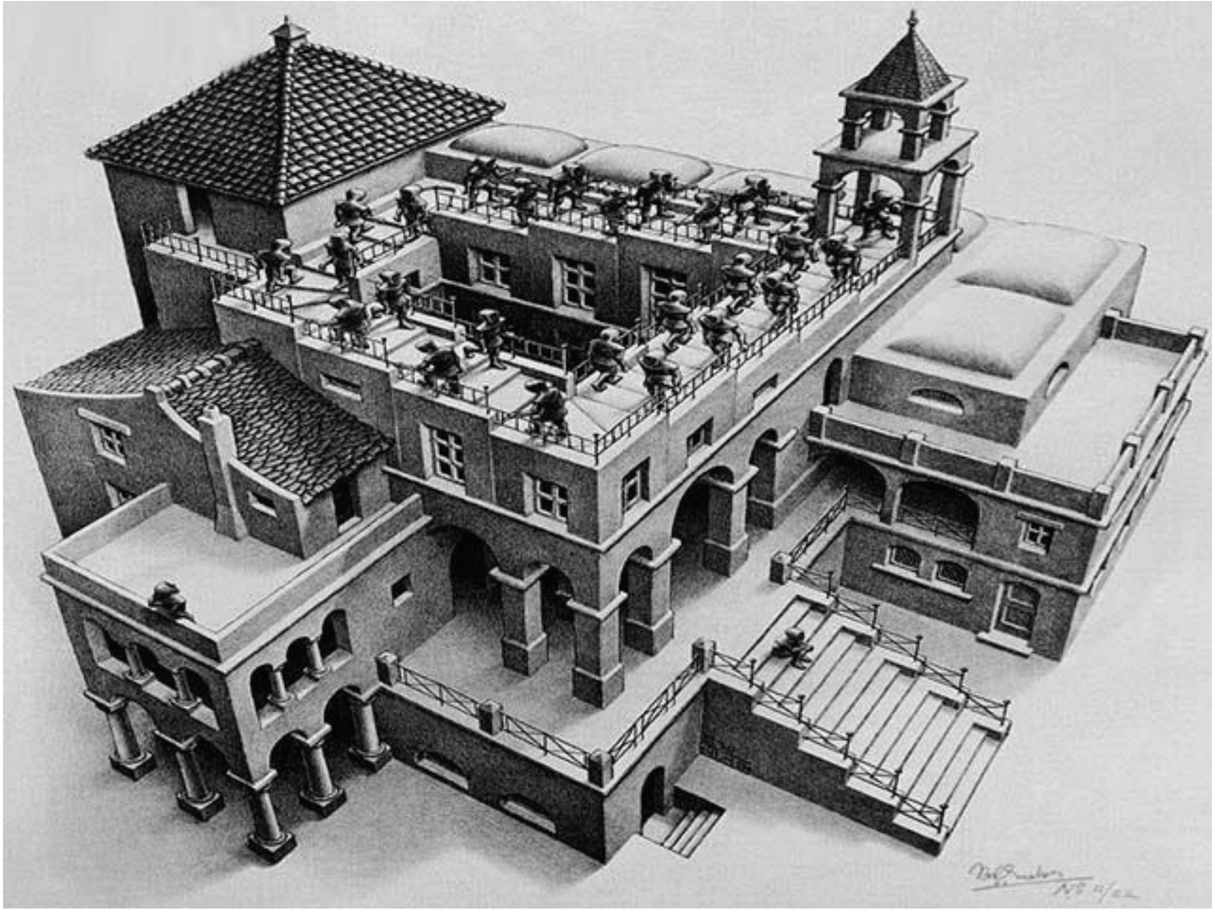
Hoofdstuk 5 Oneigenlijke integralen



Inhoud

5.0 Inleiding.

We bekijken de integraal $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x$.

Als we, zonder ons af te vragen of het eigenlijk mag, de integraal gaan berekenen vinden het volgende antwoord:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_{-1}^{1} = -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} = -\tfrac{2}{3}$$ Het antwoord is negatief.

Dat is vreemd, want de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x^4}$ ligt in zijn geheel boven de x-as en kan dus niet negatief zijn.

Het probleem is dat het integratie-interval niet volledig gedefinieerd is op het domein van f. De grafiek van f bevat namelijk een verticale asymptoot voor $x = 0$. Een discontinuïteit op een integratie-interval is een voorbeeld van een oneigenlijke integraal.

Tot nu toe hebben we integralen $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ berekend, waarbij f een continue functie is op het begrensde interval $[a, b]$. In dit hoofdstuk gaan we kijken naar integralen waarvan het integratie-interval niet begrensd is en/of de integrant discontinu is op het integratie-interval.

