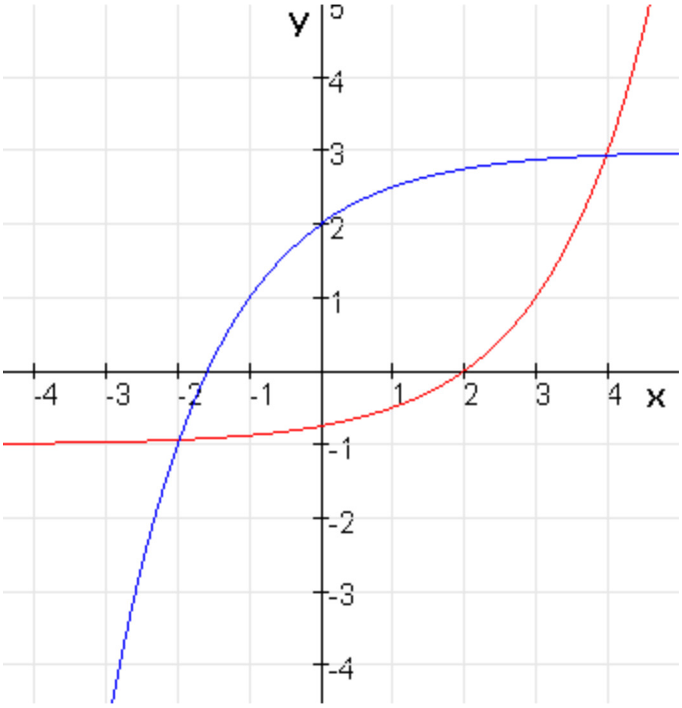
Transformaties van grafieken
HAVO wiskunde B
deel 1



Willem van Ravenstein
500765005
Haags Montessori Lyceum

Inleiding

In de leerroute **transformaties van grafieken** gaat het om de karakteristieke eigenschappen van standaardfuncties. De kennis en vaardigheden omtrent de eigenschappen van functies en grafieken is belangrijk voor het tekenen van grafieken, herkennen van verbanden, het opstellen van formules en het oplossen van vergelijkingen.

In deze leerroute leer je naast die karakteristieke eigenschappen van standaardfuncties ook hoe je grafieken kunt transformeren en hoe je daarbij formules kunt maken en hoe je aan een formule kan zien welke transformaties op de standaardfunctie zouden kunnen zijn toegepast.

Het gaat daarbij om de volgende standaardfuncties:

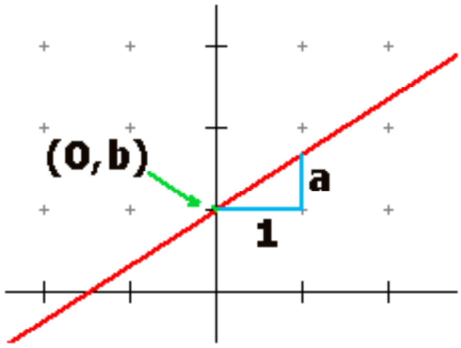
- ✔ lineaire of eerstegraadsfunctie
- ✔ kwadratische of tweedegraadsfunctie
- ✔ machtsfunctie
- ✔ exponentiële en logaritmische functie
- ✔ goniometrische functie
- ✔ gebroken lineaire functie
- ✔ wortelfunctie

Succes!

Willem

Lineaire of eerstegraadsfunctie

Voorkennis



- **Lineaire formules:** grafieken tekenen
- **Formuler opstellen:** formule van een lijn opstellen, evenwijdige lijnen
- **Lineaire vergelijkingen**: vergelijkingen oplossen, snijpunten van grafieken
- **lineaire functies:** origineel en beeld, notatie met haakje, f(x)=ax+b
- **snijpunten**: snijpunten met de x- of y-s, snijpunten van grafieken

Opgave 1

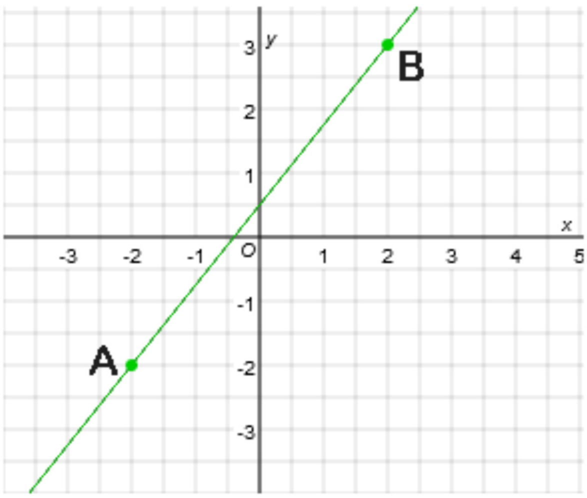
a. De lijn k gaat door de punten $(-2,1)$ en $(3,3)$. Geef een formule voor de lijn k.
b. Gegeven is de functie: $f(x) = 3x - 4$. Geef de coördinaten van de snijpunten met de x- en y-as.
c. Gegeven zijn twee functies: $f(x) = -2x + 3$ en $g(x) = 3x - 1$. Bereken de coördinaten van het snijpunt.

Formule van een lijn door twee punten

Als een lijn door A en B gaat dan kan je op deze manier op deze manier opstellen:

- $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- $f(x) = a(x - x_A) + y_A$

Voorbeeld



- $a = \dfrac{3 - -2}{2 - -2} = \dfrac{5}{4} = 1\dfrac{1}{4}$
- $f(x) = 1\dfrac{1}{4}(x + 2) - 2$

Toelichting

- ✔ In de formule is a de richtingscoëfficient.
- ✔ In de formule hebben we in het stuk na de richtingscoëffiënt de coördinaten van A ingevuld. Dat moet niet, je had ook de coördinaten van B kunnen gebruiken:
  $f(x) = a(x - x_B) + y_B$

Opgave 2

- ✔ Laat zien dat je bij bovenstaand voorbeeld dezelfde formule krijgt als je de coördinaten van B invult in het tweede deel van de formule.

Opgave 3

De lijn k gaat door het punt $A(5, -2)$ en heeft als richtingscoëfficiënt $a = -\frac{2}{3}$.

- ✔ Leg uit dat dit een vergelijking is voor k: $y = -\frac{2}{3}(x - 5) - 2$

Opdracht

Ga naar DWO, log in en maak bij de **functies raden** de module **formules bij rechte lijnen (2)**. Zie eventueel wiskundeleraar.nl bij de hulpmiddelen voor een link of typ http://www.dwo.nl in je browser.

- ✔ Gebruik daarbij de methode zoals deze hierboven staat beschreven.

Kwadratische of tweedegraadsfunctie

De grafiek van de functie $y = a(x - p)^2 + q$ is een parabool met het punt (p, q) als top. We noemen dat de **topformule**. Je kunt daarmee snel zien wat de top is.

Opgave 4

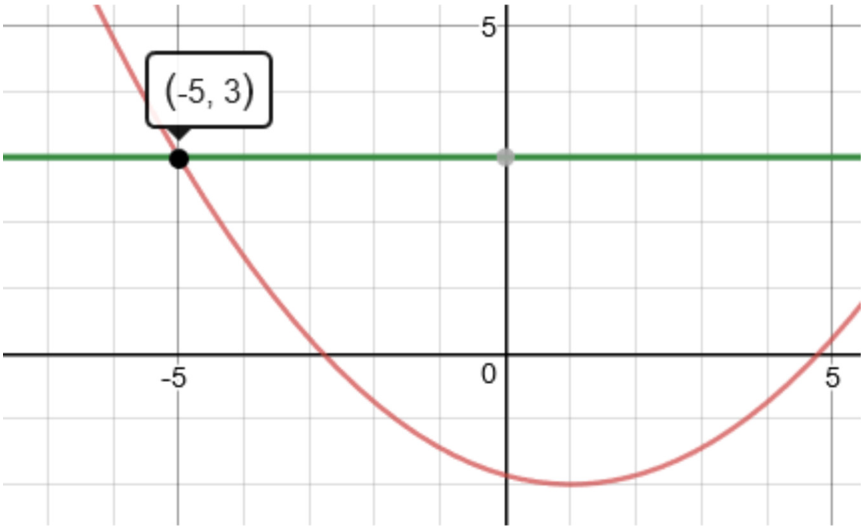
Geef van coördinaten van de top van:

a. $y = 2(x - 4)^2 + 4$
b. $y = -(x + 3)^2 - 11$
c. $y = -\frac{2}{3}(x + 1\frac{1}{2})^2 + 2\frac{3}{4}$
d. $y = x^2 + 3$
e. $y = (x + 7)^2$

Opgave 5

Start het **online grafiekenprogramma** op.
Je kunt een link vinden naar het programma op wiskundeleraar.nl bij de hulmiddelen of type https://www.desmos.com/calculator in de adresbalk van je browser.

