aantal iteraties te volgen en verklaar wat je ziet.

**c.** Los de vergelijking ook op met je GR en benader de afgeleide $g'(\alpha)$.

# Hoofdstuk 8 Numerieke methoden & fractals



*Deze afbeelding is gemaakt door een student wiskunde*
*voor de cursus Wiskunde&Cultuur 2-3*

## Inhoud

## 8.1 Programmeren met je GR

Programmeren is het schrijven van een computerprogramma. Daardoor kun je de computer instructies geven die door de computer kunnen worden uitgevoerd. Programmeren doe je doorgaans met een programmeertaal. Meestal gebruik je voor het programmeren een programmeeromgeving die je programmatekst kan vertalen naar computerinstructies.
Er zijn heel veel verschillende programmeertalen en programmeeromgevingen. Van Basic tot Pascal, van Java tot Visual Basic, …
Zie **http://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_programmeertalen**
In deze cursus zullen we ons beperken tot een greep uit al die verschillende mogelijkheden:

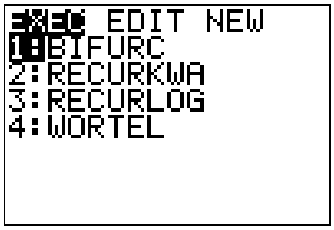
- Programmeren met je GR
- Programmeren met Excel

We zullen er niet erg diep op in kunnen gaan, maar ons richten op de hoofdzaken. Dan kun je toch kennismaken met de basisprincipes van het programmeren. Bovendien gaan we iets doen met de wiskunde uit deze cursus.

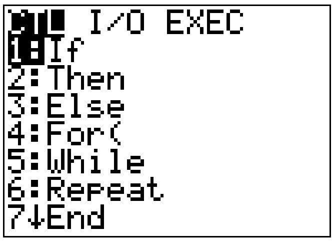
### Programmeren met je GR

Met je grafische rekenmachine, zoals de Ti-83+/84+ kan je programmeren in Ti-basic. Zoals je aan de naam kunt zien lijkt dat op Basic. Het is een 'uitgeklede basic'. Het aardige ervan is dat je in je programma's ook de functies kan gebruiken die je normaal ook gebruikt.

### Programma's schrijven en uitvoeren

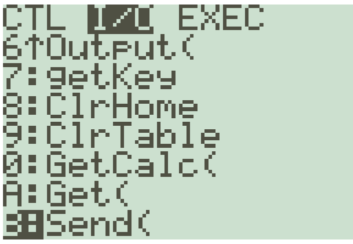



Programma schrijven en uitvoeren kun je op de GR vinden onder het knopje **PRGM**. Met **EXEC** kun je een programma uitvoeren, met **EDIT** kun je een programma wijzigen en om een nieuw programma te definiëren gebruik je **NEW**.
In het voorbeeld hiernaast zie je dat er vier programma's in die GR staan.




In de programmaeditor **EDIT** druk je op het knopje **PRGM** om de verschillende instructies te krijgen die je kunt gebruiken.
Onder **CTL** vind je de zgn. 'controlling program flow'-opdrachten voor keuze, herhaling, springopdrachten, (sub-)programma's.
Onder **I/O** vind je de opdrachten die te maken hebben met invoer en uitvoer.
Met **EXEC** kun je in een programma andere programma's laten uitvoeren.
Ga eens kijken hoe dat werkt.

Hieronder zie je wat er in het menu van **I/O** te vinden is.


## Voorbeeld

Als voorbeeld kijken we nog een keer naar de halveringsmethode voor het benaderen van wortels.
Je ziet hieronder per instructie een korte uitleg.

