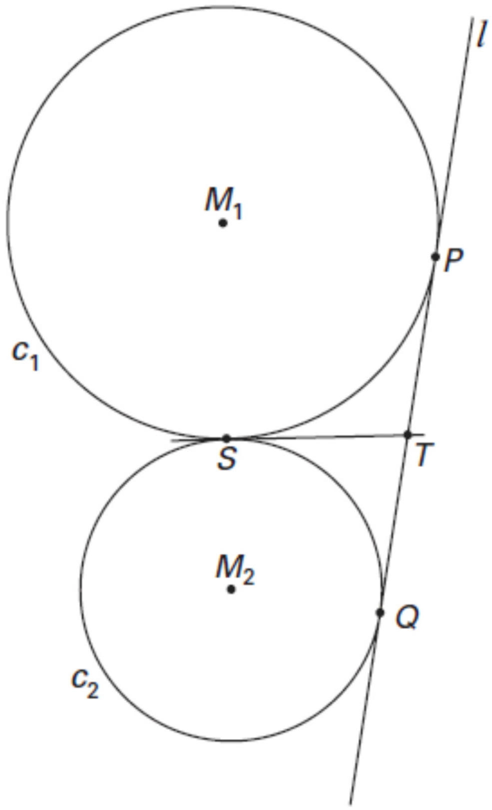
Voorbeelden uit de examens

Dit is mijn studiemodule voor het onderdeel 'bewijzen in de vlakke meetkunde'.



Vlakke meetkunde

1. Hoeken, lijnen en afstanden
2. Meetkundige plaatsen
3. Driehoeken
4. Vierhoeken
5. Cirkel, koorden, bogen, raaklijn, vierhoeken

Hieronder staan de opgaven voor de bewijsen in de vlakke meetkunde van de VWOeindexamens wiskunde B van 2010 t/m 2016. Aan de uitwerkingen wordt nog gewerkt...

- **overzicht.pdf**
- **theorie.pdf**
- **werkboek.pdf**

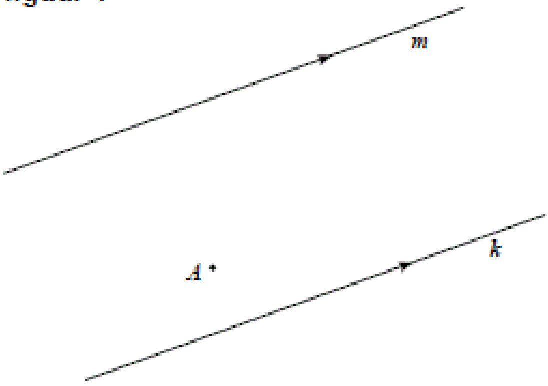
Willem

VWO wiskunde B 2010 I

Een geodriehoek

Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen k en m en een punt A er tussenin. Zie figuur 1.

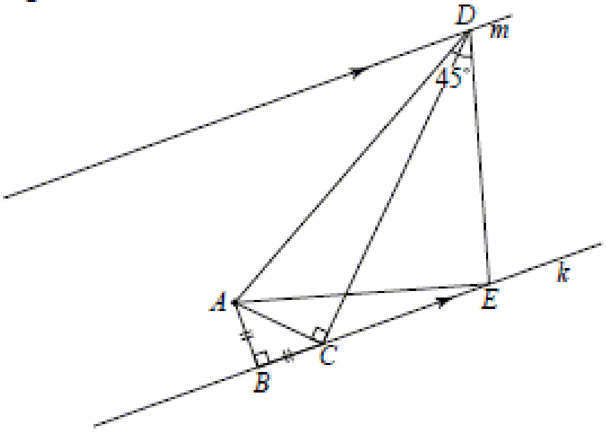
figuur 1



Je kunt op elk van de twee gegeven lijnen een punt tekenen zo dat deze punten samen met punt A de hoekpunten zijn van een rechthoekige, gelijkbenige driehoek. Een dergelijke driehoek noemen we een **geodriehoek**.
Er zijn verschillende gevallen mogelijk. In deze opgave bekijken we de situatie waarbij het hoekpunt van de rechte hoek van de geodriehoek rechts van punt A op k ligt. Hieronder staat eerst een constructie. Daarna wordt aan je gevraagd te bewijzen dat het resultaat inderdaad een geodriehoek is.

Op k zijn de punten B en C getekend zo dat $AB \perp BC$ en $AB = BC$. Punt D is op m getekend zo dat $DC \perp AC$.
Op k is vervolgens punt E getekend zo dat $\angle ADE = 45°$. Zie figuur 2. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

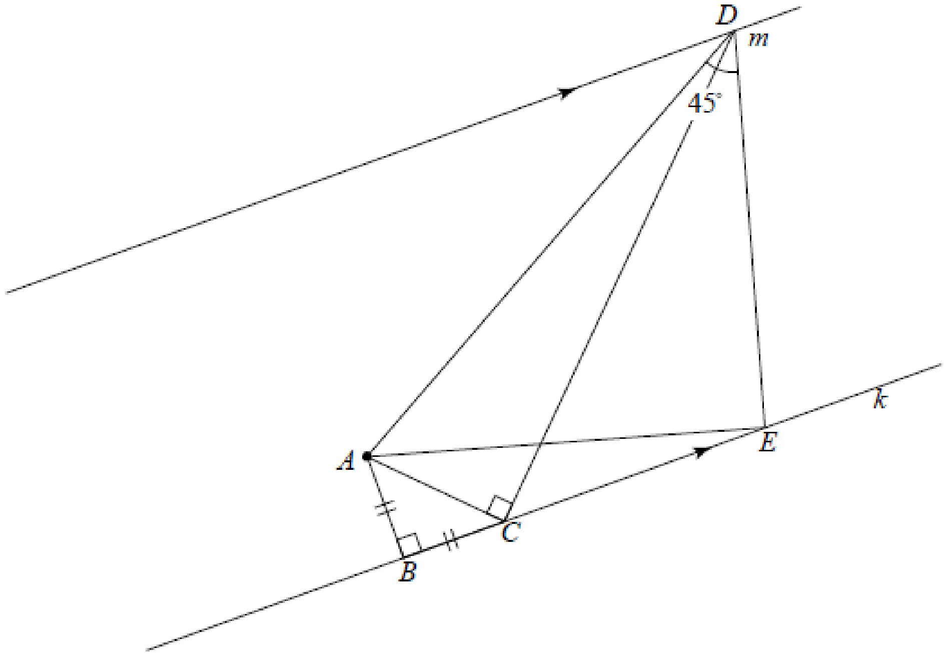
figuur 2



Er geldt: vierhoek $ACED$ is een koordenvierhoek.

