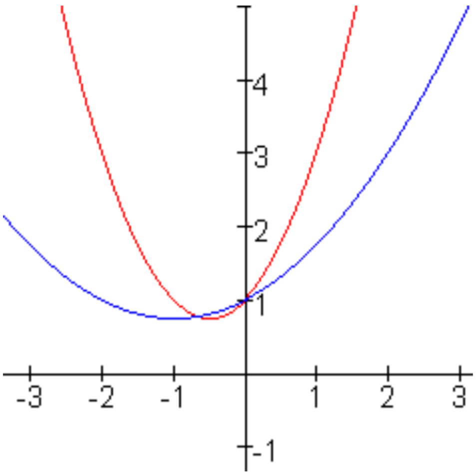
Transformaties van grafieken
HAVO wiskunde B
deel 2



Willem van Ravenstein
500765005
Haags Montessori Lyceum

Inleiding

In deze leerroute gaan we kijken naar goniometrische functies:

- De eenheidscirkel
- Hoeken, sinus en cosinus
- Transformaties
- Evenwichtslijn, amplitude, periode en verticale verschuiving
- Een functievoorschrift opstellen
- Goniometrische vergelijkingen exact oplossen
- Problemen en oplossingen

Je gaat een aantal opdrachten doen. Dat is deels op **papier** bij een **applet**, maar ook deels met **DWO**, de digitale wiskundeomgeving. Er zijn opdrachten voor je **grafische rekenmachine** of met een **grafiekenprogramma**.

Je kunt alle informatie en links vinden in dit boekje. De antwoorden op de vragen staan achterin. De leerroute wordt afgerond met een **online toets** zodat je kan zien wat je geleerd hebt.

Subdomein B1: Standaardfuncties

- De kandidaat kan standaardfuncties (machtsfuncties, exponentiële en logaritmische functies en goniometrische functies) hanteren, interpreteren binnen een context, de grafieken beschrijven en in een functievoorschrift vastleggen en werken met eenvoudige transformaties.

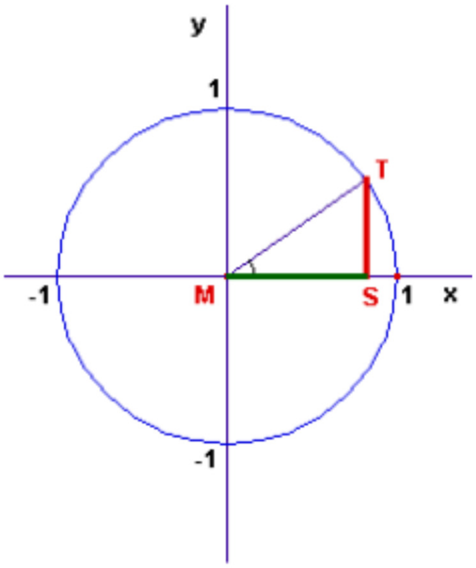
Subdomein B4: Periodieke functies

- De kandidaat kan periodieke verschijnselen beschrijven door middel van sinus- of cosinusfuncties, de bijbehorende sinusoïden tekenen en de karakteristieke eigenschappen ervan benoemen en alle oplossingen van een goniometrische vergelijking op een gegeven interval bepalen.

Transformaties deel 2.pdf

Willem

De eenheidscirkel



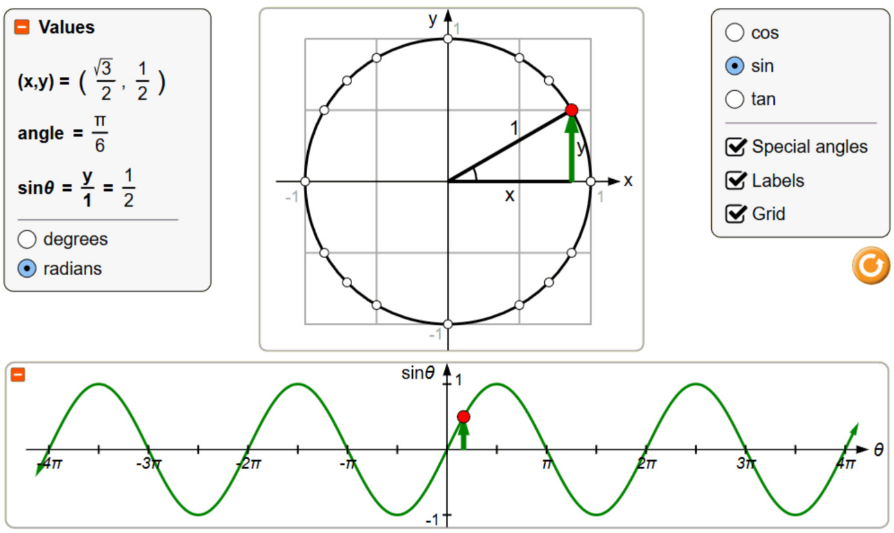
figuur 1

In **figuur 1** zie je de eenheidscirkel. Het is een cirkel met een straal van 1. De 'hoek' is de hoek tussen het lijnstuk MT en het positieve deel van de x-as. Omdat de straal 1 is is de lengte van het 'rode lijnstuk' (verticaal) de sinus van de hoek en de lengte van het 'groene lijnstuk' (horizontaal) de cosinus van de hoek.

Opdracht

- ✔ Start **het PHET-applet** en beantwoord de volgende vragen.
  Zie eventueel http://www.wiskundeleraar.nl en dan **hulpmiddelen** voor de hyperlink.

Vraag 1



figuur 2

Stel het applet in als in **figuur 2** aangegeven. Gebruik het applet bij de beantwoording van de vragen.

a. Hoe groot is de hoek in figuur 2 in graden?
b. Er zijn meer hoeken waarbij $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$. Noem er 's een paar.
c. Wat is de sinus van een hoek van $8\frac{5}{6}\pi$?
d. Wat is de cosinus van een hoek van $1\frac{3}{4}\pi$? Wat is de cosinus van $-\frac{1}{4}\pi$? Zijn dat dezelfde hoeken?
e. Denk je dat het klopt als je zegt dat als twee hoeken dezelfde sinus hebben dat de hoeken dan ook gelijk zijn?