| TI83 opdracht | per instructie een korte uitleg | Waar te vinden? |
|---|---|---|
| **PROGRAM:WORTELS** | Naam van het programma | Knopje PRGM > NEW<br>Alpha W, enz |
| **ClrHome** | Maakt het scherm schoon. | Knopje PRGM > EDIT> I / O optie 8 |
| **Disp “WORTELS”** | Geeft op het scherm de tekst “WORTELS” | idem |
| **Input “X=”,A** | Vraagt om invoer met de tekst “X=?” | Idem voor Input, “ zit bij Alpha + = kun je vinden bij [2ND][TEST] TEST optie 1:= |
| **0→I** | Kent aan de variabele I de waarde 0 toe. | Voor → gebruik je **STO>** |
| **A→J** | Kent aan de variabele J de waarde A toe. | idem |
| **Repeat $X^2$=A** | Dit is een herhaling tot **End** tot $X^2$=A. | Knopje PRGM > EDIT>CTL 6<br>Gebruik voor X **X,T,θ,n** |
| **(I+J)/2→X** | Kent aan de variabele X de waarde (I+J)/2 toe. | idem |
| **If $X^2$<A:X→I** | Als $X^2$<A dan krijgt I de waarde van X. | < kun je vinden bij [2ND][TEST]TEST optie 5 |
| **If $X^2$>A:X→J** | Als $X^2$>A dan krijgt J de waarde van X. | > kun je vinden bij [2ND][TEST]TEST optie 3 |
| **End** | Einde van de herhaling (zie boven) | Knopje PRGM > EDIT>CTL 7 |
| **Disp “√(X)=”,X** | Geeft op het scherm tekst en uitvoer van X. | Knopje PRGM > EDIT>I/O |

Een pakketje programma’s (WORTEL, PROGX, KV, KV2, enz) staat in de digitale leerroute op N@tschool.

## Opgave 1

**a.** Tik bovenstaand programma in op je GR.
Voer het programma uit voor een aantal verschillende getallen groter of gelijk aan 1. Gaat dat goed?

**b.** Voer het programma NIET uit voor x=0.5.
Leg uit waarom het programma niet werkt voor x<1.

## Opgave 2

Hieronder zie je voorbeeld 2 van een programma.
Het programma vraagt om een startwaarde en berekent iets.

```
PROGRAM:PROGX
ClrHome
"nDeriv(Y1,X,X)"→Y2
Input "START=",X
While ABS(Y1(X))>0.000001
X-Y1(X)/Y2(X)→X
Disp X
getKey→A
If A=102:Stop
End
```

| | |
|---|---|
| **Math > 8:nDeriv(** | Hiermee kun je de afgeleide van een functie in een bepaald punt benaderen. Achter de instructie geef je achtereenvolgens op: de functie, de variabele en de x-coördinaat. |
| **Y1** | [VARS] < Y-vars > Function Y1 |
| **abs** | [Math] <NUM> |

Voer het programma in op je GR. Zet in Y1 de functie $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ en start het programma. Met het intoetsen van 0 kun je het programma stoppen.

**a.** Neem als startwaarde 10, 100 en 1000. Krijg je steeds dezelfde uitkomst?
Wat doet het programma?

**b.** Het programma zal (automatisch) stoppen zodra Y1(X)=0.
Welke regel van het programma controleert dat?

**c.** Neem als startwaarde X=–2 en X=2. Krijg je nu dezelfde uitkomst als bij X=10?

**d.** Er zijn aan de grafiek te zien drie mogelijke uitkomsten. De uitkomst is afhankelijk van de startwaarde. Geef daarvoor een verklaring.

**e.** Kun je precies aangeven voor welke startwaarde je welke uitkomst krijgt? Zo ja, geef de intervallen. Zo nee, leg uit waarom niet.

## Opgave 3

Neem nog een keer het programma van opdracht 2 en zet in Y1 de functie $f(x)=\cos(x-1)$.

**a.** Neem als startwaarde X=2 en X=3.
Bereken de uitkomst van het programma van opdracht 2. Krijg je dezelfde uitkomst?

**b.** Krijg je ook bij andere startwaarden dezelfde uitkomst?

**c.** Wat gebeurt er precies als je als startwaarde $X=1$ en $X=\pi+1$ neemt?

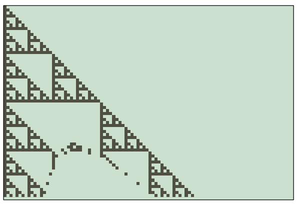
**d.** De functie $f(x)=\cos(x-1)$ heeft bij $x\approx 2{,}5$ een nulpunt. Bij welke startwaarden kom je met het programma op dit nulpunt uit?