4p **17** Bewijs dit.

Uitwerking

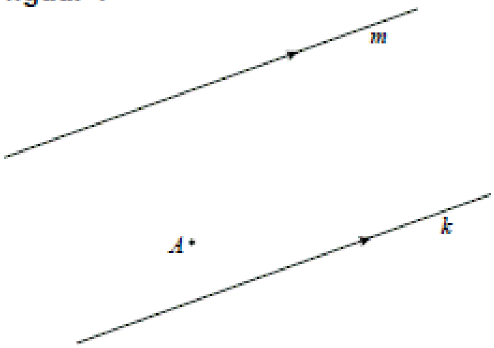


VWO wiskunde B 2010 II

Zoek de geodriehoek

Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen k en m en een punt A ertussenin. Zie figuur 1.

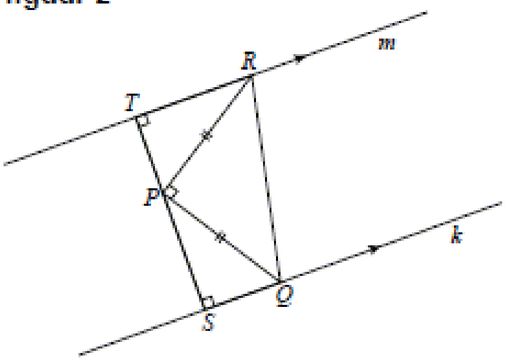
figuur 1



In deze opgave bekijken we hoe je op elk van de twee gegeven lijnen een punt kunt tekenen zo dat deze punten samen met punt A de hoekpunten zijn van een *geodriehoek*. Een *geodriehoek* is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.
We bekijken de situatie waarbij de hoek waarvan A het hoekpunt is, recht is.

Om te begrijpen hoe we die situatie kunnen tekenen, bekijken we figuur 2. Hierin is een geodriehoek PQR getekend, waarbij hoek P recht is en de punten Q en R respectievelijk op de (evenwijdige) lijnen k en m liggen. De loodlijn door P op k en m snijdt k in punt S en m in punt T.
Figuur 2 staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2



Er geldt: driehoek PQS is congruent met driehoek RPT.

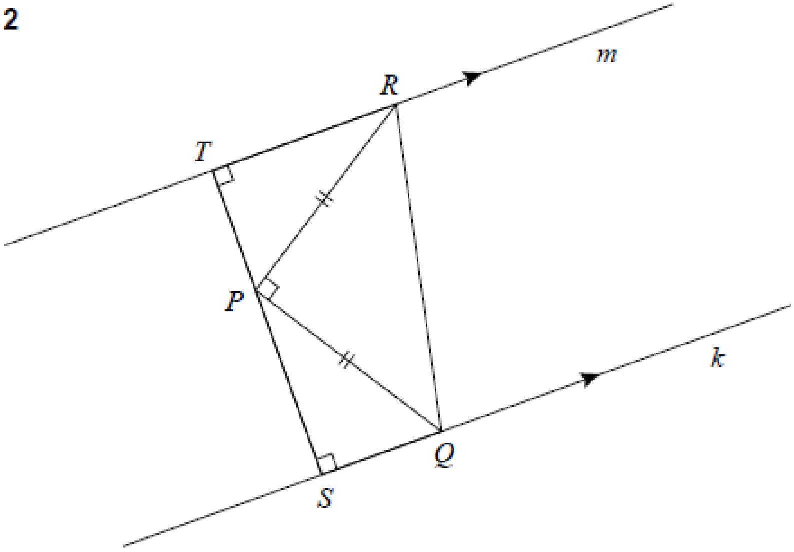
4p **12** Bewijs dit.

In de figuur op de uitwerkbijlage zijn twee evenwijdige lijnen k en m getekend met een punt A ertussenin.

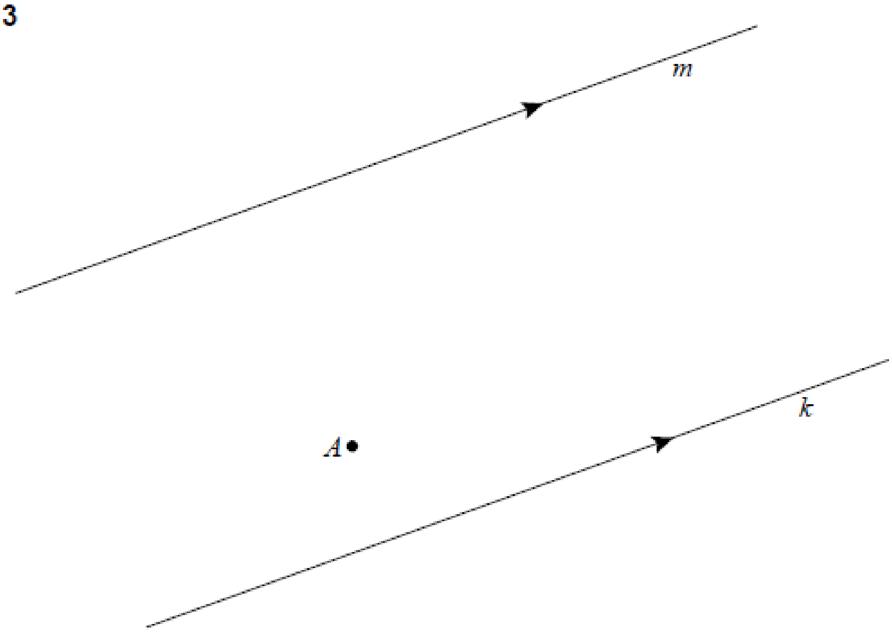
3p **13** Teken in deze figuur met behulp van wat hierboven over figuur 2 gezegd is een geodriehoek waarvan op elk van deze lijnen k en m een hoekpunt ligt en waarvan A het hoekpunt van de rechte hoek is. Licht je werkwijze toe.