Vraag 2

Je kunt met je **GR** bij een gegeven hoek in radialen uitrekenen welke waarde van sinus of cosinus daarbij hoort.

a. Geef de sinus en de cosinus van een hoek van $\frac{2}{3}\pi$.
b. Welke hoek tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ geldt: $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$?
c. De sinus van $\frac{1}{3}\pi$ is gelijk aan de sinus van $\frac{2}{3}\pi$. De hoeken zijn samen π. Is dat toeval of geldt (in het algemeen) als $\alpha + \beta = \pi$ dan $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$?
d. Ik heb twee hoeken α en β en ik weet dat ze samen gelijk aan π zijn. Wat weet je dan van de waarden van de sinus van α en β?
e. Zoiets als bij d. (maar dan anders) geldt ook voor de cosinus. Wat geldt er dan?

Vraag 3

Maar nu andersom.

a. Je weet dat $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Wat is dan α?
b. Heb je bij a. wel **ALLE** mogelijke waarden voor α gegeven?
c. Je weet dat $\cos(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Geef alle mogelijk waarden van β.

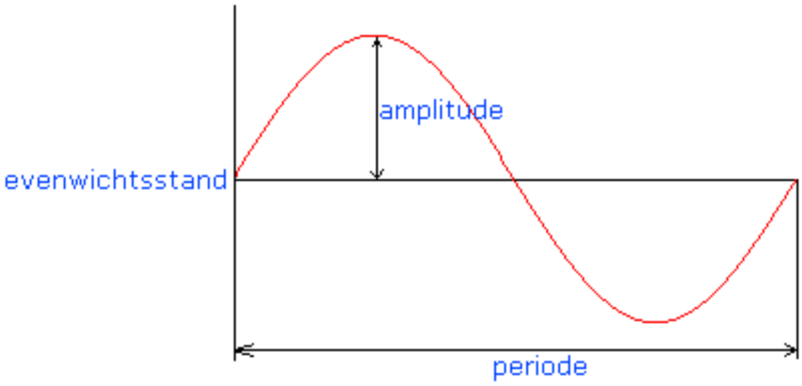
Vraag 4

Bereken **exact** de waarde van α en geef **ALLE** mogelijke oplossingen.

a. $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$
b. $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
c. $\sin(\alpha) = 0$
d. $\cos(\alpha) = 1$
e. $\sin(\alpha) = -1$
f. $\sin(\alpha) = \cos(2\frac{1}{2}\pi)$

Grafieken van goniometrische functies

Periodieke verbanden



Kenmerken van een periodiek verband:

- ✔ periode is de kortste tijd die het duurt tot herhaling optreedt
- ✔ evenwichtsstand is (hoogste stand + laagste stand)/2
- ✔ amplitude is hoogste stand − evenwichtsstand

De algemene vorm van een sinusfunctie

$c = \frac{2\pi}{T}$ met T: trillingstijd

b: amplitude

$h(t)$: hoogte op t

$$h(t) = a + b \cdot \sin\left(c\,(t - d)\right)$$

a: evenwichtsstand

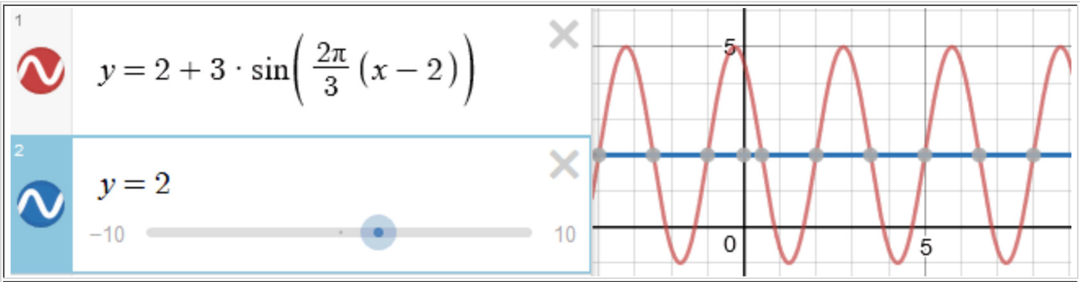
d: horizontale verplaatsing t.o.v. O

Opdracht

Ga naar het **grafiekenprogramma** en beantwoord de volgende vragen.

- ✔ https://www.desmos.com/calculator

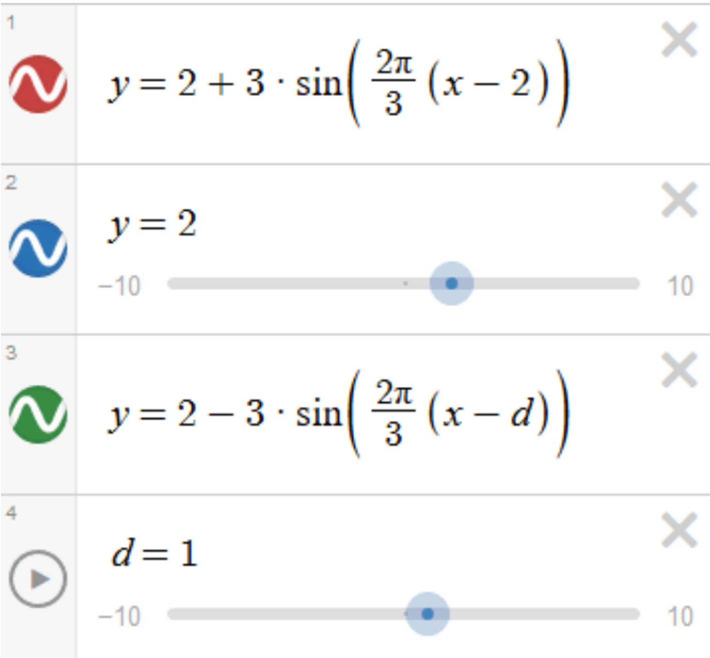
  Zie eventueel http://www.wiskundeleraar.nl en dan **hulpmiddelen** voor de hyperlink.