## Opgave 4

Hieronder staan instructies om een fractal (de zeef van Sierpinski) te tekenen met je GR.
Zet eerst de assen uit met [2nd] [FORMAT] <axes-off>.

```
PROGRAM:PASFRAC
:ClrDraw
:
:For(N,0,62)
:For(K,0,N/2)
:If fPart((N nCr K)/2)≠0
:Then
```

```
PROGRAM:PASFRAC
:Pxl-On(N,K)
:Pxl-On(N,N-K)
:End
:End:End
:
:
:
```



**Toelichting**:
Om te beginnen maken we het grafisch scherm leeg door [2nd] [draw] <clrdraw>.
Daarna maken we twee **For**-lussen: één voor elke rij uit de driehoek en één voor elk elementje uit die rij. We berekenen dan het getal dat op de plaats (*n*, *k*) hoort in de driehoek door [math] [prb] <nCr> en delen dit door 2. Met [math] [num] <fpart> en [2nd] [test] <6=> gaan we na of het gedeelte na de komma nul is of niet, m.a.w. of het getal even is of niet. Wanneer het oneven is tekenen we het punt dat overeenstemt met (*n*, *k*) d.m.v. [draw] <pxl-on>.
Door afrondingsfouten ontstaan er punten die er niet bij horen.

## 8.2 Programmeren met Excel

Met Excel kan je ook programmeren. Start met Alt-F11 de **Microsoft Visual Basic for Applications** op en voeg een module toe, via **Invoegen** en dan **Module**. Je komt nu in een scherm waar je zelf functies kunt declareren.

**Rij van Fibonacci**
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
Recurrente betrekking:
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

### Voorbeeld

Type in het scherm de volgende tekst:

```
Function Fibo(Number)
  If Number>2 Then
    Fibo=Fibo(Number-1)+Fibo(Number-2)
  Else
    Fibo=1
  End If
End Function
```

Je kunt het scherm afsluiten om terug te keren naar je Excel-blad. Je kunt nu in een cel je eigen functie gebruiken als **=Fibo(…)**.

### Opgave 5

Zet in een Excel blad in kolom A de getallen 1 tot en met 25. Gebruik daartoe =A1+1 in cel A2 en dan doorvoeren naar onderen.

Zet in kolom B =Fibo(A1) in cel B1, dan doorvoeren naar onderen.
Maak zo een lijstje met de eerste 25 Fibonacci-getallen.

### Opgave 6

De recursieformule voor de rij van Fibonacci is een voorbeeld van een impliciete formule.

Er bestaat ook een directe formule voor Fibonacci-getallen: $F(n) = \dfrac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$ met $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

gebruik voor $\sqrt{5}$ nu 5^0.5.

**a.** Definieer in Excel een functie "**Fibotwee(…)**" waarbij je de expliciete formule gebruikt.

**b.** Breidt je lijstje uit de vorige opgave uit met een kolom met de waarden van **Fibotwee**.

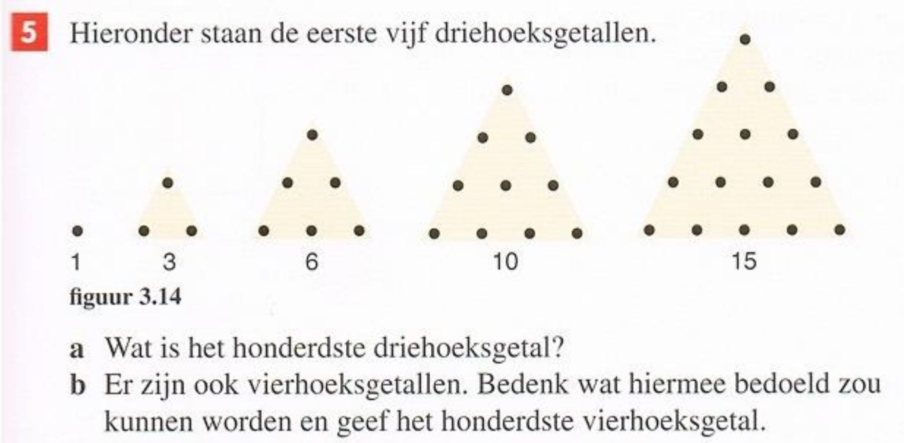
**c.** De kolommen zijn **niet exact** hetzelfde. Ga dat na en geef de relatieve fout bij n=25.
**Aanwijzing:** zet er nog maar 's een kolom naast met "**=ABS(B1-C1)**"

| n= | Fibo | Fibotwee | Fibi-Fibotwee |
|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 0 |
| **2** | 1 | 1 | 0 |
| **3** | 2 | 2 | 0 |
| **4** | 3 | 3 | 4,44E-16 |
| **5** | 5 | 5 | 8,88E-16 |
| **6** | 8 | 8 | 1,78E-15 |