5.1 Niet begrensde integratie-intervallen.

In deze paragraaf kijken we naar integralen die geen precieze onder- en/of bovengrens kennen.

We kunnen **drie gevallen** onderscheiden:

1. Een niet-begrensde bovengrens: integratie-interval $= \left[a, \rightarrow\right\rangle$
2. Een niet-begrensde ondergrens: integratie-interval $= \left\langle \leftarrow, b\right]$
3. Een niet-begrensde onder- en bovengrens: integratie-interval $= \mathbb{R}$

In geval 1 berekenen we de integraal $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$

In geval 2 berekenen we de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$

In geval 3 berekenen we de integraal $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \lim_{s\to-\infty}\int_s^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty}\int_c^t f(x)\mathrm{d}x$

waarbij c een willekeurig gekozen getal is. Meestal wordt hier 0 gekozen.

Als de limieten bestaan dan zal de oneigenlijke integraal convergeren naar de limietwaarde (in geval 3 convergeert de integraal naar de som van de limietwaarden). Als een limiet niet bestaat, dan zal de integraal divergeren.

Voorbeeld 1

Bereken, indien mogelijk $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$

Oplossing:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}(-e^{-t} - -1) = 0+1=1$$

Voorbeeld 2

Bereken, indien mogelijk $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

Oplossing:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 (1-x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\left[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(-2\cdot 1 - \left(-2\sqrt{1-t}\right)\right) = \infty$$

De limiet bestaat niet, dus de integraal divergeert.

Sommige limieten zijn niet gemakkelijk te berekenen. Je kunt dan gebruik maken van de insluitstelling of standaardlimieten (zie Analyse: Rijen en limieten).
Je mag zonder bewijs gebruik maken van:

(hierbij zijn a en k constantes)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a}{t^k} = 0 \quad \text{met } k \geq 1$$

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{a} = 1 \quad \text{met } a > 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^k}{a^t} = 0 \quad \text{met } a > 1$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{a}{t}\right)^t = e^a \quad \text{met } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(k)}{t^k} = 0 \quad \text{met } k > 0$$

Opgave 1

Bereken indien mogelijk de volgende integralen.

a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1-x}\,dx$

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

c. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

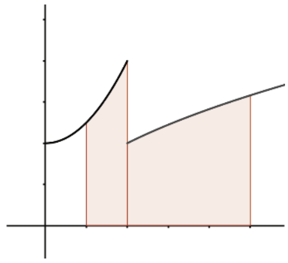
d. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(8)}{2^x}\,dx$

e. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 3^x\,dx$

f. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

5.2 Discontinu op het integratie-interval

Een grafiek kan op een interval $[a,b]$ op twee verschillende manieren discontinu zijn. Er kan zich namelijk een verticale asymptoot op het interval bevinden of een "sprong". In de figuur hiernaast kun je zien dat in geval van een "sprong" je het integratie-interval eenvoudig kunt opdelen. De totale integraal is dan gelijk aan de som van de twee deel-integralen.
We zullen ons daarom alleen beperken tot de integralen waarop zich een asymptoot op het integratie-interval bevindt.



In het geval van de verticale asymptoot kunnen we **vier situaties** onderscheiden.

Situatie 1: De asymptoot bevindt zich in de bovengrens.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{q\uparrow b}\int_a^q f(x)dx$$

Situatie 2: De asymptoot bevindt zich in de ondergrens.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p\downarrow a}\int_p^b f(x)dx$$

Situatie 3: De integrant heeft een asymptoot in zowel de onder- als bovengrens.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p\downarrow a}\int_p^c f(x)dx + \lim_{q\uparrow b}\int_c^q f(x)dx \text{ met } a<c<b$$

Situatie 4: De asymptoot bevindt zich in $x=d$ met $a<d<b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p\uparrow d}\int_a^d f(x)dx + \lim_{q\downarrow d}\int_q^b f(x)dx$$

Als de limieten bestaan dan convergeert de integraal naar de limietwaarde in geval 1 en 2. In de gevallen 3 en 4 convergeert de integraal naar de som van de limietwaarden.