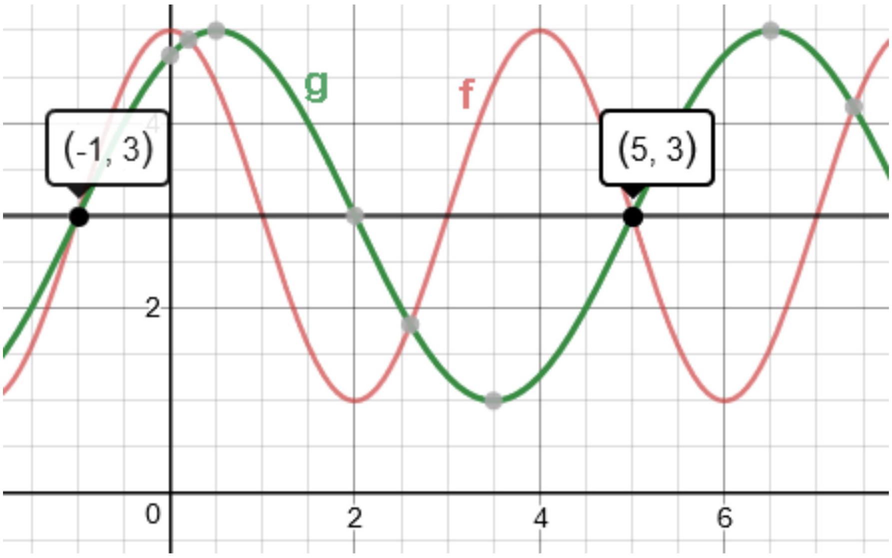
figuur 1

Neem het functievoorschrift uit **figuur 1** over in het grafiekenprogramma.

a. Geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de verticale verschuiving.
b. Als je bij de functie van a. de waarde van b verandert in -3 wat moet je dan voor d nemen zodat je dezelfde grafiek krijgt? Hoe kan je dat zien aan de grafiek van 1.?

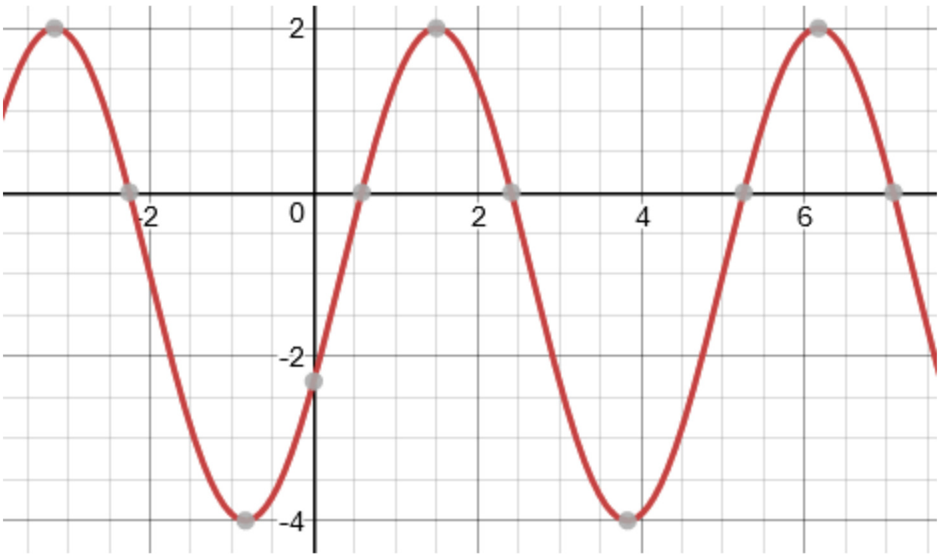


c. Teken de sinusfunctie f die 'begint' in $(-1, 3)$ met een amplitude van 2 en een periode van 4. De grafiek van g snijdt de grafiek van f in het punt $(5, 3)$.



Geef een functievoorschrift van g.

d. Gegeven is de volgende grafiek:



Geef een functievoorschrift met sinus. Neem $b < 0$

Karakteristieke eigenschappen

Er veel verschillende soorten functies:

- ✔ linieaire functies
- ✔ kwadratische functies
- ✔ hogeregraads functies
- ✔ gebroken functies
- ✔ wortelfuncties
- ✔ logaritmische functies
- ✔ machtsfuncties
- ✔ sinusoïden

Deze functies hebben karakteristieke eigenschappen: toppen, asymptoten, eindpunten, etc. Als je de grafiek van zo'n functie ziet kun je hem vaak gemakkelijk op grond van deze eigenschappen herkennen. Je kent al een aantal standaardfuncties waarvan je de karakteristieke eigenschappen kent. Veel grafieken zijn transformaties van die standaardgrafieken. Met behulp van die karakteristieke eigenschappen kan je bij gegeven grafieken het functievoorschrift opstellen.

Opdracht

Vraag 1

- ✔ Ga naar DWO, log in en doe de module **functies raden** en dan kiezen voor **formules bij diverse functies**.

  Zie eventueel http://www.wiskundeleraar.nl en dan **hulpmiddelen** voor de hyperlink.
- ✔ Zie eventueel **formules maken in een notendop** met 5 voorbeelden op 1 pagina...