### Opmerking

Recursie op GR en in Excel: Bij opdracht 8 heb je een recursieve 'functie' gedefinieerd. De functie roept zichzelf aan. Bij TI-basic is dat niet mogelijk. Maar in **Visual Basic** kennelijk wel.

In Getal&Ruimte deel 2, blz 121 staat de volgende opdracht: Kun je deze maken?



**5** Hieronder staan de eerste vijf driehoeksgetallen.



**figuur 3.14**

**a** Wat is het honderdste driehoeksgetal?
**b** Er zijn ook vierhoeksgetallen. Bedenk wat hiermee bedoeld zou kunnen worden en geef het honderdste vierhoeksgetal.

## Opgave 7

**Driehoeksgetallen** zijn het eenvoudigste voorbeeld van veelhoekgetallen. Veelhoekgetallen werden door de Grieken al bestudeerd. Ze kunnen als stippenpatronen worden weergegeven. Hierboven zie je het stippenpatroon van de driehoeksgetallen.
De rij van driehoeksgetallen begint zo: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...
De recurrente betrekking luidt: $D_{n+1} = D_n + n \text{ met } D_1 = 1$

**a.** Definieer in Excel de recursieve functie **Driehoeksgetal(…)** die het n-de driehoeksgetal geeft en maak een lijstje van de eerste 25 driehoeksgetallen.

**b.** Zet naast de kolom van driehoeksgetallen ook de som van de driehoeksgetallen. Hiernaast kun je zien hoe je dat doet.

| n | Driehoeksgetallen | Controle |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 4 |
| 3 | 6 | 10 |
| 4 | 10 | 20 |
| 5 | 15 | =D5+B6 |

Je kunt de somrij van de driehoeksgetallen ook definiëren als $S_{n+1} = S_n + D_n \text{ met } S_1 = 1$

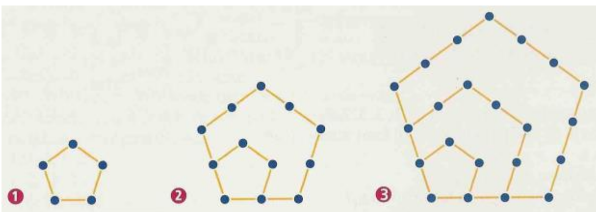
**c.** Definieer in Excel de recursieve functie **SomDG(…)** die de som geeft van de driehoeksgetallen en zet naast de kolom met de ‘som’ van Excel een kolom met de ‘som’ met de gedefinieerde functie **SomDG**.

**d.** Er bestaat ook een **directe** formule voor driehoeksgetallen. Vind die formule. Definieer de functie DG(..) voor driehoeksgetallen de functie **SomDGtwee(…)** voor de som in Excel en zet de uitkomsten in een extra kolom.

**e.** Er zijn driehoeksgetallen die een kwadraat zijn. De rij van wortels van die kwadraten begint zo: $1, 6, 35, 204, 1189, \ldots$
Wat is het volgende getal in deze wortelrij?

## Opgave 8

Dit zijn de vijfhoeksgetallen: 1, 5, 12, 22, 35, …




**a.** Geef het volgende vijfhoeksgetal.

**b.** Je kunt kijken naar de verschilrij van de vijfhoeksgetallen: 1, 4, 7, 10, 13, …
Deze rekenkundige rij laat zich beschrijven als $R_n = 3n - 2$.
De vijfhoeksgetallen zijn de som van deze rekenkundige rij.
Schrijf in Excel een functie **VijfH(n)** die het n-de vijfhoeksgetal geeft.