Voorbeeld 1

Bereken, indien mogelijk $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Oplossing

De functie $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ heeft een verticale asymptoot in $x=0$, verder is de functie continu voor positieve waarden van x.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{p\downarrow 0}\int_p^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{p\downarrow 0}\left[2\sqrt{x}\right]_p^1 = \lim_{p\downarrow 0}\left(2-2\sqrt{p}\right)=2$$

Ook bij deze integralen is er een aantal standaardlimieten inzetbaar:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{a}} \quad \text{met } a\in\mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x\downarrow 0}x^a\cdot\ln(x)=0 \quad \text{met } a\in\mathbb{R}, \text{ waarbij } a \text{ een constante voorstelt.}$$

Voorbeeld 2

Bereken, indien mogelijk $\int_0^{e^2}\left(1+\ln(x)\right)\mathrm{d}x$

Oplossing:

$$\int_0^{e^2}\left(1+\ln(x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^{e^2}\mathrm{d}x+\lim_{p\downarrow 0}\int_p^{e^2}\ln(x)\mathrm{d}x=\left[x\right]_0^{e^2}+\lim_{p\downarrow 0}\left(\left[x\ln(x)\right]_p^{e^2}-\int_p^{e^2}x\cdot\tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\left[x\right]_0^{e^2}-\lim_{p\downarrow 0}\left[x\ln(x)\right]_p^{e^2}-\left[x\right]_0^{e^2}=\lim_{p\downarrow 0}\left(e^2\ln(e^2)-p\ln(p)\right)=2e^2-0=2e^2$$

Voorbeeld 3

We bereken nogmaals de integraal uit de inleiding: $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

Oplossing:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x=\lim_{p\uparrow 0}\int_{-1}^{p}\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x+\lim_{q\downarrow 0}\int_{q}^{1}\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x=\lim_{p\uparrow 0}\left[-\tfrac{1}{3}x^{-3}\right]_{-1}^{q}+\lim_{q\downarrow 0}\left[-\tfrac{1}{3}x^{-3}\right]_q^1$$

$$=\lim_{p\uparrow 0}\left(-\frac{1}{3p^3}-+\tfrac{1}{3}\right)+\lim_{q\uparrow 0}\left(-\tfrac{1}{3}-\frac{1}{3q^3}\right)=\infty+\infty \quad \text{(merk op dat } p \text{ negatief is)}$$

De integraal divergeert.

Opgave 2

Bereken, indien mogelijk de volgende integralen

a. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{4-x}\,\mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

d. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

e. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

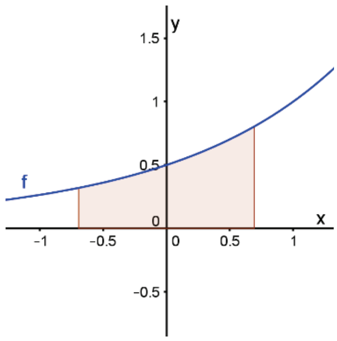
f. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

g. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

h. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-3x}}{1-3x}\,\mathrm{d}x$

Opgave 3

Beschouw de functie $f(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$. Zie ook de grafiek hiernaast.



We gaan de oppervlakte onder de grafiek van f berekenen op het interval $\left[-\ln(2),\ln(2)\right]$.

a. Deel eerst de gebroken functie uit en herschrijf $f(x)$.

b. Bereken $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ door slechts 1 maal gebruik te maken van partiele integratie. Kijk goed naar de integraal die je overhoudt.

c. Gebruik het resultaat van **b** om de gevraagde oppervlakte exact te berekenen.

d. Waarom vind je hetzelfde antwoord als je geen limiet gebruikt?

5.3 Gemengde opgaven

Bij de volgende opgaven worden de verschillende technieken door elkaar gevraagd.

Opgave 4

Primitiveer de volgende functies:

a. $f(x) = \tan(3x)$

b. $g(x) = \dfrac{36-3x}{x^2-16}$

c. $h(x) = \ln(5-x)$

d. $k(x) = \dfrac{\ln^2(5-x)}{x-5}$

e. $l(x) = x^2 e^{4x}$

f. $m(x) = \dfrac{8}{\sqrt{9-(3x+5)^2}}$

g. $n(x) = \dfrac{3\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

h. $p(x) = e^{\sqrt{\cos x}}\sin x$ (tip: gebruik 2 maal substitutie en dan partieel)

Opgave 5

Bereken exact, indien mogelijk.

a. $\int_0^3 x^2\sqrt{x^3+9}\,dx$

b. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

c. $\int_{\sqrt{e}}^{e} x^2\ln(x)\,dx$

d. $\int_0^2 \dfrac{1}{1-x^2}\,dx$

e. $\int_2^{2\frac{1}{2}} \dfrac{5x-13}{x^2-5x+6}\,dx$

f. $\int_0^1 \left(\dfrac{\tan^2 x}{x} - \dfrac{\tan x}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right)dx$ tip: Gebruik opgave 3