Een formule opstellen bij een sinusfunctie

$c = \frac{2\pi}{T}$ met T: trillingstijd

$h(t)$: hoogte op t

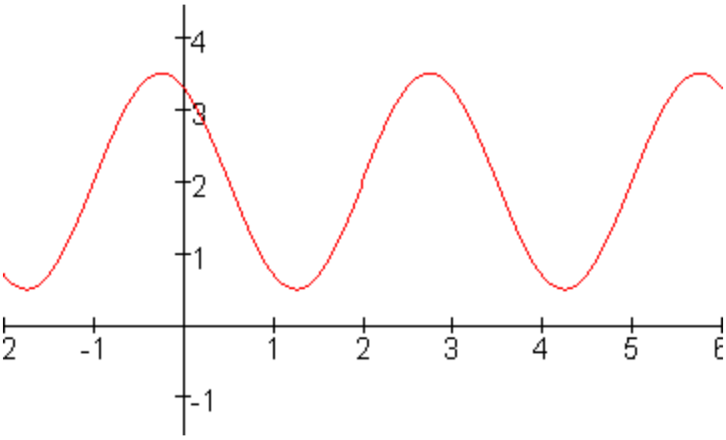
b: amplitude

$$h(t) = a + b \cdot \sin\left(c\,(t - d)\right)$$

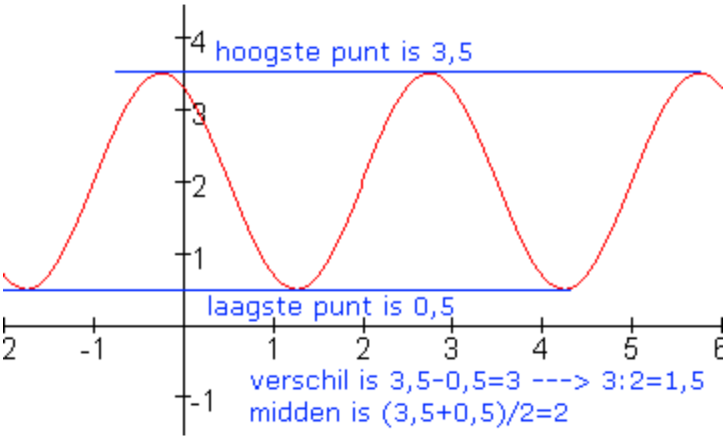
a: evenwichtsstand

d: horizontale verplaatsing t.o.v. O

Voorbeeld

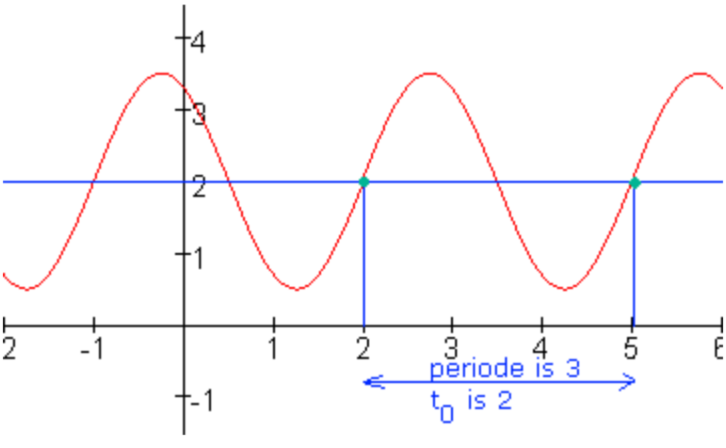


Kijk eerst naar het hoogste en laagste punt. Je weet dan de evenwichtsstand en de amplitude:



We zien: A=1,5 en c=2

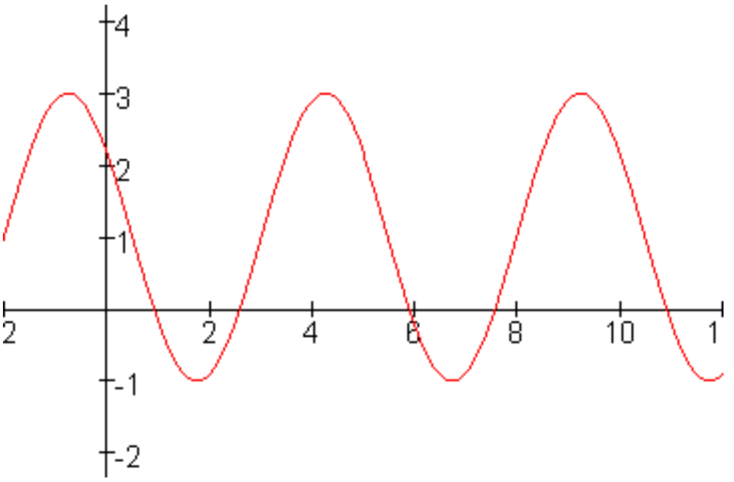
Kijk dan naar de periode en t_0:



We zien T=3 en t_0=2. De formule wordt:

✔ $h(t) = 2 + 1,5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}(t-2)\right)$

Vraag 2



- ✔ Stel een formule op met sinus waarbij $b > 0$
- ✔ Stel een formule op met sinus waarbij $b < 0$
- ✔ Stel een formule op met cosinus.

Vraag 3

- ✔ Ga naar **DWO**, log in en doe de module **functies raden** en dan kiezen voor **formules bij goniometrische functies**.

  Zie eventueel http://www.wiskundeleraar.nl en dan **hulpmiddelen** voor de hyperlink.
- ✔ **TIP**: gebruik in je functievoorschrift **de juiste variabele**. Dit wordt in het tekstvlak aangegeven.

Transformaties van grafieken

Voorbeeld

Hoe maak je van de grafiek van $y=\sin(x)$ de grafiek van $y=\ -2+3\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{6}\left(x-2\right)\right)$.

Uitwerking

$y=\sin(x)$

- ✔ vermenigvuldigen met de factor $\frac{6}{2\pi}$ t.o.v. de y-as geeft:

$y=\sin\left(\frac{2\pi}{6}x\right)$

- ✔ verschuif de grafiek 2 naar rechts:

$y=\sin\left(\frac{2\pi}{6}\left(x-2\right)\right)$

- ✔ vermenigvuldig de grafiek met de factor 3 t.o.v. de x-as:

$y=3\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{6}\left(x-2\right)\right)$

- ✔ verschuif de grafiek 2 omlaag:

$y=\ -2+3\sin\left(\frac{2\pi}{6}\left(x-2\right)\right)$

Aanpak

Zoals je ziet werk je van 'binnen' naar 'buiten'. Je begint met de vermenigvuldiging t.o.v. de y-as. Dat is verreweg de lastigste transformatie en die heb je dan maar vast gehad.

Vermenigvuldigen met de factor p t.o.v. de y-as

- ✔ Vervang x in het functievoorschrift door $\frac{1}{p}x$.
- ✔ In het functievoorschrift was $c=\frac{2\pi}{6}$ dus de factor is het omgekeerde $\frac{6}{2\pi}$.
- ✔ Je kunt ook zeggen de periode is 6, dus $c=\frac{2\pi}{6}$

Horizontale verschuiving met p

- ✔ Vervang x in het functievoorschrift door $x-p$ als je p naar rechts verschuift.
- ✔ In het functievoorschrift vervang je x door $x-2$ omdat je 2 naar **rechts** verschuift.