**c.** Schrijf ook een functie **VijfHS(n)** die de som geeft van de eerste n vijfhoeksgetallen.

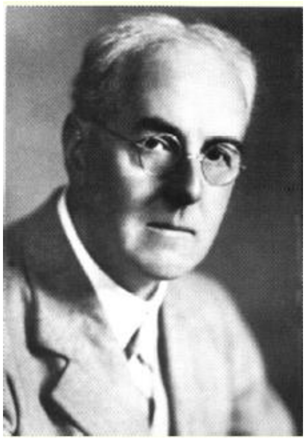
## 8.3 Fractals

### Inleiding: Kustlijnen

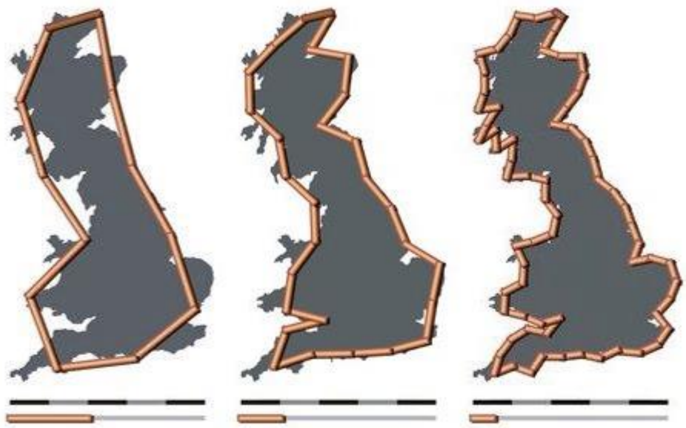
“Benoît B. Mandelbrot (Warschau, 20 november 1924 - Cambridge (Massachusetts), 14 oktober 2010[1]) was een Frans wiskundige van Poolse afkomst. Hij is grotendeels verantwoordelijk voor de huidige interesse in fractals en liet zien dat fractals op een groot aantal verschillende terreinen kunnen worden toegepast, zowel in de wis- als in de natuurkunde. Zijn onderzoek bouwt voort op het werk van Gaston Maurice Julia.”
**http://nl.wikipedia.org**

Op 14 oktober 2010 is Mandelbrot op 85-jarige leeftijd overleden. EOS schreef naar aanleiding van die gebeurtenis:

“Mandelbrot kwam tot fractalen toen hij zich als jonge onderzoeker de vraag stelde hoe lang de kustlijn van Groot-Brittannië is. Het antwoord, zo ontdekte hij, was afhankelijk van hoe dicht je keek. Op een kaart ziet het eiland eruit als een mooi afgebakend geheel, maar hoe meer je inzoomt hoe meer oneffenheden en inhammetjes je ontdekt in de omtreklijn. Die leiden stuk voor stuk tot een langere kustlijn. Op die manier bekeken is de kustlijn oneindig, besloot hij.”
**http://www.eosmagazine.eu**

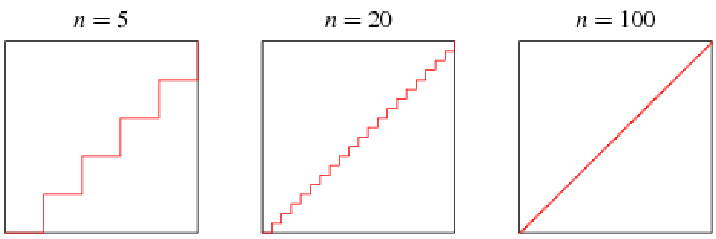


Lewis Fry Richardson
**http://koan.filosofie.be**



### Zelfgelijkvormigheid

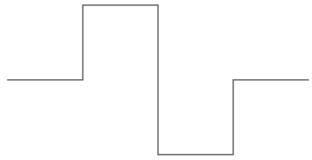
Een mooi voorbeeld van een paradox is de ‘diagonaal paradox’. Neem een vierkant van een zijde van één en benader de lengte van de diagonaal met lijnstukjes die verticaal en horizontaal lopen. Door de lijstukken steeds kleiner te maken gaat die benadering steeds meer op de diagonaal van dat vierkant lijken.