Uitwerking

12



13

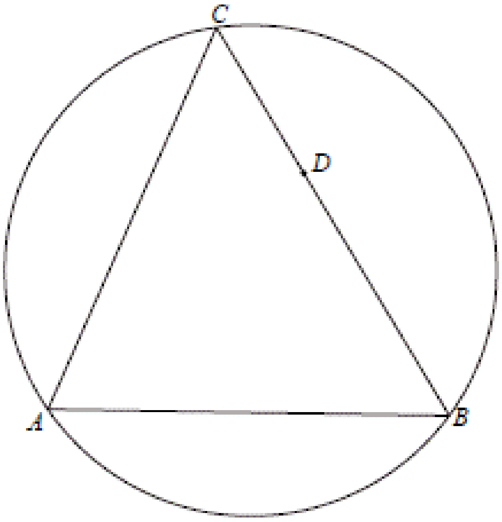


VWO wiskunde B 2011 I

Cirkels bij een driehoek

Gegeven is een driehoek ABC, met punt D op zijde BC. In figuur 1 is deze driehoek getekend met zijn omgeschreven cirkel. Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1

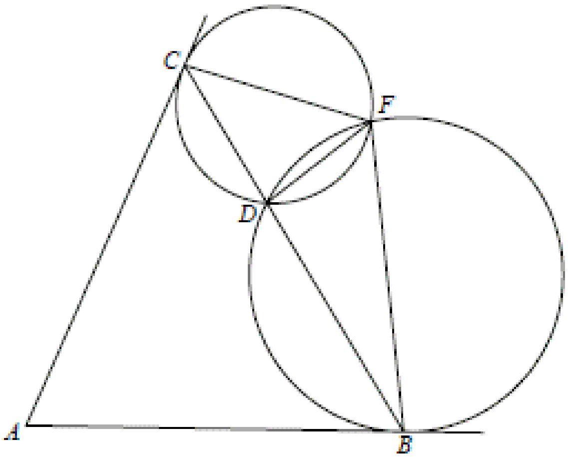


De cirkel door D die de lijn AB raakt in A, snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek ABC behalve in A ook in punt E.

3p **16** Teken op de uitwerkbijlage punt E. Licht je werkwijze toe.

De cirkel door D die de lijn AB raakt in B en de cirkel door D die de lijn AC raakt in C, hebben koorde DF gemeenschappelijk. Zie figuur 2.
Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

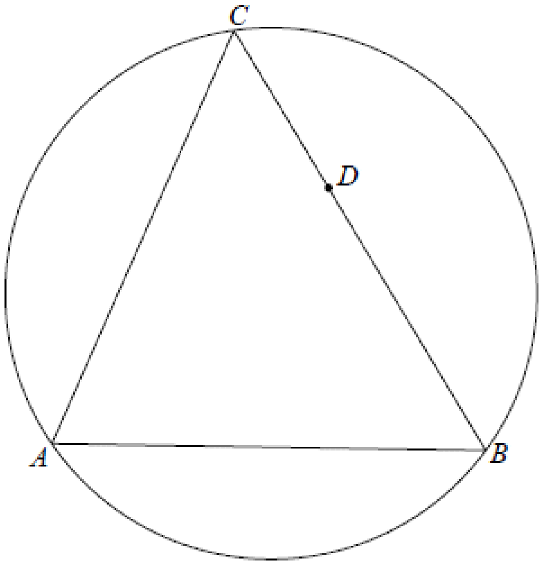
figuur 2



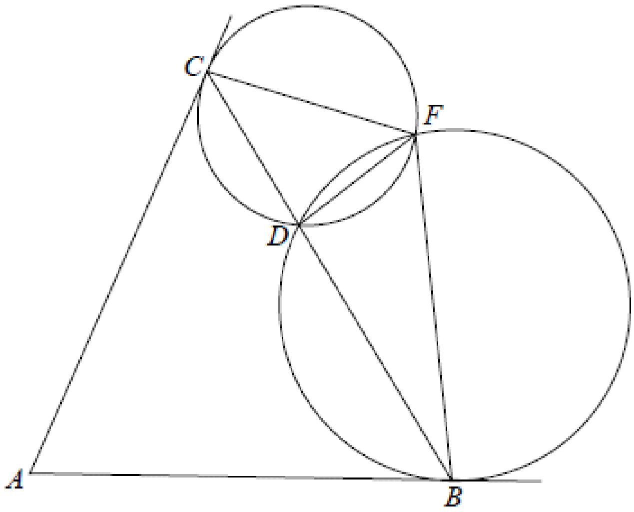
4p **17** Bewijs dat vierhoek $ABFC$ een koordenvierhoek is.

Uitwerkingen

16



17



VWO wiskunde B 2011 II

Het midden van een koorde

VWO wiskunde B 2011 II

Gegeven is een cirkel met middelpunt M.
Punt C ligt binnen de cirkel. C is niet gelijk aan M.
PQ is een koorde door C die niet door M gaat. Het midden van PQ is S.

3p **14** Bewijs dat S op de cirkel met middellijn MC ligt.

Uitwerking

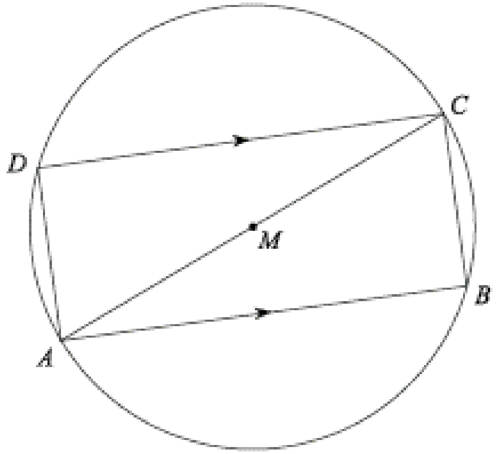
...

VWO wiskunde B 2012 I

Evenwijdige lijnen en een rechthoek

Op een cirkel met middelpunt M liggen de punten A, B, C en D zo dat AC een middellijn is en de lijnstukken AB en CD evenwijdig zijn. Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

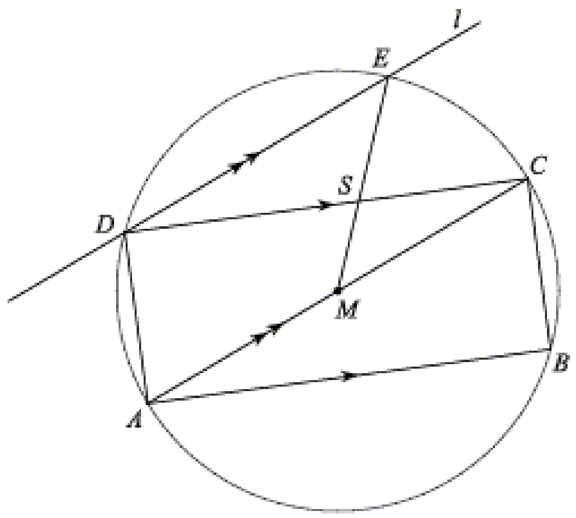
figuur 1



4p 16 Bewijs dat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is.