Vermenigvuldigen met de factor p t.o.v. de x-as

- ✔ Vermenig het gehele functievoorschrift met de factor p.

Verticale verplaatsing met p

- ✔ Tel bij het functievoorschrift de waarde van p op.

Spiegelen in x- of y-as

Je kunt ook spiegelen in de x- en y-as. Maar dat is 'eigenlijk' hetzelfde als vermenigvuldigen met een factor -1 t.o.v. de x-as respectievelijk vermenigvuldigen met de factor -1 t.o.v. de y-as.

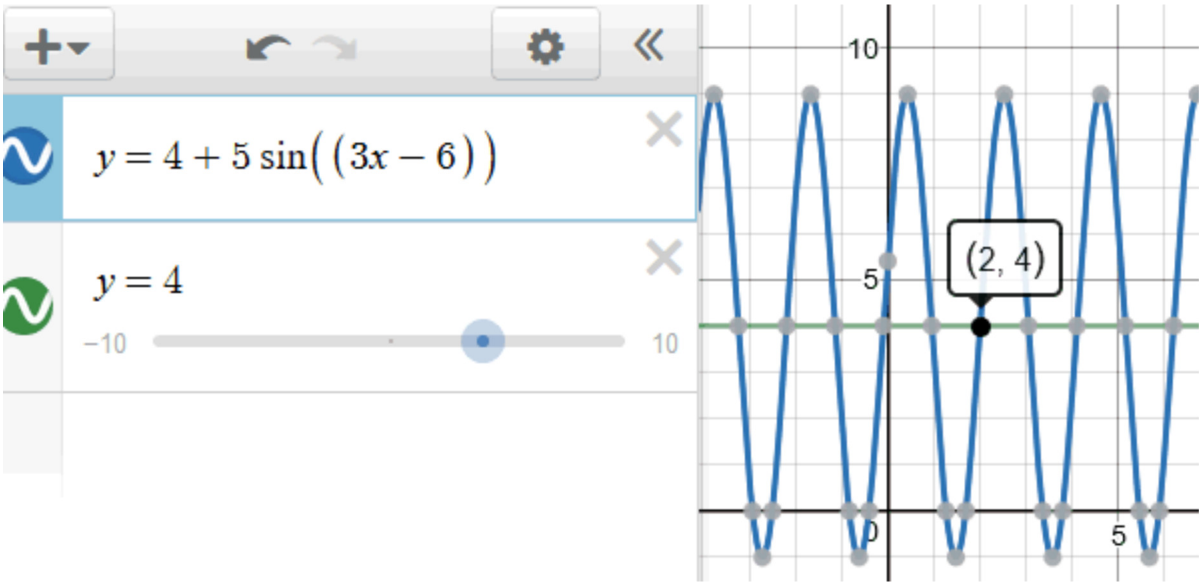
Gebruik de standaardvorm

Soms staat het functievoorschrift in een andere vorm dan de standaardvorm die we steeds gebruiken. Het is dan handig om het functievoorschrift in de standaardvorm te schrijven:

- ✔ $y = 4 + 5 \cdot \sin\left(3x - 6\right)$ wordt dan $y = 4 + 5 \cdot \sin\left(3\left(x - 2\right)\right)$.

Je kunt dan gemakkelijk de waarden van a, b, c en d bepalen.

$a = 4$ dus de evenwichtsstand is $y = 4$
$b = 5$ dus de amplitude is 5
$c = 3$ dus de periode is $\frac{2}{3}\pi$
$d = 2$ dus de verticale verplaatsing is 2 naar rechts



Opdracht 1

Geef aan hoe de grafiek van $f(x) = 2 - 3 \cdot \sin(3(x - 1))$ uit de standaardgrafiek van $y = \sin(x)$ onstaat en geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van het beginpunt.

Opdracht 2

De grafiek van g ontstaat uit die van $y = \sin(x)$ door eerst te vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met π, de grafiek π naar links te verschuifen, daarna te vermenigvuldigen met de factor π ten opzichte van de x-as en vervolgens de grafiek π naar boven te verschuiven.

- ✔ Stel een functievoorschrift van g op.

Goniometrische vergelijkingen oplossen

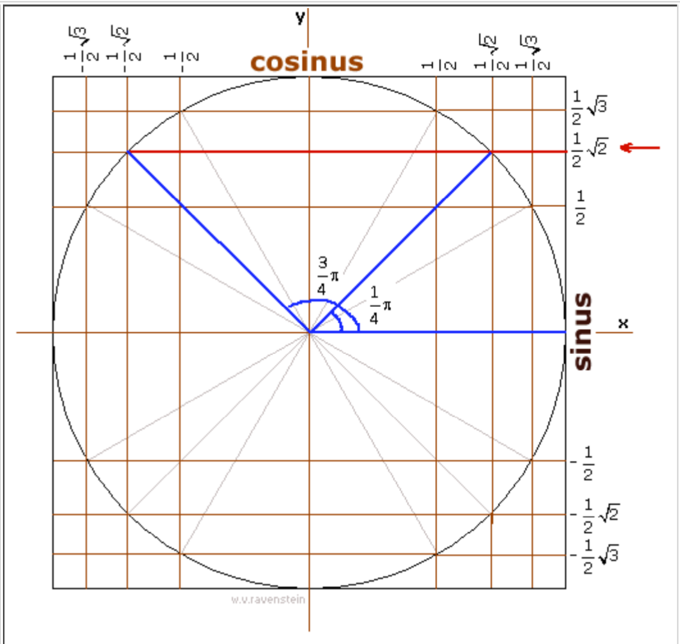
Voor welke α geldt: $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$?

Met de eenheidscirkel vind je (in ieder geval) twee antwoorden!

Dus $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ of $\alpha = \frac{3}{4}\pi$. Maar klopt dat wel?