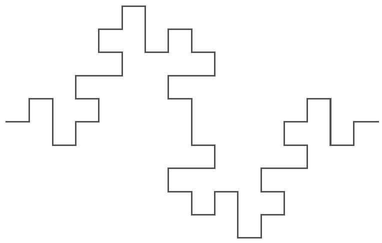

Maar hoe groot je $n$ ook neemt als je je alleen beperkt tot horizontale en verticalen lijnstukken zal de lengte steeds 2 zijn… en niet $\sqrt{2}$.

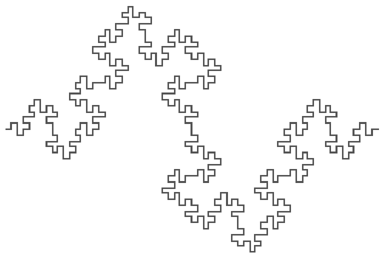
Stel je voor je tekent en lijnstuk maar in plaats van dat lijnstuk teken je er boven en onder een vierkantje bij:





Dat doe je dan ook weer voor de lijnstukken van de nieuwe figuur:

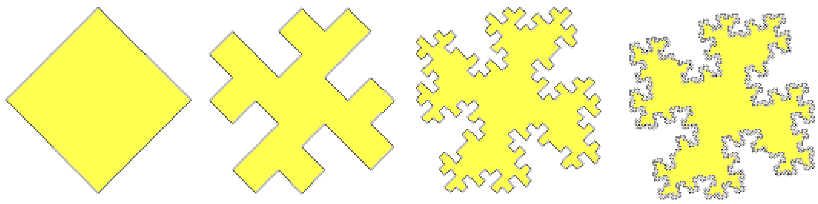




en daar ga je dan mee door tot in het 'oneindige'…
Als je op een dergelijk 'figuur in het oneindige' inzoomt krijg je steeds weer dezelfde vorm weer terug. Men noemt dat **zelfgelijkvormigheid**. Dat lijkt geen probleem, maar dat is het wel.

### Eiland van Minkowski

Neem eens aan dat je dit proces bij de vier zijden van een vierkant met een zijde van 1 doet:



### Opgave 9

**a.** Leg uit dat de oppervlakte van bovenstaande figuren gelijk zijn.

**b.** Bereken de lengte van de omtrek van bovenstaande figuren

**c.** Je ziet hier de figuren voor n van 1 tot en met 4. Wat wordt de omtrek als n naar oneindig gaat? (Leg uit!)

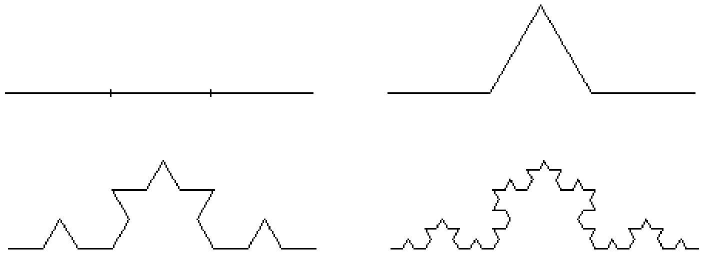
### Probleem!?

We hebben dus een figuur waarvan de oppervlakte gelijk is aan 1 en een omtrek die je zo groot kan maken als je zelf wilt!?
We stellen vast dat bij elke 'slag' de omtrek 2 keer zo groot wordt maar de oppervlakte gelijk blijft. Dat is wel bijzonder.

| **Definitie van (Hausdorf) voor dimensie van een fractal** | **Voorbeeld** |
|---|---|
| Bij een fractal (of andere overdekking) met *N*:aantal kopieën, *s*: schaalverdeling (denk maar aan de kunstlijn) bereken je de dimensie *D* op de volgende manier:<br>$N = s^D \Rightarrow D = \dfrac{\log(N)}{\log(s)}$ | In het voorbeeld (Eiland van Minkowski) hierboven heb je na *n* iteraties $8^n$ lijnstukjes met een lengte van $\left(\frac{1}{4}\right)^n$.<br>$D = \dfrac{\log(8)}{\log(4)} = 1\dfrac{1}{2}$ |

### Opgave 10

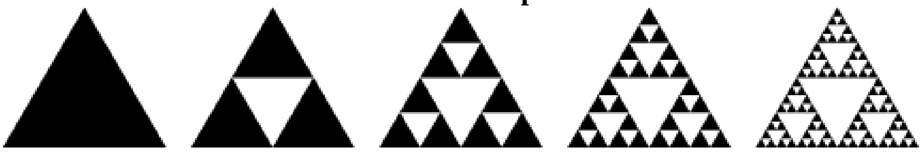
Hieronder staat de start van de kromme van **Von Koch**.