✔ Als je in het grafiekenprogramma de functie $p : y = a(x - 1)^2 - 2$ invult dan kan je met een schuifbalkje de waarde van a veranderen.



a. Wat is de top van p?
b. Onderzoek de betekenis van a voor de grafiek.
c. Wat is de (exacte) waarde van a als de grafiek door het punt $(-5, 3)$ gaat?
d. Neem $a = \frac{1}{5}$. Bepaal met het grafiekenprogramma voor welke waarde(n) van x geldt: $y = 3$? Kan je dat ook berekenen? Wat moet je dan doen? Bereken de snijpunten van p met de lijn $y = 3$.

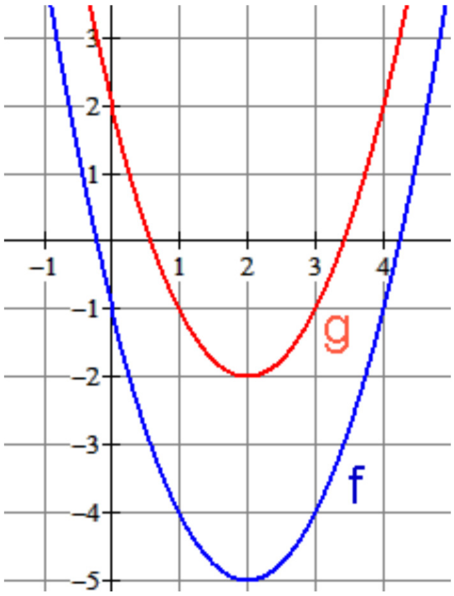
Translatie

Verticaal verschuiven

Je kunt de grafiek van een functie **verticaal verschuiven** door bij het functievoorschrift een getal op te tellen of af trekken.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = x^2 - 4x - 1$. Als je nu 3 optelt bij f dan krijg je $g(x) = x^2 - 4x + 2$. In de tekening zie je dat je f drie omhoog moet verschuiven om g te krijgen.

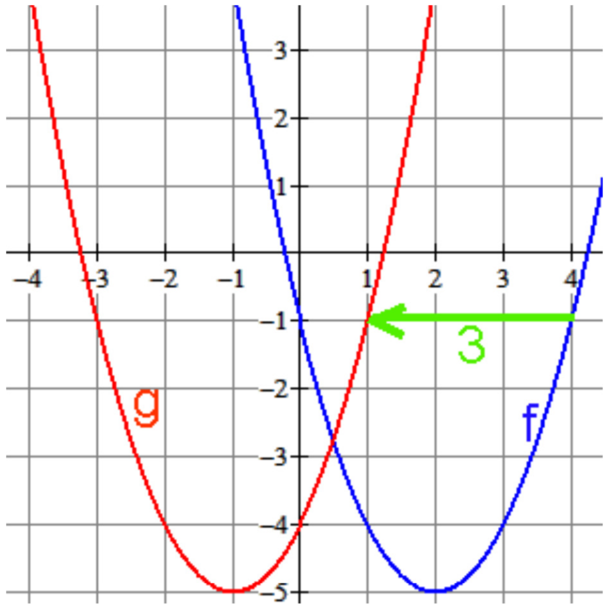


Horizontaal verschuiven

Als je de grafiek van een functie naar links of rechts wilt verschuiven dan verander je in het functievoorschrift de variabele x door $x - p$. De grafiek verschuift dan p naar **rechts**.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = x^2 - 4x - 1$. Als je nu in het functievoorschrift van f de variabele x vervangt door $x + 3$ dan schuift de grafiek 3 naar links.



Je krijgt:

- ✔ $g(x) = (x+3)^2 - 4(x+3) - 1$
- ✔ $g(x) = x^2 + 6x + 9 - 4x - 12 - 1$
- ✔ $g(x) = x^2 + 2x - 4$

Translatie over een vector

Je kunt een translatie (verschuiving) met een vector (p, q) aangeven. Hierbij is p de horizontale verplaatsing en q de verticale verplaatsing.

Vraag 6

- ✔ Ga met het grafiekenprogramma na dat als je de parabool $y = x^2$ transleert over de vector $(3, -1)$ je de functie $y = (x-3)^2 - 1$ krijgt.

Vraag 7

Gegeven is de parabool $p : y = x^2 - 4x + 2$.

- ✔ Over welke vector moet je transleren om de parabool $q : y = x^2 + 6x + 5$ te krijgen?
- ✔ Kan je dat ook berekenen?

Vraaag 8

Je transleert de parabool $p : y = -x^2 + 5x + 5$ over de vector $(-2, 6)$. Je krijgt dan de parabool g.

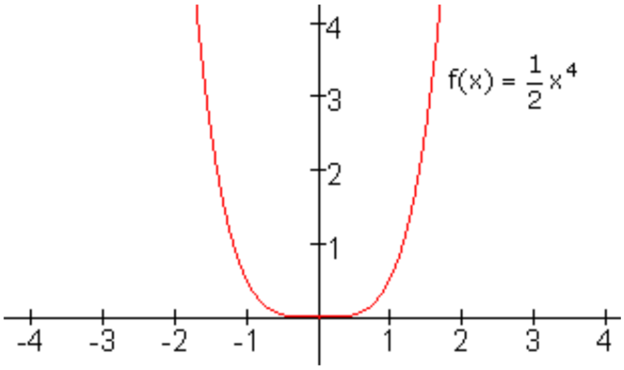
- ✔ Geef een mogelijk functievoorschrift van g. Schrijf je functievoorschrift in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

Machtsfunctie

Een machtsfunctie f heeft de vorm:

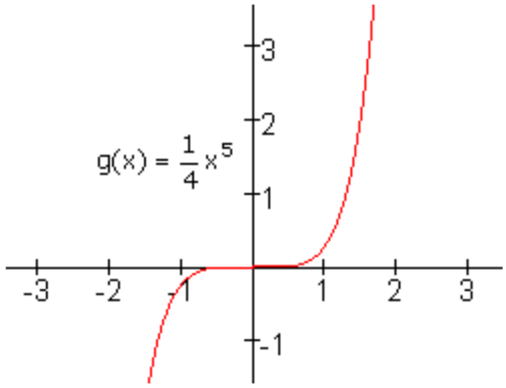
- ✔ $f(x) = ax^n$

<table>
<tr><th>Grafieken van machtsfuncties</th><th>Grafieken van machtsfuncties</th></tr>
<tr><td>



✔ Als n **even** is dan is de grafiek symmetrisch met de y-as als symmetrie-as.

</td><td>



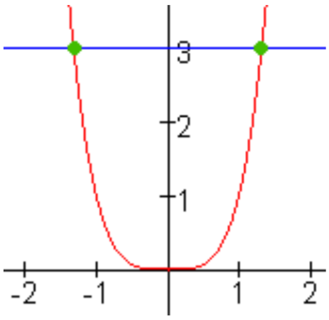
✔ Als n **oneven** is dan is de grafiek puntsymmetrisch met O(0,0) als punt van symmetrie.

</td></tr>
</table>

Grafieken en aantal oplossingen

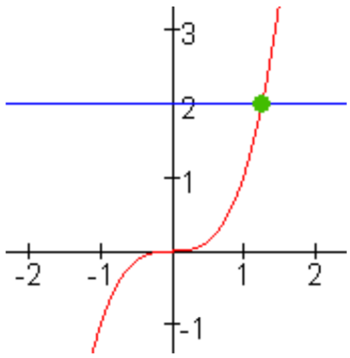
Als je kijkt naar vergelijkingen van de vorm $x^n = a$ dan kan je op basis van de grafiek van een machtsfunctie besluiten of je geen, één of twee oplossingen hebt.