Nee, dat klopt niet. Er zijn **oneindig veel** oplossingen. $\alpha = 2\frac{1}{4}\pi$ of $\alpha = 2\frac{3}{4}\pi$ of $\alpha = 4\frac{1}{4}\pi$ of $\alpha = 4\frac{3}{4}\pi$, enz... maar ook $\alpha = -1\frac{1}{4}\pi$ of $\alpha = -1\frac{3}{4}\pi$.

Wij noemen dat wel **modulo 2**π. Dat wil zeggen dat er bij een oplossing bij steeds stapjes 2π groter of kleiner ook oplossingen zijn.



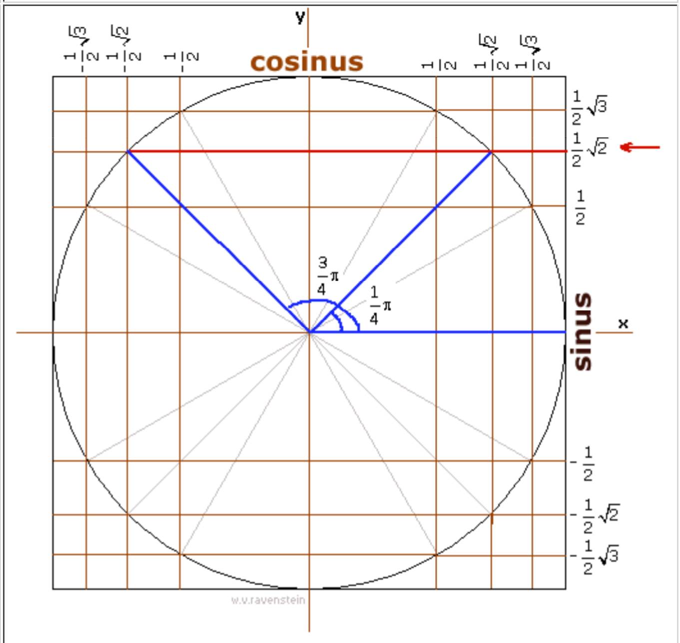
Notatie

Om **alle** antwoorden te geven gebruiken we de notatie ... $+ k \cdot 2\pi$. Voor k kan je dan elk willekeurig **geheel getal** in vullen. Een oplossing zit er dan zo uit:

$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\alpha = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

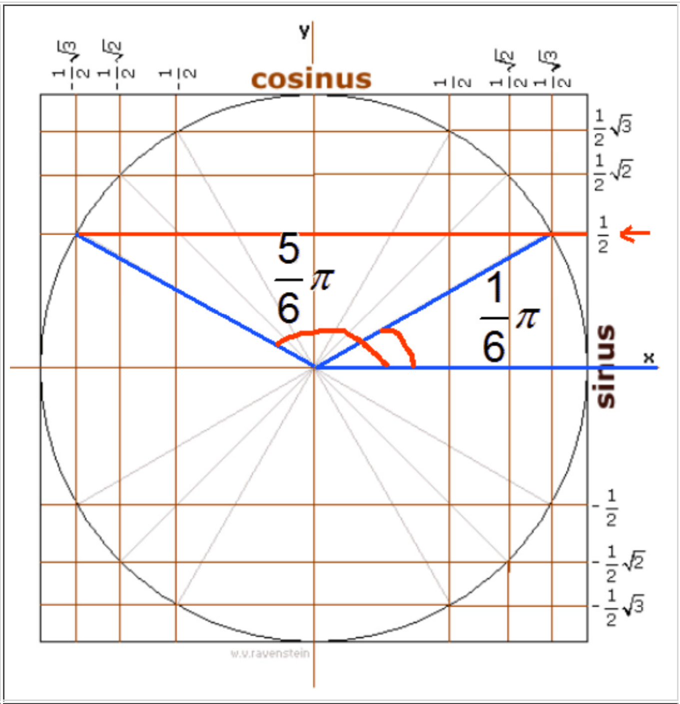
Je hebt (in dit geval) dus **twee verschillende** verzamelingen van een oneindig aantal antwoorden.



Voorbeeld 1

$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$
$2\alpha = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2\alpha = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$\alpha = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ of $\alpha = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$

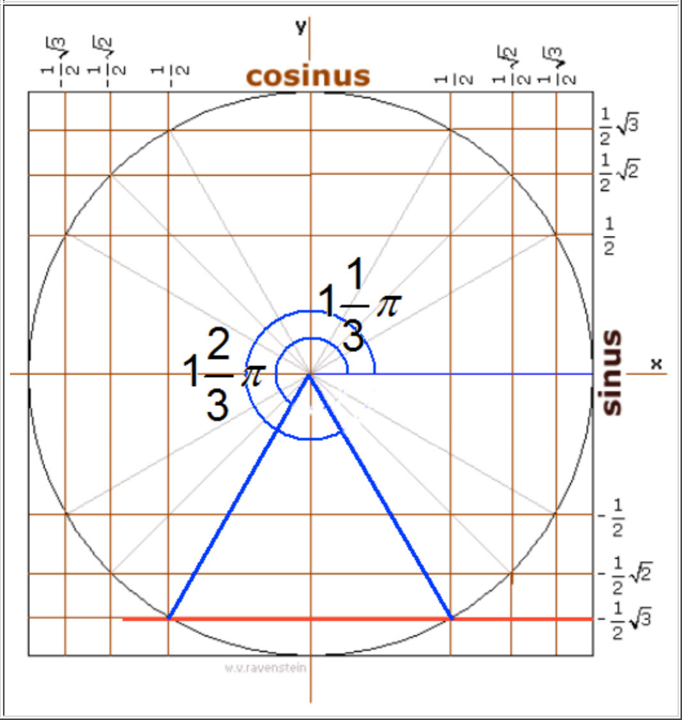
De hoeken zoek je op in de eenheidscirkel en dan modulo 2π. Daarna kan je de vergelijking verder oplossen. In dit geval deel je door 2. Kijk maar 's goed!



Voorbeeld 2

$\sin\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\pi = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of
$\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\pi = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$\frac{1}{2}\alpha = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}\alpha = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$\alpha = 3\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $\alpha = 4\frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

De hoeken zoek je op in de eenheidscirkel en dan modulo 2π. Daarna kan je de vergelijking verder oplossen. In dit geval links en rechts $\frac{1}{2}\pi$ optellen en vermengvuldigen met 2. Kijk maar weer 's goed!