Door punt D trekken we de lijn l evenwijdig aan AC.
Lijn l snijdt de cirkel behalve in D ook in punt E. Lijnstuk ME snijdt CD in punt S.
Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

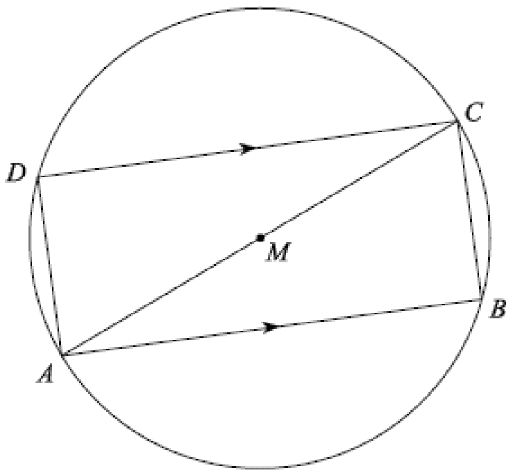
figuur 2



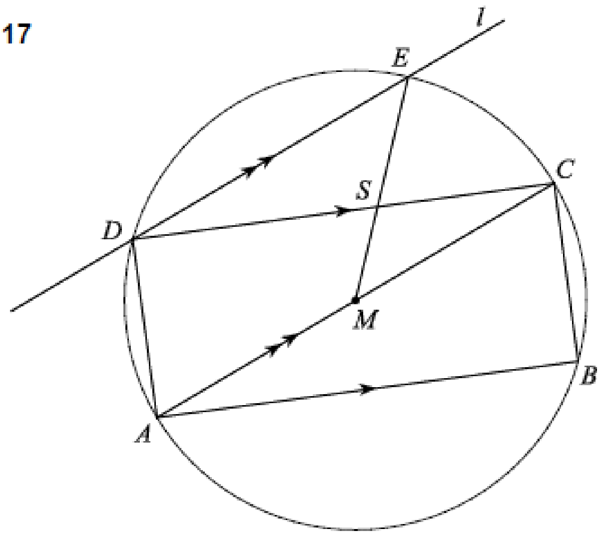
4p 17 Bewijs dat $\angle CSE = 3 \cdot \angle CDE$.

Uitwerking

16



17

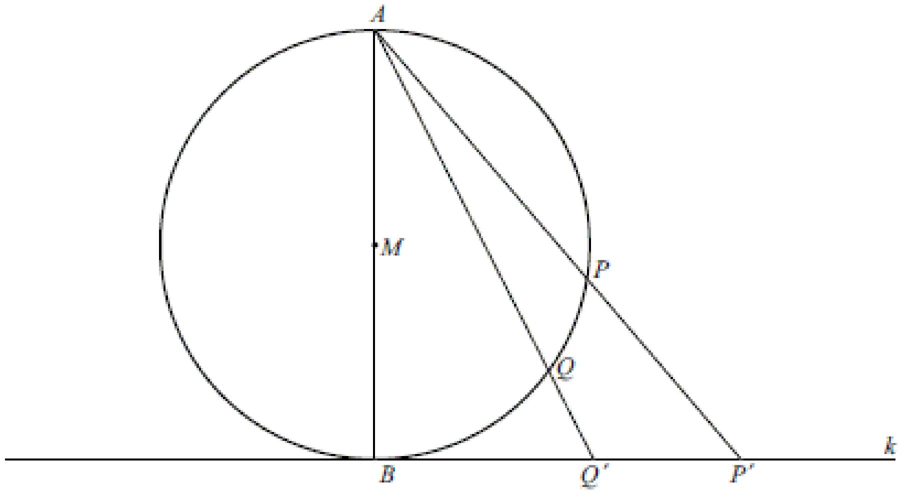


VWO wiskunde B 2012 II

Vier punten op een cirkel

Gegeven is een cirkel met middelpunt M en een middellijn AB. k is de raaklijn aan de cirkel in punt B.
Op de cirkel liggen twee punten P en Q zodanig dat P en Q beide aan dezelfde kant van AB liggen én dat Q op de kleinste boog tussen B en P ligt.
De snijpunten van de lijnen AP en AQ met k zijn respectievelijk P' en Q'.
De figuur hieronder staat twee maal op de uitwerkbijlage.

figuur



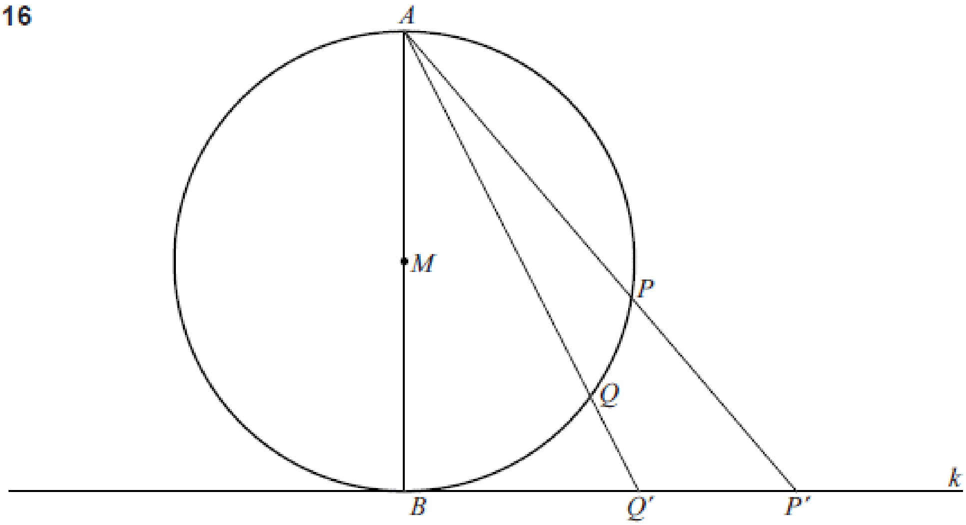
Er geldt: $\angle ABP = \angle AP'B$.

4p 16 Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruik maken van de uitwerkbijlage.