Bereken de dimensie van deze kromme.

### Opgave 11

Hieronder staat de start van de zeef van **Sierpinski**.



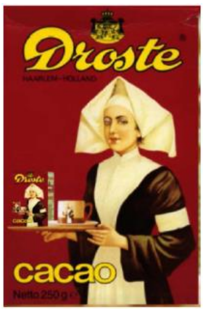
Bereken de dimensie van de zeef.

### Gebroken dimensie

Een lijnstuk heeft dimensie 1, een vierkant een dimensie van 2 en een kubus een dimensie van 3. Maar kennelijk zijn er ook figuren met een gebroken dimensie. De naam ‘fractal’ komt van ‘fractal dimension’, dat is ‘gebroken dimensie’.

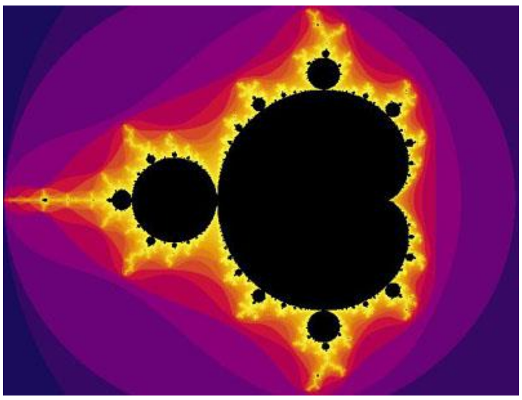
### Het Droste-effect

Een mogelijke ‘omschrijving’ van ‘zelfgelijkvormigheid’ is dat je in een figuur (delen van) transformaties van zichzelf kan vinden. Een bekend voorbeeld is het Droste-effect, genoemd naar de cacao verpakking van Droste, de chocoladefabrikant. Zie de tekening hiernaast.
Op Internet kan je een hele verzameling afbeeldingen vinden waarbij gebruik is gemaakt van de logaritmische transformatie. Zoeken op afbeeldingen met ‘droste effect’.




### Mandelbrot-fractal

Voor het generen van de Mandelbrot-fractal wordt uitgegaan van de functie $f(z) = z^2 + C$ die de punten van het complexe vlak afbeeldt op zichzelf.
De Mandelbrot-verzameling bestaat uit de punten C (in het complexe vlak) waarvoor het iteratieproces $z_{n+1} = z_n^2 + C$ (met $z_0 = 0$) **convergent** is. De rand van het ‘begrendheidsgebied’ is en fractal, de **Mandelbrot-fractal**. Die fractal is een ingewikkelde meetkundige figuur, waarin men een zekere mate van zelfgelijkvormigheid kan aantreffen.
Hiernaast zie je daar een ‘plaatje’ van. De punten die convergeren zijn zwart en de verschillende kleuren duiden verschillende ‘snelheden’ van divergentie aan.

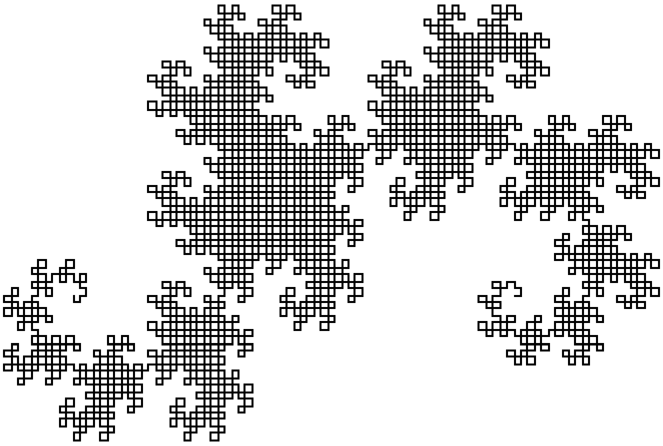


## 8.4 Fractalpracticum

### Opgave 12
Doe het **fractalpracticum**, dit is te vinden op:

**http://www.fractalen.net/html/varia_maken.html**

Probeer eerst de voorbeelden 1 t/m 6 uit, vergeet niet op de pijltjestoets in het witte schermpje te klikken.
Daarna bekijk je op dezelfde manier Koch en Sierpinski.
Ook de Drakenkromme is boeiend.