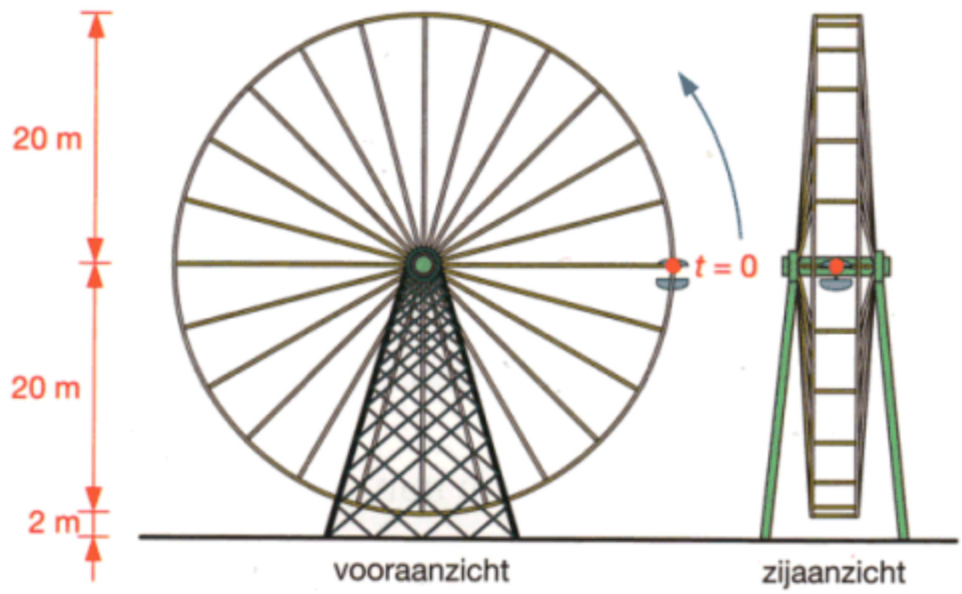
Opdracht

Los **exact** op:

a. $\sqrt{2} \cdot \sin(2x - \pi) = 1$
b. $2\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = \sqrt{3}$
c. $\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = 0$
d. $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$

Toepassingen en probleemaanpak

Opdracht 1



figuur 8.36

In figuur 8.36 zie je een reuzenrad. De diameter is 40 meter. Het middelpunt bevindt zich 22 meter boven de grond. De omlooptijd is één minuut.

- ✔ Geef een formule voor de hoogte h van het stoeltje. Neem t in seconden.

Opdracht 2

De gemiddelde dagtemperatuur T in $°C$ in Napels kan worden benaderd door het model $T = a + b \cdot sin(c(n - d))$. Hierin is n het dagnummer met $n = 1$ op 1 januari.

Gegeven is dat T maximaal is op 20 juli en dat $T_{max} = 25°C$. Verder is T minimaal op 19 januari en $T_{min} = 9°C$.

- ✔ Bereken a, b, c en d

Opdracht 3

De onderstaande tabel geeft de gemiddelde maandtemperaturen (in °C) weer voor het jaar 2014.

maand	jan	feb	maa	april	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
temp	4	5,3	9	14	19	22,6	24	22,6	19	14	9	5,3

- ✔ Geef een functievoorschrift die de gemiddelde maandtemperatuur weergeeft als functie van de maand.

Antwoorden

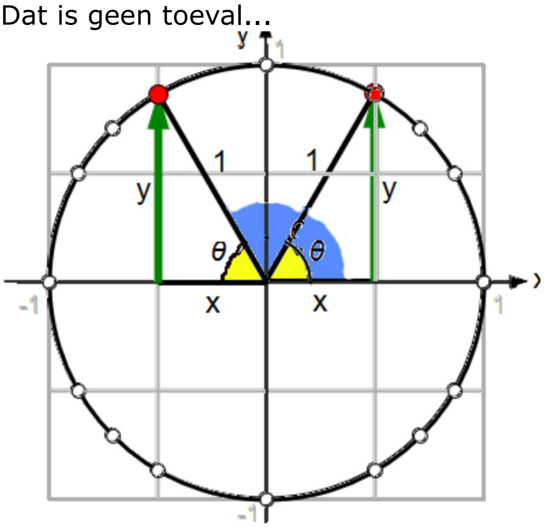
De eenheidscirkel

Vraag 1

a. 30^o immers $\frac{1}{6}\pi$ is $\frac{1}{6}$ van 180^o=30^o
b. $\frac{5}{6}\pi$, $2\frac{1}{6}\pi$ of $2\frac{5}{6}\pi$, maar ook $-1\frac{1}{6}\pi$ of $-1\frac{1}{6}\pi$, enz.
c. De sinus van $8\frac{5}{6}\pi$ is gelijk aan $\frac{1}{2}$. Het is immers modulo 2π.
d. $\cos(1\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2}$ en $\cos(-\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$. Deze hoeken zijn niet gelijk aan elkaar.
e. Dat is onzin. Er zijn oneindig veel hoeken met dezelfde waarde van de sinus.

Vraag 2

a. $\sin(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\cos(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$.
b. Dat is $\frac{1}{4}\pi$.
c. Dat is geen toeval...