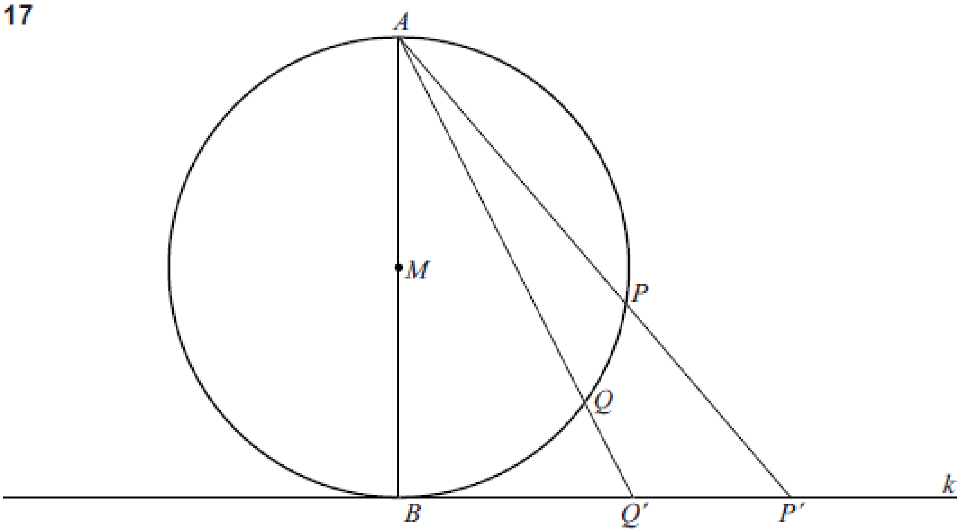
4p 17 Bewijs dat P, Q, Q' en P' op één cirkel liggen. Je kunt hierbij gebruik maken van de uitwerkbijlage.

Uitwerking

16



17

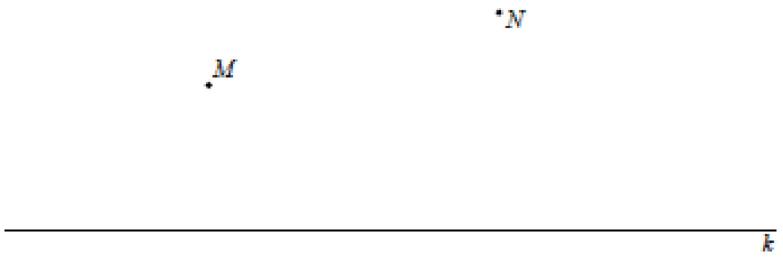


VWO wiskunde B 2013 I

Brandpunt gezocht

Gegeven zijn een lijn k en twee punten M en N die aan dezelfde kant van k liggen. Zie figuur 1.

figuur 1

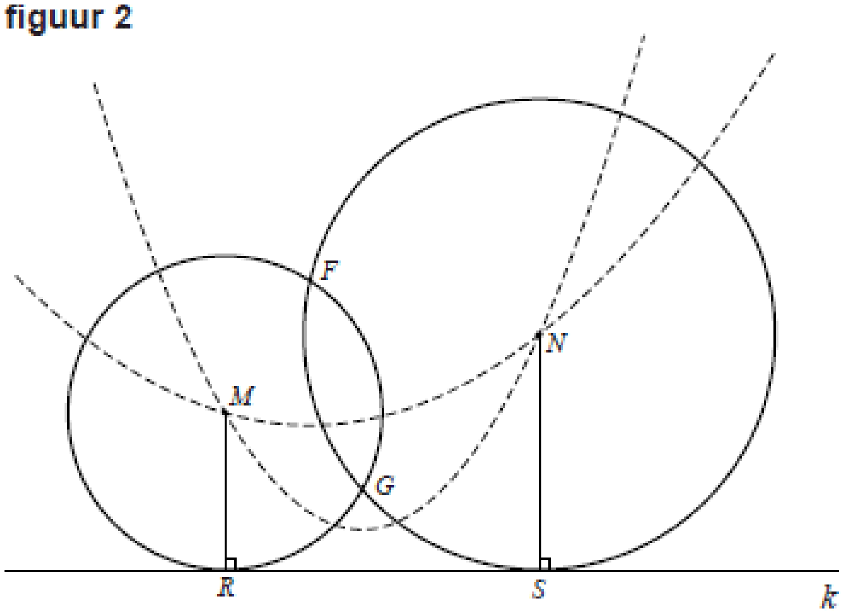


We zoeken het brandpunt van een parabool die door M en N gaat en waarvan k de richtlijn is.

Een geschikte werkwijze is:
- Teken de loodrechte projecties R en S van achtereenvolgens M en N op k.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal MR en de cirkel met middelpunt N en straal NS.

We nemen aan dat $MN < MR + NS$. Dan hebben de cirkels twee snijpunten F en G. Zowel F als G is brandpunt van een parabool door M en N met richtlijn k.
Zie figuur 2. In deze figuur zijn ook de bijbehorende parabolen getekend.

figuur 2



3p **18** Bewijs dat de punten M en N inderdaad liggen op de parabool met brandpunt F en richtlijn k.

Het punt M ligt op een afstand van 2 cm van k. Zie figuur 3.

figuur 3

Rechts van M ligt een punt N waarvoor geldt:
- de afstand van N tot de lijn k is 4 cm, en
- er is precies één parabool die door M en N gaat en waarvan k de richtlijn is.

3p **19** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de positie van N. Licht je antwoord toe.

Uitwerking

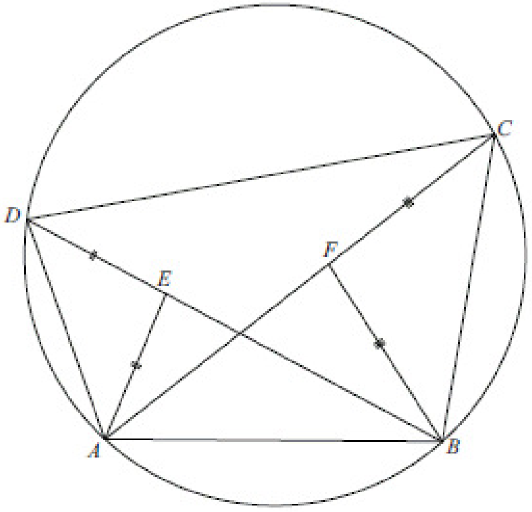
...

VWO wiskunde B 2013 II

Koordenvierhoek

Gegeven is een koordenvierhoek $ABCD$ met diagonalen AC en BD.
Op diagonaal BD ligt het punt E zo dat $EA = ED$. Op diagonaal AC ligt het punt F zo dat $FC = FB$. Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1

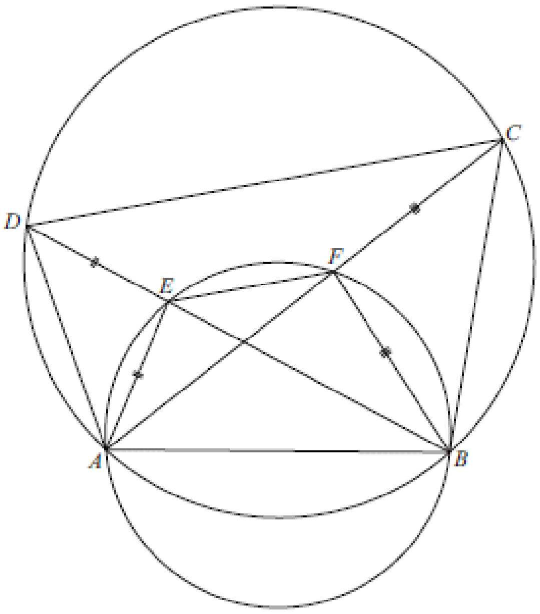


De punten A, B, F en E liggen op een cirkel.