Meer software om fractals mee te maken kun je vinden op:

**http://home.hccnet.nl/s.f.boukes/fractals/fracware.htm**

Als je het in de klas wilt uitproberen met papier en schaar:

**http://www.kidzlab.nl/content/view/44/41/index.html**

Klik ook naar pagina 2 en 3 van deze site.

Diverse interessante links:

Zie **http://nl.wikipedia.org/wiki/Fractal**
ook **http://www.kennislink.nl/publicaties/fractal-imaginator-gelanceerd**

Je kunt de Mandelbrot-fractal bestuderen op:

**http://www.fractalposter.com/fractal_generator.php**

(Zet de colormap op default, klik op Recalculate)

Ga naar **http://www.epsilon-uitgaven.nl/Z10.php**
voor het epsilon-boekje Fractal met daarin: Hoe lang is de kust van Noorwegen?

Ook interessant is:

**http://www.kennislink.nl/publicaties/4d-fractals-in-3d**
Of **http://www.fractint.org/ftp/current/windows/**

## 8.5 Prententoonstelling (van Escher)

In 1956 voltooide Maurits Cornelis Escher een tekening ‘prententoonstelling’. Hierop is een prententoonstelling afgebeeld waarin een jongeman kijkt naar een prent van een stad. Met een kolkende draaiing is Escher er in geslaagd om de galerij waarin de jongeman staat deel te laten uitmaken van de stad op de prent. In het midden van de draaikolk heeft Escher een wit gat opengelaten met zijn handtekening.

De getaltheoreticus Hendrik Lenstra heeft begin 2000 de wiskundige structuur achter Eschers litho blootgelegd. Zonder dat er in Eschers litho enige herhaling zichtbaar is, blijkt hierbij een Droste-effect op te treden: een afbeelding die zichzelf op kleinere schaal bevat.

Een oneindige herhaling in de beeldende kunst dus.

De wiskundige structuur achter Eschers prent blijkt die van een ‘elliptische kromme’ te zijn. Deze krommen spelen een essentiële rol bij het vinden van priemfactoren van grote getallen, cryptografie en het bewijs van de Laatste Stelling van Fermat.

Zie ook artikel op

**http://www.kennislink.nl/publicaties/gat-in-eschers-prententoonstelling-gevuld**

# Bronvermelding

Uit de boeken die ook op de boekenlijst staan, zijn de volgende paragrafen en verdiepingen gebruikt als basis voor de betreffende hoofdstukken van deze reader.
De teksten zijn zelden compleet overgenomen, maar meestal aangevuld met (andere) voorbeelden en opgaven.

- B3-H2-par 0 (voor Voorkennis H1)
- B3-Blok 1-Verdieping (voor Hoofdstuk 1 en par 2-1)
- B3-H6-par 0 (voor Voorkennis H2)
- B3-Blok 3-Verdieping (voor Hoofdstuk 3)
- B2-Blok 2-Verdieping (voor delen van Hoofdstuk 5)

Daarnaast is ook geput uit de vorige versie van AnalysePlus van Willem van Ravenstein (voor Hoofdstuk 5 en 7).
Bronvermelding verder voor de reader van AnalysePlus, versie 1:

- Numerieke methoden voor technici – Ir.R.Kramer – 4e druk - 1987
- Reader 'Taal van de wiskunde 1' – W.v.Ravenstein - 2010
- wiskundeonline.nl
- math4all.nl
- nl.wikipedia.org
- www.wisfaq.nl
- De grafische rekenmachine deeltijd – Willem van Ravenstein
- www.math.rug.nl/didactiek/werkstuknetwerk
- www.kubrussel.ac.be/wsetew
- www.wiswijzer.nl
- tibasicdev.wikidot.com
- nl.wikipedia.org
- koan.filosofie.be
- mathworld.wolfram.com
- www.pandd.demon.nl