<table>
<tr><th>n is even
a>0</th><th>n is oneven
a>0</th></tr>
<tr><td>



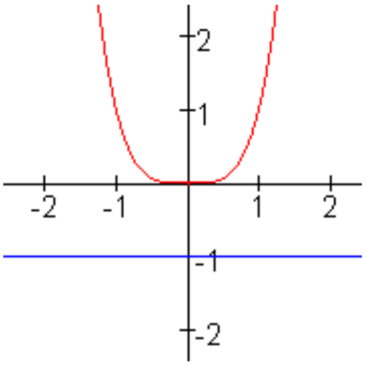
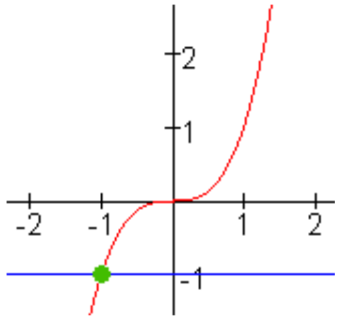
2 oplossingen

</td><td>



1 oplossing

</td></tr>
</table>

n is even a<0	n is oneven a<0
 geen oplossing	 1 oplossing

Voorbeelden

$x^6 = 80$ $x = \sqrt[6]{80} \vee x = -\sqrt[6]{80}$ $x \approx 2,08 \vee x \approx -2,08$	$2x^7 = 20$ $x^7 = 10$ $x = \sqrt[7]{10} \approx 1,39$	$4x^{10} + 10 = 6$ $4x^{10} = -4$ $x^{10} = -1$ geen oplossing	$\frac{2}{3}x^3 = -2$ $x^3 = -6$ $x = \sqrt[3]{-6} \approx -1,82$

Opgave 9

Los **exact** op:

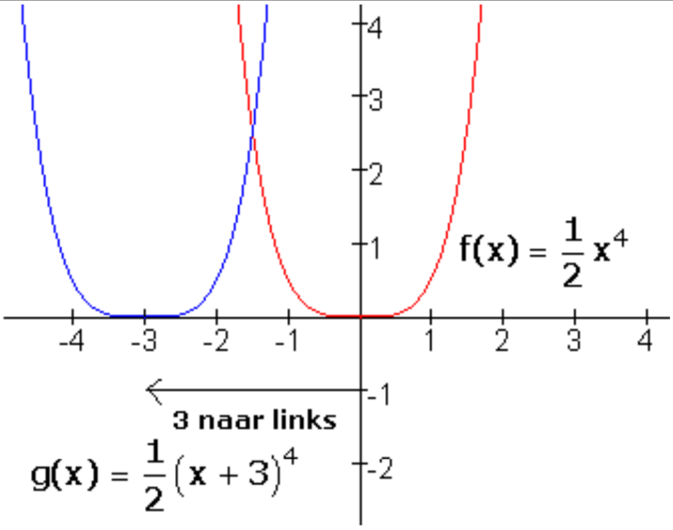
a. $4x^4 = 20$
b. $4x^5 - 20 = 0$
c. $x^6 = \pi$
d. $32x^6 + 19 = 1$

Transformaties van machtsfuncties

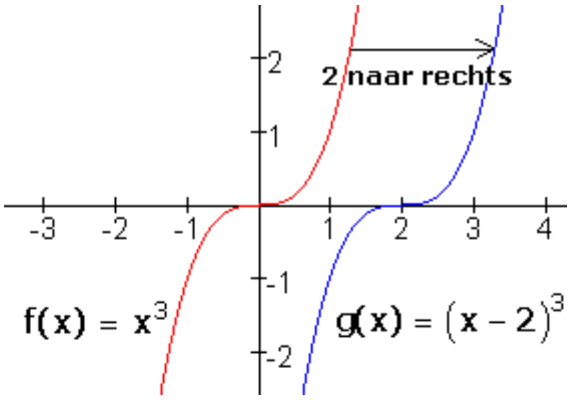
Je kunt op grafieken allerlei transformaties uitvoeren:

- ✔ naar links of rechts verschuiven
- ✔ naar onderen of naar boven verschuiven
- ✔ vermenigvuldigen met een factor ten opzichte van de x-as.

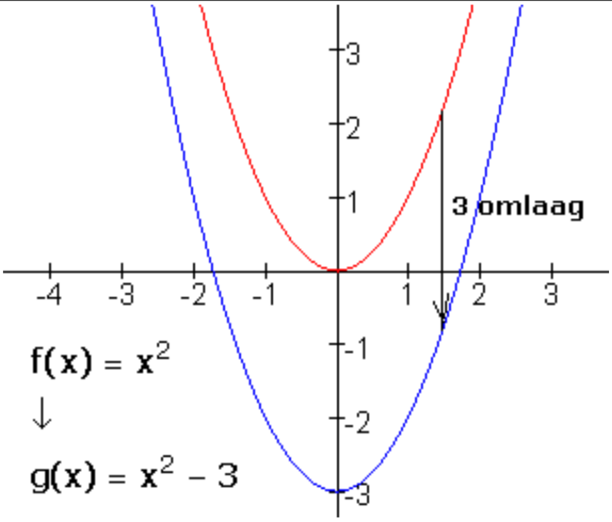
Op de volgende bladzijde zie je daar voorbeelden van.



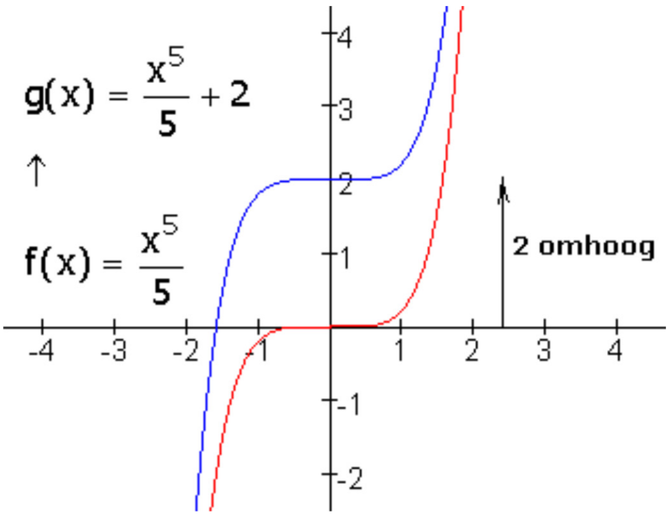
3 naar links verschuiven
vervang 'x' door 'x+3'



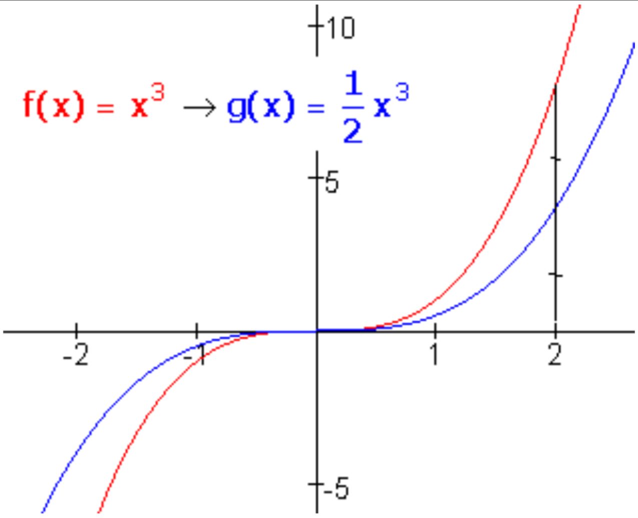
2 naar rechts verschuiven
vervang 'x' door 'x-2'



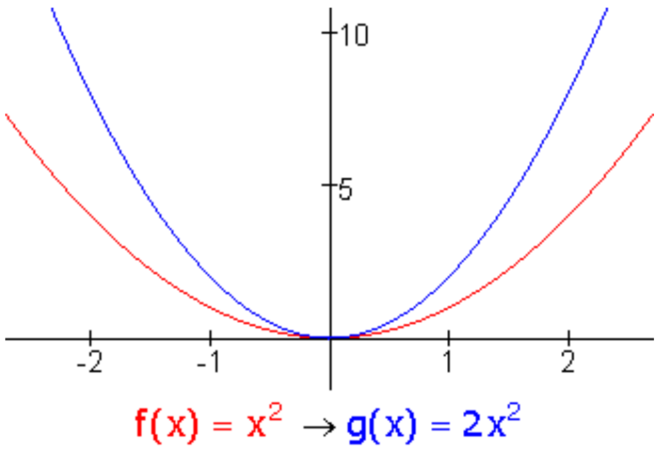
3 omlaag verschuiven
trek er 3 van af



2 omhoog verschuiven
tel er 2 bij op



vermenigvuldigen met een factor $\frac{1}{2}$
alles wordt de helft



vermenigvuldigen met een factor 2
alles wordt 2 keer zo groot

Opdracht

- ✔ Start het **online grafiekenprogramma** op.
  Je kunt een link vinden naar het programma op wiskundeleraar.nl bij de hulmiddelen of type https://www.desmos.com/calculator in de adresbalk van je browser.