5p **15** Bewijs dit.

In figuur 2 zijn ook het lijnstuk EF en de cirkel door A, B, F en E getekend.
Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

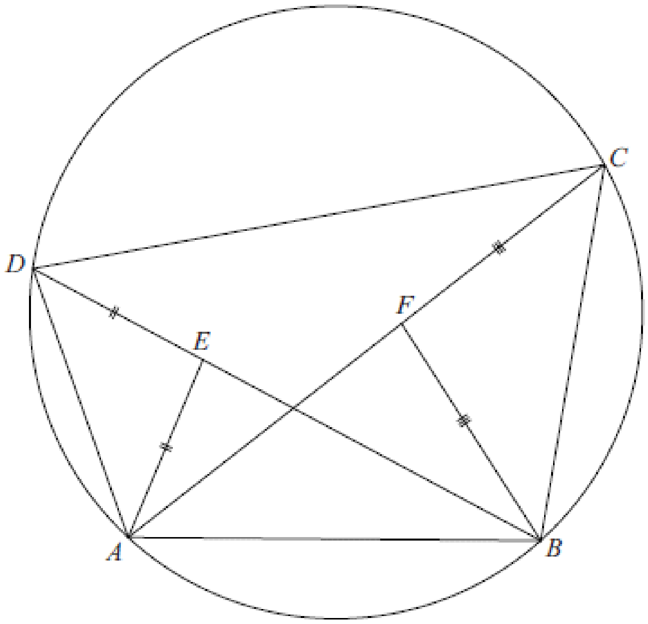
figuur 2



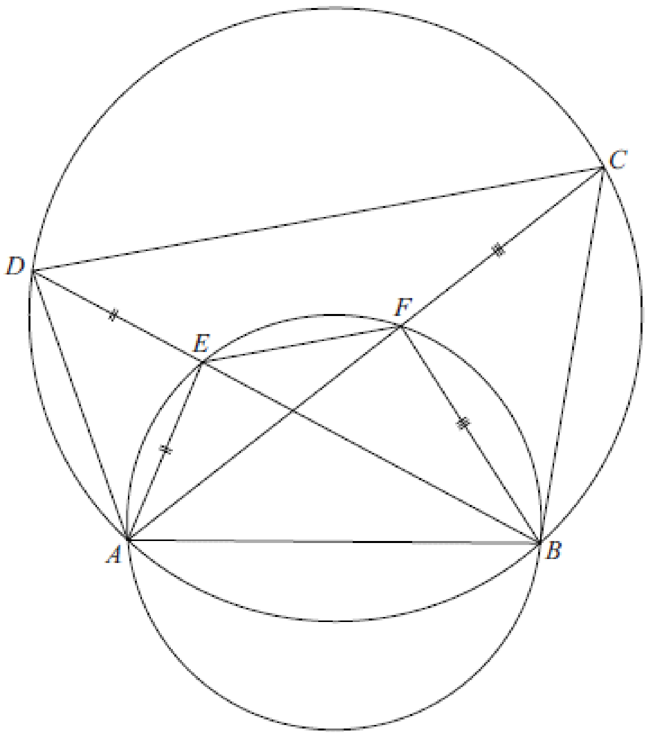
4p **16** Bewijs dat EF evenwijdig is aan DC.

Uitwerking

15



16



VWO wiskunde B 2014 I

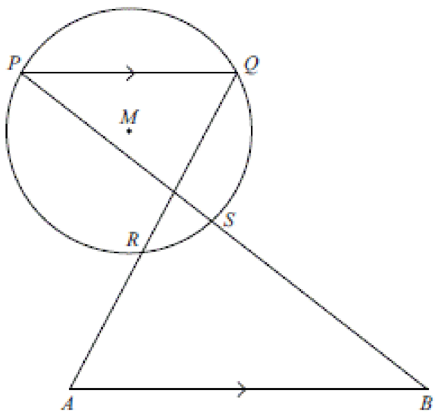
Koordenvierhoek

Gegeven zijn een cirkel met middelpunt M en een lijnstuk AB buiten de cirkel. De lijn door A en B snijdt de cirkel niet.

Punten P en Q worden zodanig op de cirkel gekozen dat aan de volgende voorwaarden is voldaan:
- koorde PQ is evenwijdig aan lijnstuk AB;
- lijnstuk AQ snijdt de cirkel in R;
- lijnstuk BP snijdt de cirkel in S;
- AQ snijdt BP binnen de cirkel.

Zie de figuur hieronder.

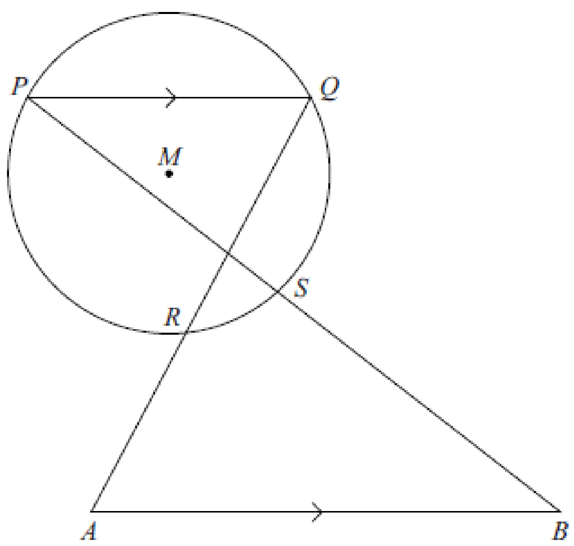
figuur



5p 18 Bewijs dat $ABSR$ een koordenvierhoek is. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Uitwerking

18

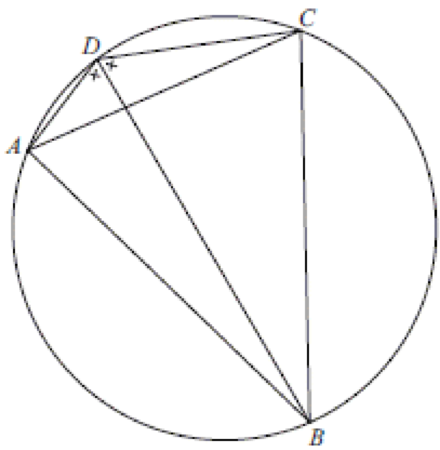


VWO wiskunde B 2014 II

Diagonalen en gelijke hoeken

Gegeven is een cirkel met een koordenvierhoek $ABCD$ met diagonalen AC en BD. Diagonaal BD verdeelt hoek ADC in twee gelijke hoeken. Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