Als de gele hoek gelijk is aan a dan is de blauwe hoek gelijk aan $\pi - a$ en dat is samen gelijk aan π.

d. Je weet dan dat $\alpha + \beta = \pi + k \cdot 2\pi$ met $k = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
e. Je weet dan dat $\alpha + \beta = k \cdot 2\pi$ met $k = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

Vraag 3

a. $\sin\left(\alpha\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \alpha = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$. Er zijn twee oneindige verzamelingen van oplossingen.
b. Zie a.
c. $\cos\left(\beta\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \beta = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \beta = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

Vraag 4

a. $\cos\left(\alpha\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \alpha = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
b. $\sin\left(\alpha\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \alpha = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
c. $\sin\left(\alpha\right) = 0 \Rightarrow \alpha = k \cdot \pi$
d. $\cos\left(\alpha\right) = 1 \Rightarrow \alpha = k \cdot 2\pi$
e. $\sin\left(\alpha\right) = -1 \Rightarrow \alpha = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
f. $\sin\left(\alpha\right) = \cos\left(2\frac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow \sin\left(\alpha\right) = 0 \Rightarrow \alpha = k \cdot \pi$

Grafieken van goniometrische functies

a. de evenwichtsstand=2, de amplitude=3, de periode=3 en de verticale verschuiving is 2
b. er geldt $d = \frac{1}{2}$, je moet kijken naar $-\sin(...)$ en die 'start' in het punt $(\frac{1}{2}, 2)$
c. $g(x) = 3 + 2 \cdot \sin(\frac{2\pi}{6}(x + 1))$
d. $y = -1 - 3 \cdot \sin(\frac{3\pi}{7}(x + 2)$

Karakteristieke eigenschappen

Vraag 2

a. $y = 1 + 2 \cdot \sin(\frac{2\pi}{5}(x - 3))$
b. $y = 1 - 2 \cdot \sin(\frac{2\pi}{5}(x - \frac{1}{2}))$
c. $y = 1 + 2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{5}(x - 4\frac{1}{4}))$

Transformaties van grafieken

Opdracht 1

$y = \sin(x)$

- ✔ Vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$ t.o.v. de y-as:

$y = \sin(3x)$

- ✔ verschuif de grafiek 1 naar rechts:

$y = \sin(3(x - 1))$

- ✔ vermenigvuldig met -3 t.o.v. de x-as:

$y = -3 \cdot \sin(3(x - 1))$

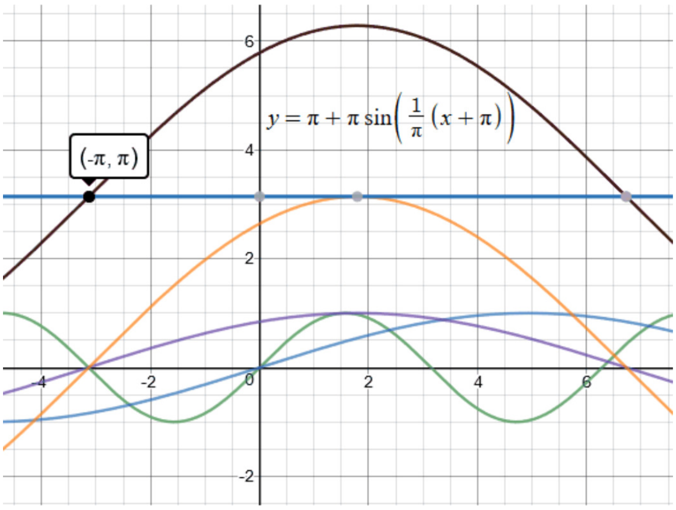
- ✔ verschuif de grafiek 2 omhoog:

$y = 2 - 3 \cdot \sin(3(x - 1))$

De evenwichtsstand is: y=2, de amplitude is 3 (niet -3), de periode is $\frac{2\pi}{3}$ en de coördinaten van het beginpunt zijn (1,2)

Opdracht 2

$y = \pi + \pi \cdot \sin\left(\frac{1}{\pi}\left(x+\pi\right)\right)$



Goniometrische vergelijkingen oplossen

Opdracht

a. $\sqrt{2} \cdot \sin(2x - \pi) = 1$
   $\sin(2x-\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   $2x - \pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
   $2x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
   $x = \frac{5}{8}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{7}{8}\pi + k \cdot \pi$

b. $2\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{3}$
   $\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
   $2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
   $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
   $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$

c. $\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = 0$
   $\sin(x)\left(\cos(x) - 1\right) = 0$
   $\sin(x) = 0$ of $\cos(x) - 1 = 0$
   $x = k \cdot \pi$ of $\cos(x) = 1$
   $x = k \cdot \pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
   $x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$

d. $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$
   $\sin(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ of $\sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$
   $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   $x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
   $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

Toepassingen en probleemaanpak

Opdracht 1

- ✔ $h = 22 + 20 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{60}t\right)$

Opdracht 2

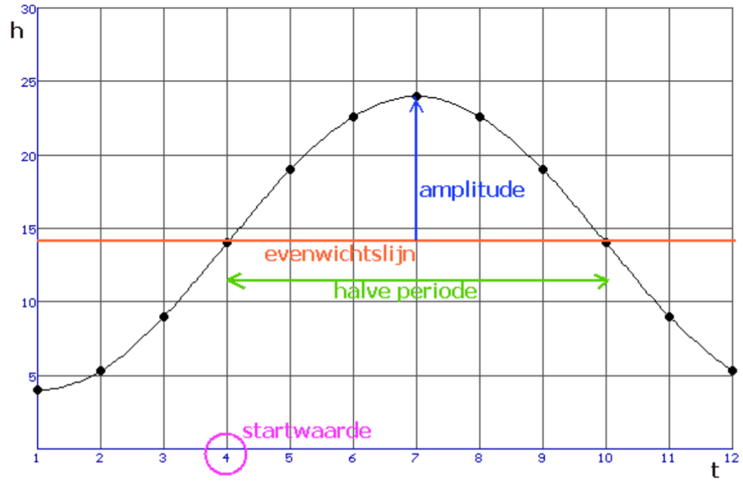
- ✔ De evenwichtslijn: $a = \frac{25+9}{2} = 17$
- ✔ De amplitude: $b = 25 - 17 = 8$
- ✔ De periode is 365 dagen. Dus $c = \frac{2\pi}{365}$
- ✔ 'Stijgend door de evenwichtsstand' op 91 dagen voor T_{max}.
  $d = 201 - 91 = 110$

...finito...!

De formule:

- ✔ $T = 17 + 8 \cdot \sin(\frac{2\pi}{365}(n - 110))$

Opdracht 3



Bij benadering:

- ✔ $a = 14$
- ✔ $b = 10$
- ✔ $c = \frac{2\pi}{12}$
- ✔ $d = 4$

De formule wordt:

$$h(t) = 14 + 10\sin(\frac{2\pi}{12}(t - 4))$$