Opgave 10

- ✔ Welke transformaties moet je toepassen op $y = x^4$ om de functie $y = -2(x+3)^4 + 5$ te krijgen?
  Controleer je antwoord met het grafiekenprogramma

Opgave 11

Je past achtereenvolgens de volgende transformatie toe op $y = x^5$ om de functie g te krijgen:

translatie over de vector $(2, 0)$
vermenigvuldigen met de factor $\frac{1}{2}$ t.o.v. de x-as
translatie over vector $(0, -3)$

- ✔ Geef een functievoorschrift van g.
  Controleer je antwoord met het grafiekenprogramma

Opgave 12

- ✔ Onderzoek of de volgorde van de transformaties bij **opgave 11** van belang is.

Exponentiële functie

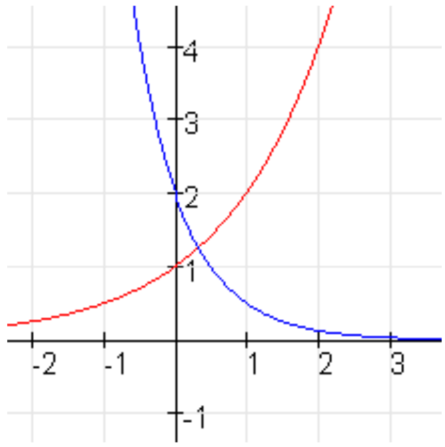
Een functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ met g constant en $g > 0$ is een **exponentiële functie**. We noemen g de groeifactor. De variabele x staat in de exponent.

De grafiek van f is stijgend als $g > 1$ en de grafiek is dalend in het geval $0 < g < 1$.

De x-as is een **asymptoot**.

- ✔ $D_f = R$
- ✔ $B_f =\langle 0, \rightarrow \rangle$

De functie $f(x) = g^x$ is een standaardfunctie en de grafiek is een standaardgrafiek.



$f(x) = 4 \cdot 2^{x-2}$
$g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

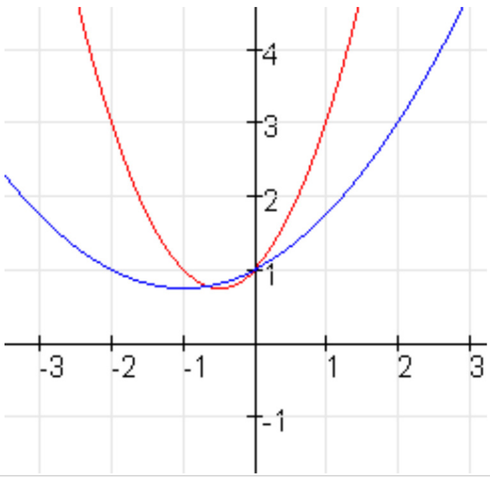
Opgave 13

- ✔ Geef aan met welke transformaties $f(x) = 4 \cdot 2^{x-1} - 3$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 2^x$.

Vermenigvuldigen t.o.v. de y-as

Vermenigvuldigen met een factor t.o.v. y-as

Vervang 'x' door '$\frac{1}{a}$x' als je wilt vermenigvuldigen met de factor 'a' t.o.v. de y-as.



Voorbeeld 1

Als je $f(x) = x^2 + x + 1$ bijvoorbeeld wilt vermenigvuldigen met de factor 2 t.o.v. de y-as dan krijg je:

$f(x) = (\frac{1}{2}x)^2 + \frac{1}{2}x + 1$
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

Voorbeeld 2

Geef het domein, bereik en eventuele asymptoten van:

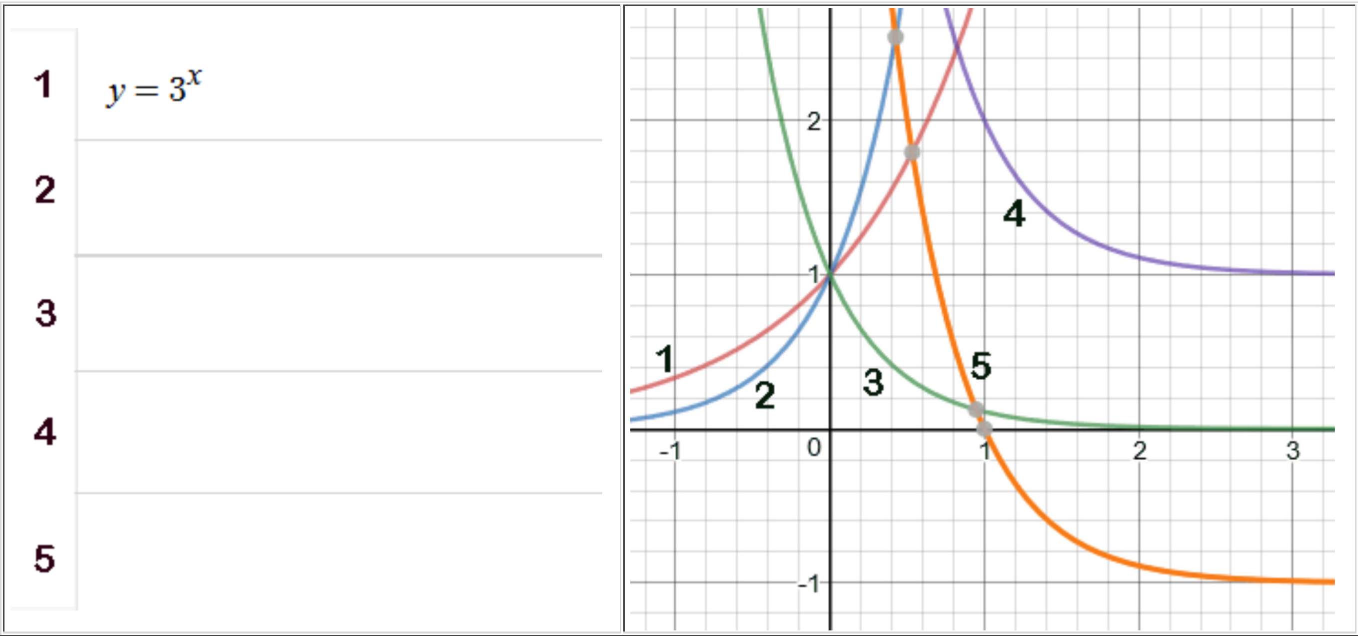
✔ $g(x) = 3^{4(x-2)} + 5$

Uitwerking

$y = 3^x$	standaardfunctie	domein: R bereik: y>0 asymptoot: x=0
$y = 3^{4x}$	vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{4}$ t.o.v. de y-as	domein: R bereik: y>0 asymptoot: x=0
$y = 3^{4(x-2)}$	2 naar rechts	domein: R bereik: y>0 asymptoot: x=0
$y = 3^{4(x-2)} + 5$	5 omhoog	domein: R bereik: y>5 asymptoot: x=5

Opgave 14

Je ziet hier een schermafdruk uit het grafiekenprogramma. Het zijn een serie transformaties van $f(x) = 3^x$. Links moeten de functievoorschriften staan van de grafieken aan de rechter kant.



✔ Bedenk steeds welke transformatie je moet uitvoeren en geef het functievoorschrift.

Logaritmische functie

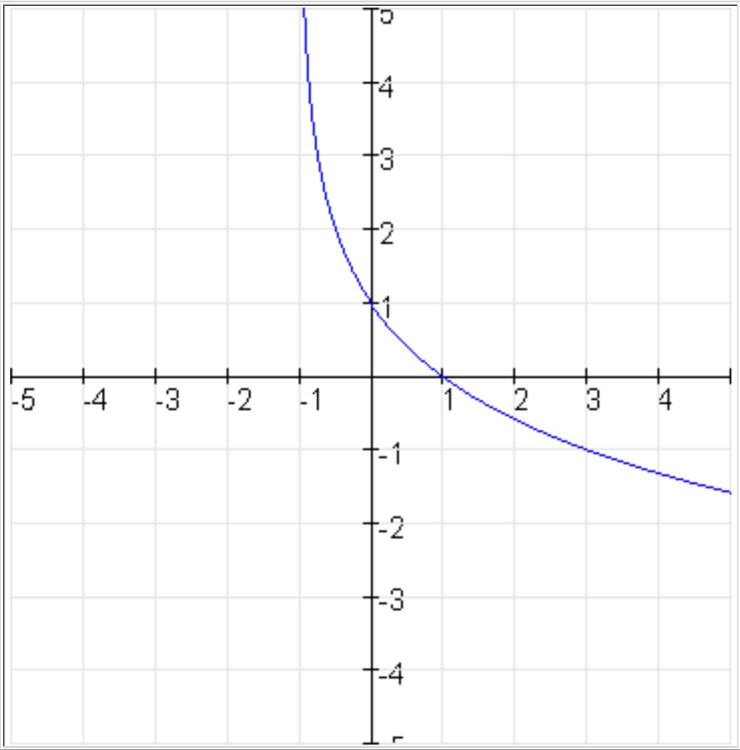
Welke transformaties heb je nodig om van de standaardfunctie $f(x) = {}^{2}log(x)$ te komen tot $f(x) = 2 - {}^{2}log(2x + 2)$?