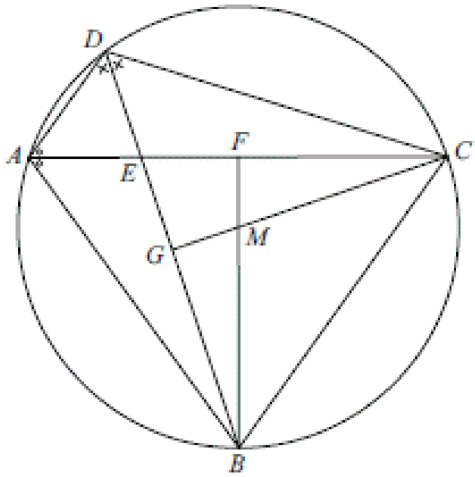
Voor deze koordenvierhoek geldt: AB en BC zijn even lang.

4p 16 Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

In figuur 2, die ook op de uitwerkbijlage staat, is opnieuw een cirkel getekend met een koordenvierhoek $ABCD$.
Er geldt nu:
- diagonaal BD verdeelt hoek ADC in twee gelijke hoeken;
- diagonaal AC verdeelt hoek BAD in twee gelijke hoeken.

De diagonalen snijden elkaar in het punt E.
De lijn door B en het middelpunt M van de cirkel snijdt diagonaal AC in het punt F. De lijn door C en M snijdt diagonaal BD in het punt G.

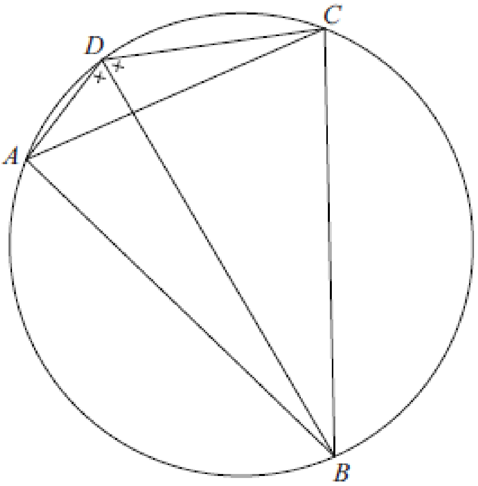
figuur 2



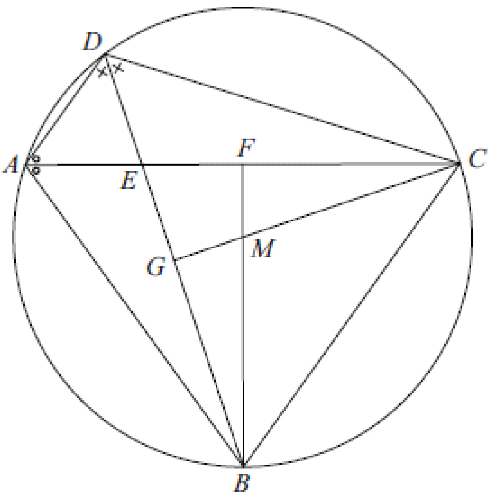
6p 17 Bewijs dat de punten E, F, M en G op één cirkel liggen. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Uitwerking

16



17

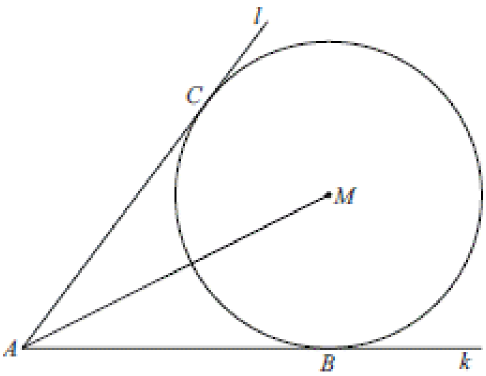


VWO wiskunde B 2015 I

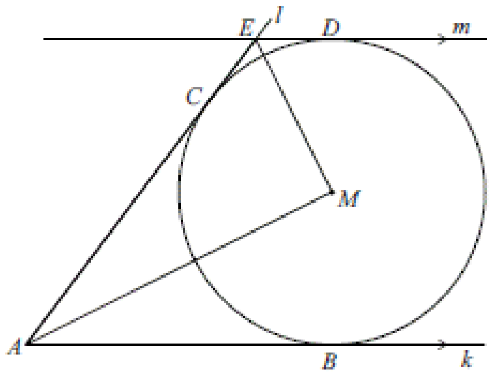
Raken aan een cirkel

Gegeven zijn twee halve lijnen k en l vanuit punt A en een cirkel met middelpunt M die zowel k als l raakt. De raakpunten van k en l aan de cirkel zijn respectievelijk B en C. Zie figuur 1.
Uit de congruentie van driehoek ABM en driehoek ACM volgt dat AM bissectrice is van hoek BAC.

figuur 1



figuur 2

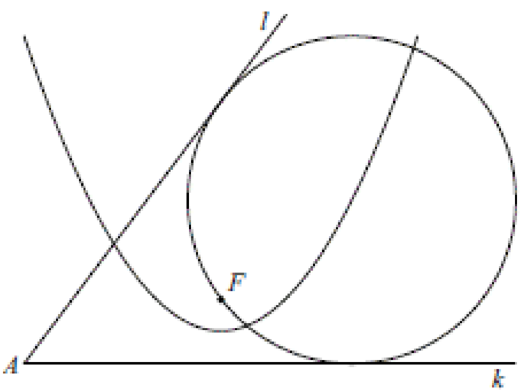


In figuur 2 is de situatie van figuur 1 uitgebreid. Lijn m is evenwijdig aan k en raakt de cirkel in punt D. De lijnen l en m snijden elkaar in punt E.
Uit de congruentie van driehoek ECM en driehoek EDM volgt dat EM bissectrice is van hoek CED. Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

5p 16 Bewijs dat $\angle AME = 90°$.

In figuur 3 zijn weer twee halve lijnen k en l vanuit punt A getekend. De hoek tussen k en l is scherp. Tussen deze halve lijnen ligt een punt F. Ook is de parabool getekend die brandpunt F en richtlijn k heeft. Door F kunnen twee cirkels worden getekend die zowel k als l raken. Een van deze cirkels is getekend. Figuur 3 staat vergroot op de uitwerkbijlage.