$f(x) = {}^{2}log(x)$
2 naar links
$f(x) = {}^{2}log(x + 2)$

$f(x) = {}^{2}log(x + 2)$
verm. met een factor $\frac{1}{2}$ t.o.v. de y-as
$f(x) ={}^{2} log(2x + 2)$

$f(x) = {}^{2}log(2x + 2)$
spiegelen in de x-as
$f(x) = -{}^{2}log(2x + 2)$

$f(x) = -{}^{2}log(2x + 2)$
2 omhoog
$2 - {}^{2}log(2x + 2)$



Opgave 15

Vul in:

$y = {}^{2}log(x)$	standaardfunctie	domein: bereik: asymptoot:
...	vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$ t.o.v. de y-as	domein: bereik: asymptoot:
...	3 naar rechts	domein: bereik: asymptoot:
...	4 omhoog	domein: bereik: asymptoot:

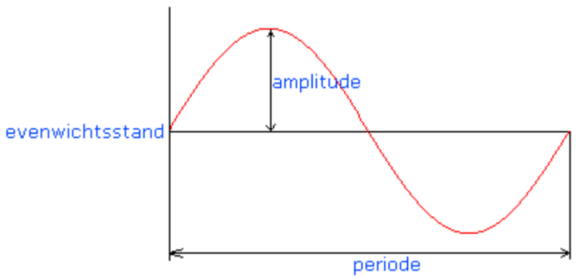
Opgave 16

Gebruik de online rekenmachine of je grafische rekenmachine.

- ✔ Teken de grafiek van $f(x) = 2 \cdot {}^{2}log(x)$ en $g(x) = {}^{2}log(x^2)$. De grafieken van f en g lijken op elkaar maar er is een belangrijk verschil. Wat is het verschil? Leg uit.

Goniometrische functie

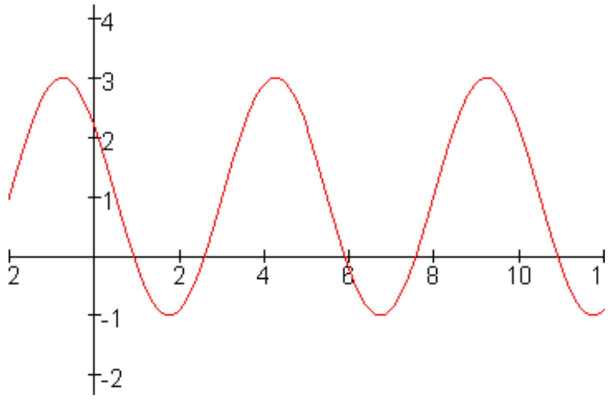
Periodieke verbanden



Kenmerken van een periodiek verband:

- **evenwichtsstand**
  (hoogste stand + laagste stand)/2
- **periode**
  de kortste tijd die het duurt tot herhaling optreedt
- **amplitude**
  hoogste stand-evenwichtsstand

Voorbeeld



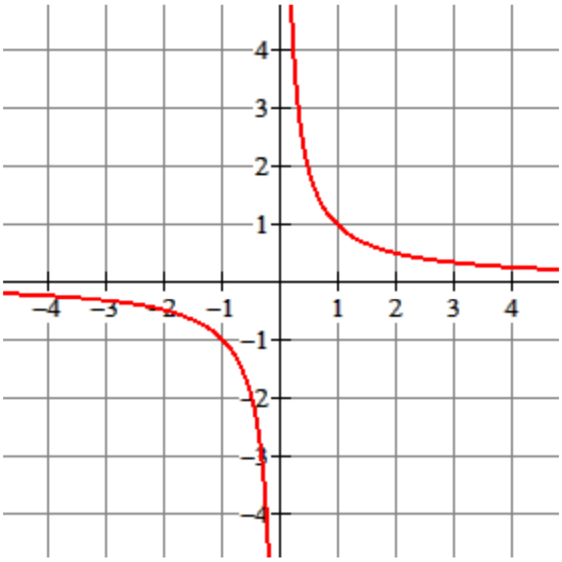
- Lees de periode, de evenwichtsstand en amplitude af

Antwoorden

- De evenwichtsstand is 1
- De periode is 5
- De amplitude is 2

In **deel 2** van de leerroute **Transformaties van grafieken** komen de goniometrische functies en de transformaties van de grafieken van de goniometrische functies uitgebreid aan bod.

- **Transformaties van grafieken deel 2**

Gebroken functie	**Asymptoten**
n een **gebroken functie** komt de variabele in de noemer van een breuk voor. De eenvoudigste gebroken functie is $f(x) = \frac{1}{x}$. De functie is een **standaardfunctie**. De grafiek van deze functie is een **standaardgrafiek** en heet **hyperbool**.  De grafiek bestaat uit twee losse delen. Deze heten de **takken van de hyperbool**.	Als je bij $f(x) = \frac{1}{x}$ voor x een steeds groter getal neemt dan wordt de functiewaarde steeds kleiner. De functiewaarde komt steeds dichter bij y=0 te liggen. De x-as (de lijn y=0) is de **horizontale asymptoot** van de grafiek van f. Als je voor x getallen neemt die steeds dichter bij 0 liggen dan wordt de functiewaarde steeds groter (of kleiner van de andere kant). De y-as (de lijn x=0) is de **verticale asymptoot** van de grafiek van f. ✔ Een asymptoot is een lijn waarmee de grafiek op den duur vrijwel samenvalt. **Algemene formule voor een lineaire gebroken functie** ✔ $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ **Asymptoten** ✔ Horizontale asymtoot: $y = 2$ ✔ Verticale asymtoot: $x = c$ De waarde van b kan je vinden door een punt van de grafiek in te vullen. Neem een handig punt...:-)

Opgave 17

Gegeven: $f(x) = 2 + \frac{8}{x+3}$ en $g(x) = 2x + 2$.

- ✔ Bereken de coördinaten van de snijpunten van f en g.

Opgave 18

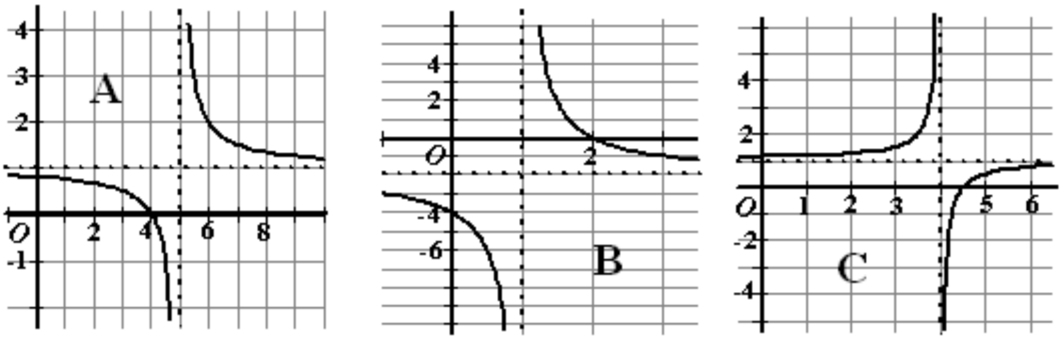
De grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ gaat over in de grafiek van $g(x) = 2 + \frac{8}{x+3}$.

- ✔ Via welke transformaties is dat mogelijk?

Opgave 19

Gebruik (eventueel) de online rekenmachine of je grafische rekenmachine.

- ✔ Geef mogelijke formules die horen bij de volgende grafieken:



http://www.hhofstede.nl

Opgave 20

Gegeven: $f(x) = \dfrac{2}{x-3} + 4$. Voer de volgende transformaties uit:

- ✔ Vermenigvuldig met de factor 2 t.o.v. de y-as
- ✔ Verschuif de grafiek 3 naar links
- ✔ Vermenigvuldig met de factor $\frac{1}{2}$ t.o.v. de x-as

Geef een formule voor het eindresultaat

Wortelfunctie

De wortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$ is een bijzonder geval van de machtsfunctie.

Voorbeeld 1

Gegeven: $y = 2\sqrt{x-4} + 5$

- ✔ Bepaal het domein en bereik

Aanpak:

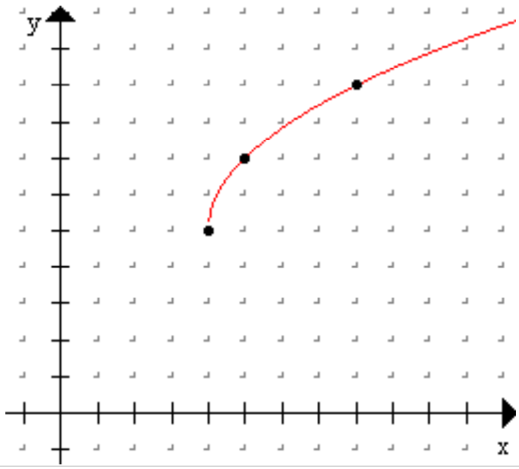
- ✔ Het **startpunt** is $(4, 5)$
- ✔ De grafiek gaat naar **rechts**
- ✔ De grafiek gaat **omhoog**

Conclusie:

- ✔ $D_f = [4, \rightarrow\rangle$
- ✔ $B_f = [5, \rightarrow\rangle$

Uitwerking

Het beginpunt is (4,5). Je kunt bedenken dat (5,7) een punt is van de grafiek. Het punt (8,9) is ook een punt van de grafiek...
Zie je dat?



Voorbeeld 2

Gegeven: $y = 2 - 3\sqrt{4-2x}$

- ✔ Bepaal het domein en bereik

Aanpak

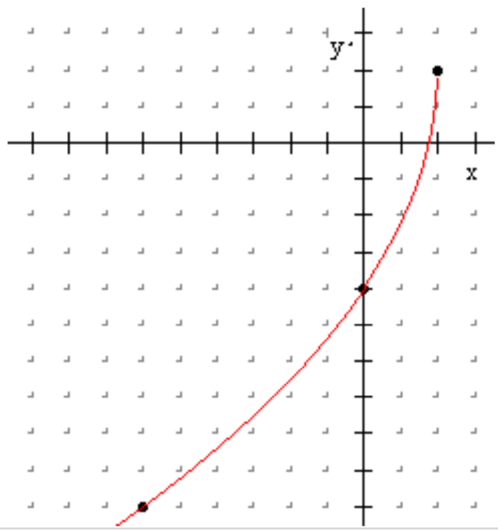
- ✔ Het startpunt is $(2, 2)$
- ✔ De grafiek gaat naar **links**
- ✔ De grafiek gaat **omlaag**

Conclusie:

- ✔ $D_f = \langle \leftarrow, 2]$
- ✔ $B_f = \langle \leftarrow, 2]$

Uitwerking

Het beginpunt is (2,2). Het punt (0,-4) ligt op de grafiek. Wat dacht je van (-6,-10)?



Conclusie

In de praktijk komt het domein en bereik bepalen van een wortelfunctie neer op:

- ✔ Bepaal het **startpunt**.
- ✔ Loopt de grafiek naar **links** of naar **rechts**?
- ✔ Loopt de grafiek **omhoog** of **omlaag**?

Als je dat weet dan weet je hoe 't zit...

Opgave 21 Gegeven: $f(x) = -2\sqrt{-x-1} + 3$. ✔ Bepaal het domein en het bereik.	**Opgave 22** De grafieken $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = 2\sqrt{x-3}$ snijden elkaar in A. ✔ Bereken de coördinaten van A.
Opgave 23 Los **exact** op: a. $3x - 5\sqrt{x} - 2 = 0$ b. $x - 4\sqrt{x} + 2 = 0$ c. $6x + \sqrt{x} = 7x - 20$	**Opgave 24** Gegeven: $K = 4 + \sqrt{3p + 1)}$ ✔ Druk p uit in K.

Inverse functies

Neem aan dat je een functie hebt met als functievoorschrift $f(x) = 2^{3x-8}$. Je kunt met zo'n functievoorschrift de functiewaarde uitrekenen voor verschillende waarden van x.

$$f(3) = 2^{3\cdot 3-8} = 2^1 = 2$$
$$f(4) = 2^{3\cdot 4-8} = 2^4 = 16$$
$$f(5) = 2^{3\cdot 5-8} = 2^7 = 128$$

De vraag is nu of er een functie te bedenken is waarmee je bij een gegeven waarde van y de bijbehorende waarden van x kan berekenen. Je kunt bij een gegeven y proberen de waarde van x te vinden door op de y in omgekeerde volgorde de inverse bewerkingen toe te passen. Bedenk daarbij:

- ✔ de inverse bewerking van optellen is aftrekken
- ✔ de inverse bewerking van vermenigvuldigen is delen
- ✔ de inverse bewerking van kwadrateren is worteltrekken (op een beperkt domein)
- ✔ de inverse bewerking van $g^{\cdots}$ is ${}^{g}log(\ldots)$
- ✔ de inverse bewerking van g^a is $g^{\frac{1}{a}}$

Voorbeeld

Kijk nog 's naar $f(x) = 2^{3x-8}$. Gegeven: $f(x) = 1024$. Wat is x?

$$x \xrightarrow{\times 3} 3x \xrightarrow{-8} 3x-8 \xrightarrow{2^{\cdots}} 2^{3x-8}$$

Nu van achter naar voren de inverse bewerkingen toepassen op y:

$$\frac{{}^2\log(y)+8}{3} \xleftarrow{:3} {}^2\log(y)+8 \xleftarrow{+8} {}^2\log(y) \xleftarrow{{}^2\log(\ldots)} y$$

Dus als $y = 1024$ dan is $x = \frac{{}^2\log(y)+8}{3}$.

We zien dat met $y = 2^{3x-8}$ de inverse functie gelijk is aan $x = \frac{{}^2\log(y)+8}{3}$.

Dus als $y = 1024$ dan:

- ✔ $x = \frac{{}^2\log(1024)+8}{3}$
- ✔ $x = \frac{10+8}{3}$
- ✔ $x = \frac{18}{3}$
- ✔ $x = 6$

Opgave 25

Om x te berekenen had je, in bovenstaand voorbeeld ook de vergelijking $2^{3x-8} = 1024$ kunnen oplossen.

- ✔ Los de vergelijking op.
- ✔ Valt je iets op?

Aanpak

Om de inverse te vinden van bijvoorbeeld $y = \sqrt{3x-2} + 5$ kan je ook proberen om x uit te drukken in y. Vervang vervolgens de 'x' door 'y' en de 'y' door 'x' en je bent er...

Opgave 26

- ✔ Gegeven $y = \sqrt{3x-2} + 5$. Druk x uit in y.

Grafieken

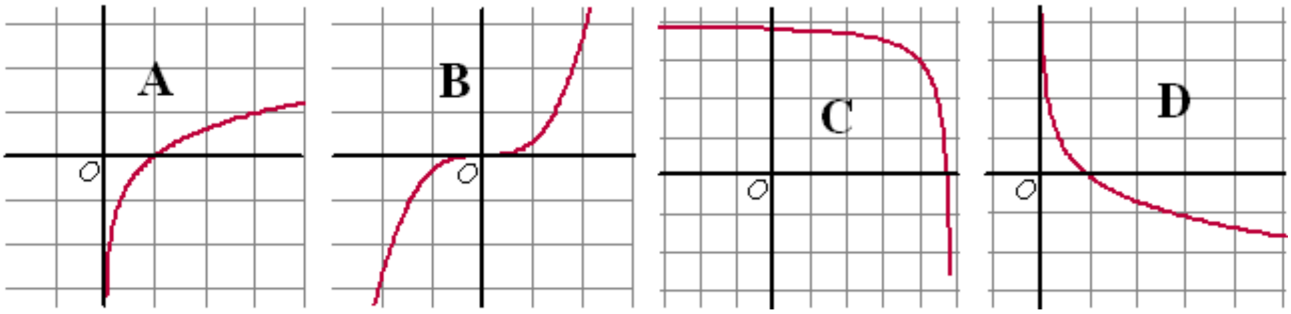
Opgave 27

Open **http://www.wisbe.nl/inverse.htm** en bekijk de grafieken en hun inverse.

- ✔ Wat is de inverse van $y = \dfrac{1}{x}$?

Opgave 28

Schets de grafieken van de inversen van de volgende functies:



http://hhofstede.nl

Opgave 29

Druk x uit in y:

a. $y = 3x - 1$
b. $y = 2 + \sqrt{4x-6}$
c. $y = 4x^3 - 9$
d. $y = {}^{2}\log(4 - 3x) - 2$
e. $y = 1 + 2^{4x+7}$

Eindopdracht karakteristieke eigenschappen

Hieronder zie je een overzicht van de standaardfuncties. Daaronder staat een overzicht van de kakateristieke eigenschappen van die functies en de bijbehorende grafieken.

- ✔ Maak een **overzicht** van alle karakteristiek eigenschappen van de standaardfuncties

---

standaard functies

- ✔ lineaire of eerstegraadsfunctie
- ✔ kwadratische of tweedegraadsfunctie
- ✔ machtsfunctie
- ✔ exponentiële en logaritmische functie
- ✔ goniometrische functie
- ✔ gebroken lineaire functie
- ✔ wortelfunctie

---

karakteristieke eigenschappen van functies

- ✔ domein
- ✔ bereik
- ✔ nulpunt
- ✔ extremen, minimum en maximum
- ✔ stijgen en dalen
- ✔ toenemend of afnemend stijgen of dalen

---

karakteristieke eigenschappen van grafieken

- ✔ naam
- ✔ snijpunt met de x-as
- ✔ snijpunt met de y-as
- ✔ top
- ✔ andere bijzondere punten
- ✔ symmetrie
- ✔ asymptotisch gedrag inclusief horizontale en verticale asymptoot

---

Materiaal

- ✔ papier of gekleurd papier
- ✔ potlood of pen,
- ✔ kleurpotloden of viltstiften
- ✔ geodriehoek
- ✔ schaar
- ✔ lijm

Maak er iets moois van...:-)

Antwoorden

Opgave 1

a. $y = \frac{2}{5}x + 1\frac{4}{5}$
b. Het snijpunt met de y-as is (0,-4) en het snijpunt met de x-as is (1$\frac{1}{3}$,0)
c. $(\frac{4}{5}, 1\frac{2}{5})$

Opgave 2

✔ $f(x) = 1\frac{1}{4}(x+2) - 2$ geeft $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$
✔ $f(x) = 1\frac{1}{4}(x-2) + 3$ geeft $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

Opgave 3

✔ De richtingscoëfficient van de lijn is $-\frac{2}{3}$ dus dat is vast goed. Als je de coördinaten van $A(5,-2)$ invult dan kan je constateren van A op de lijn ligt. In dat geval moet dit wel een goede vergelijking zijn.

Opgave 4

De coördinaten van de toppen zijn:

a. $\left(4,4\right)$
b. $\left(-3,-11\right)$
c. $\left(-1\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}\right)$
d. $\left(0,3\right)$
e. $\left(-7,0\right)$

Opgave 5

a. De top is $(1,-2)$
b. Als $a > 0$ dan is de parabool een dalparabool. Als $a < 0$ dan is het een bergparabool. Als a groter wordt dan wordt de parabool smaller. Tussen 0 en 1 of tussen -1 en 0 wordt de parabool wijder.
c. Neem $a = \frac{5}{36}$. Ga na!
d. $y = 3$ voor $x = -4$ of $x = 6$.
Je kunt dat berekenen door het oplossen van de vergelijking $\frac{1}{5}(x-1)^2 - 2 = 3$.

$$\frac{1}{5}\left(x-1\right)^2 - 2 = 3$$

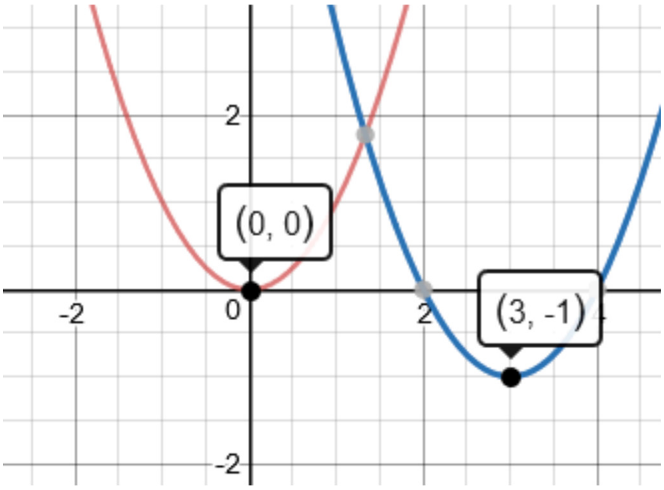
$$\frac{1}{5}(x-1)^2 = 5$$

$$(x-1)^2 = 25$$

$$x - 1 = \ -5 \vee x - 1 = 5$$

$$x = \ -4 \vee x = 6$$

Opgave 6



Opgave 7

Dat is de vector $(-5, 2)$

Je kunt dat ook **berekenen**:

$$y = x^2 - 4x + 2 \rightarrow y = (x-2)^2 - 2$$
$$y = x^2 + 6x + 5 \rightarrow y = (x+3)^2 - 4$$

Van $\left(2, -2\right)$ naar $\left(-3, -4\right)$ geeft $(-5, -2)$.

Opgave 8

Vervang in $y = \ -x^2 + 5x + 5$ de x door $(x+2)$ en tel 6 op bij het functievoorschrift. Je krijgt dan:

$$y = \ -(x+2)^2 + 5(x+2) + 5 + 6$$
$$y = \ -(x^2 + 4x + 4) + 5x + 10 + 11$$
$$y = \ -x^2 - 4x - 4 + 5x + 21$$
$$y = \ -x^2 + x + 17$$

Opgave 9

a. $x = \ -\sqrt[4]{5} \vee x = \sqrt[4]{5}$
b. $x = \sqrt[5]{5}$
c. $x = \ -\sqrt[6]{\pi} \vee x = \sqrt[6]{\pi}$
d. geen oplossing

Opgave 10

- ✔ vermenigvuldigen met -2 t.o.v. x-as
- ✔ transleren over de vector $(-3, 5)$

Opgave 11

- ✔ $y = \frac{1}{2}(x-2)^5 - 3$

Opgave 12

- ✔ De volgorde is wel van belang. Als je op $y = x^5$ eerst de translatie(s) toepast en daarna de verminigvuldiging dan krijg je:
  - ✔ $y = x^5$
  - ✔ $y = (x-2)^5 - 3$
  - ✔ $y = \frac{1}{2}(x-2)^5 - 1\frac{1}{2}$
- ✔ ...en dat is niet hetzelfde.

Opgave 13

- ✔ standaardfunctie: $f(x) = 2^x$
- ✔ vermenigvuldigen met de factor 4 t.o.v. de x-as geeft: $f(x) = 4 \cdot 2^x$
- ✔ 1 naar rechts verschuiven geeft: $f(x) = 4 \cdot 2^{x-1}$
- ✔ 3 verschuiven naar beneden geeft: $f(x) = 4 \cdot 2^{x-1} - 3$

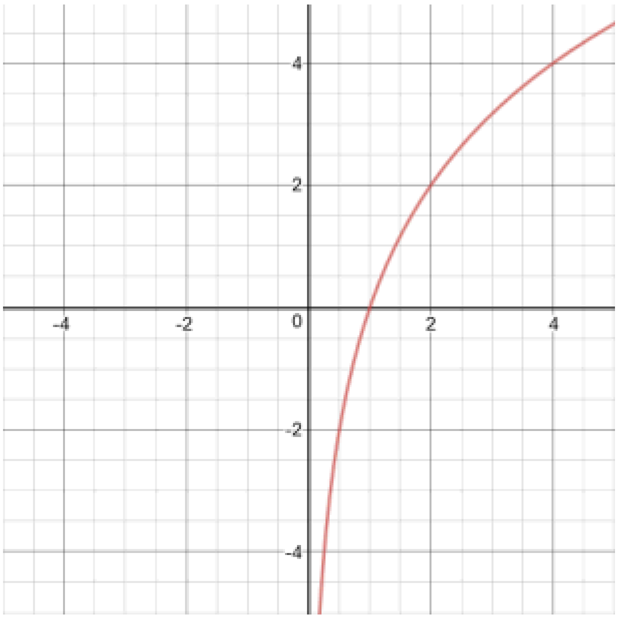
Opgave 14

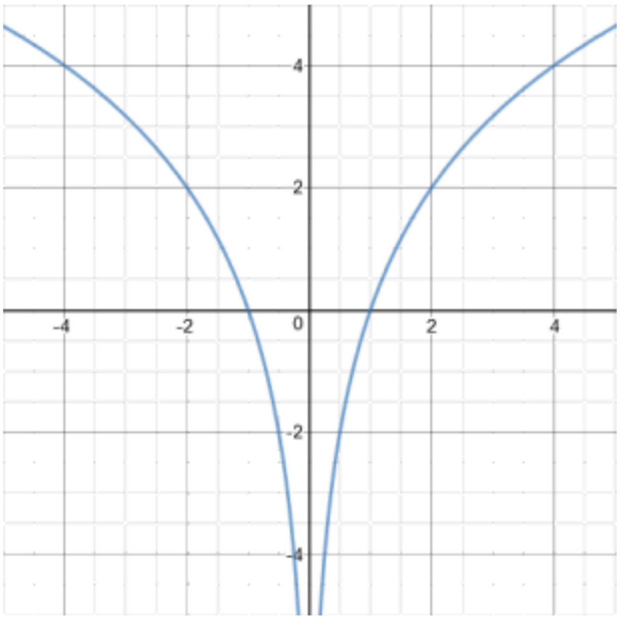
1. $y = 3^x$
2. $y = 3^{2x}$
3. $y = 3^{-2x}$
4. $y = 3^{-2(x-1)} + 1$
5. $y = 3^{-2(x-1)} - 1$

Opgave 15

$y = {}^{2}log(x)$	standaardfunctie	domein: $< 0, \rightarrow>$ bereik: R asymptoot: x=0
$y = {}^{2}log(2x)$	vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$ t.o.v. de y-as	domein: $< 0, \rightarrow>$ bereik: R asymptoot: x=0
$y = {}^{2}log(2(x-3))$	3 naar rechts	domein: $< 3. \rightarrow>$ bereik: R asymptoot: x=3
$y = {}^{2}log(2(x-3)) + 4$	4 omhoog	domein: $< 3, \rightarrow>$ bereik: R asymptoot: x=3

Opgave 16





De logaritme ${}^{2}log(x)$ is alleen gedefinieerd voor $x > 0$. Bij de linker grafiek heb je daarom alleen punten voor $x > 0$. Bij de rechter grafiek heb je links ook een tak.

Opgave 17

$$2 + \frac{8}{x+3} = 2x + 2$$

$$\frac{8}{x+3} = 2x$$

$$2x(x+3) = 8$$

$$2x^2 + 6x = 8$$

$$x^2 + 3x = 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0$$

$$x = -4 \vee x = 1$$

$$(-4, -6) \ en \ (1, 4)$$

Opgave 18

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

vermenigvuldigen met 8 t.o.v. de y-as

$$f(x) = \frac{8}{x}$$

translatie over $(-3, 2)$

$$f(x) = 2 + \frac{8}{x+3}$$

Opgave 19

A. $y = 1 + \dfrac{1}{x-5}$

B. $y = -2 + \dfrac{2}{x-1}$

C. $y = 1 - \dfrac{1}{2(x-4)}$

Opgave 20

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$$

$$f(x) = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}x\right) - 3} + 4 \rightarrow f(x) = \frac{4}{x-6} + 4$$

$$f(x) = \frac{4}{\left(x+3\right) - 6} + 4 \rightarrow f(x) = \frac{4}{x-3} + 4$$

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + 2$$

Opgave 21

Gegeven: $f(x) = -2\sqrt{-x-1} + 3$
Gevraagd: domein en bereik

- ✔ Het **startpunt** is $(-1, 3)$
- ✔ De grafiek loopt naar **links**
- ✔ De grafiek loopt **omlaag**

Het domein is $<\leftarrow, -1]$
Het bereik is $<\leftarrow, 3]$

Opgave 22

$$f(x) = g(x)$$

$$\sqrt{x} = 2\sqrt{x-3}$$

$$x = 4\left(x-3\right)$$

$$x = 4x - 12$$

$$-3x = -12$$

$$x = 4$$

Contoleer je oplossing. $x = 4$ voldoet.
Met f(4)=2 krijg je $A(4, 2)$.

Opgave 23

a. $3x - 5\sqrt{x} - 2 = 0$

$-5\sqrt{x} = -3x + 2$

$25x = (-3x + 2)^2$

$25x = 9x^2 - 12x + 4$

$9x^2 - 37x + 4 = 0$

$9x^2 - 36x - x + 4 = 0$

$9x(x - 4) - (x - 4) = 0$

$(9x - 1)(x - 4) = 0$

$9x = 1 \vee x = 4$

$x = \frac{1}{9}(v.n.) \vee x = 4$

$x = 4$

b. $x - 4\sqrt{x} + 2 = 0$

$-4\sqrt{x} = -x - 2$

$4\sqrt{x} = x + 2$

$16x = x^2 + 4x + 4$

$x^2 - 12x + 4 = 0$

$(x - 6)^2 - 36 + 4 = 0$

$(x - 6)^2 = 32$

$x - 6 = \pm\sqrt{32}$

$x = 6 \pm 4\sqrt{2}$

$x = 6 - 4\sqrt{2} \vee x = 6 + 4\sqrt{2}$

c. $6x + \sqrt{x} = 7x - 20$

$\sqrt{x} = x - 20$

$x = x^2 - 40x + 400$

$x^2 - 41x + 400 = 0$

$(x - 16)(x - 25) = 0$

$x = 16(v.n.) \vee x = 25$

$x = 25$

Opgave 24

$$K = 4 + \sqrt{3p+1}$$

$$K - 4 = \sqrt{3p+1}$$

$$(K-4)^2 = 3p + 1$$

$$(K-4)^2 - 1 = 3p$$

$$p = \frac{1}{3}(K-4)^2 - \frac{1}{3}$$

Opgave 25

$$2^{3x-8} = 1024$$

$${}^{2}\log\left(2^{3x-8}\right) = {}^{2}\log(1024)$$

$$3x - 8 = 10$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

Opgave 26

$$y = \sqrt{3x-2} + 5$$

$$\sqrt{3x-2} = y - 5$$

$$3x - 2 = (y-5)^2$$

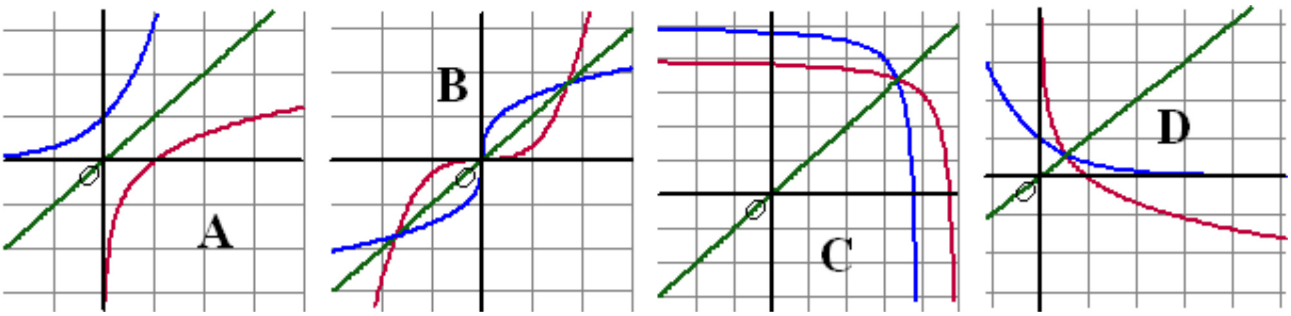
$$3x = (y-5)^2 + 2$$

$$x = \frac{(y-5)^2 + 2}{3}$$

Opgave 27

De inverse van $y = \dfrac{1}{x}$ is $y = \dfrac{1}{x}$.

Opgave 28



Opgave 29

a. $x = \dfrac{y+1}{3}$

b. $x = \dfrac{1}{4}(y-2)^2 + 1\dfrac{1}{2}$

c. $x = \sqrt[3]{\dfrac{y+9}{4}}$

d. $x = \ - \dfrac{2^{4-3x}}{3}$

e. $x = \dfrac{1}{4} \cdot {}^{2}\log(y-1) - 1\dfrac{3}{4}$