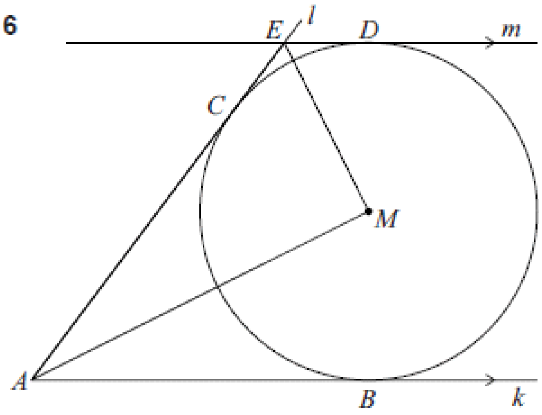
figuur 3



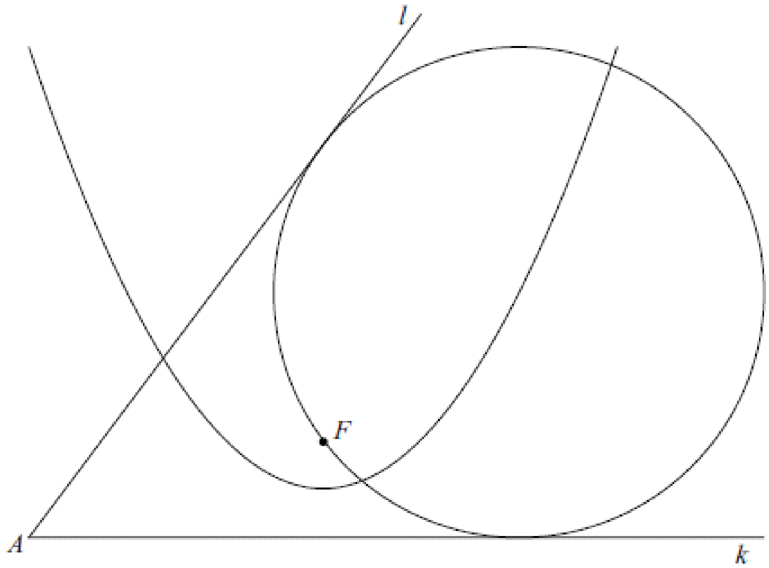
4p 17 Teken in de figuur op de uitwerkbijlage het middelpunt N van de andere cirkel. Licht je werkwijze toe.

Uitwerking

16



17

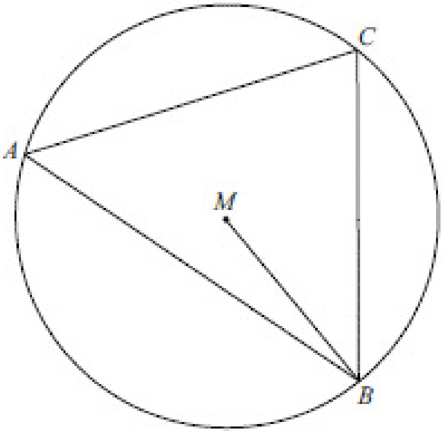


VWO wiskunde B 2015 II

Koordenvierhoek maken

Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC. M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.
Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1

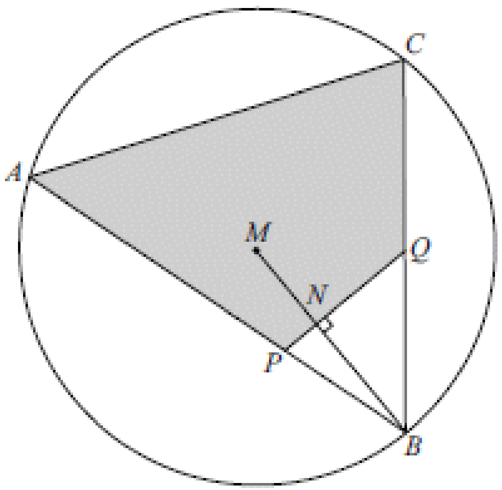


Er geldt: $\angle CBM = 90° - \angle CAB$.

4p **12** Bewijs dit.

In de driehoek van figuur 1 maken we nu als volgt een vierhoek.
Kies een punt N op lijnstuk MB. De loodlijn in N op MB snijdt de lijnstukken AB en BC in respectievelijk punt P en punt Q.
Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

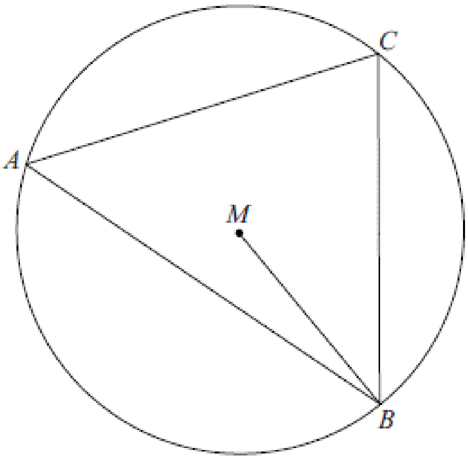
figuur 2



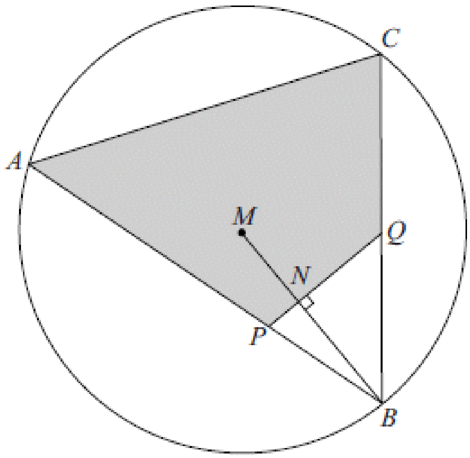
4p **13** Bewijs dat $APQC$ een koordenvierhoek is.

Uitwerking

12



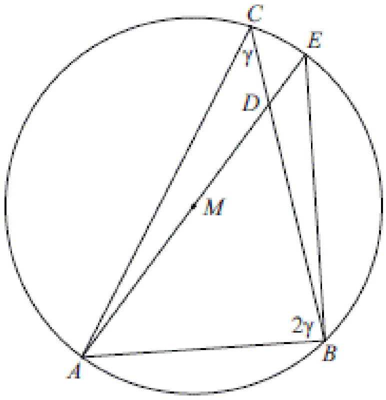
13



VWO wiskunde B 2016 I

Gegeven is een driehoek ABC, waarbij hoek B twee keer zo groot is als hoek C. Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC ligt binnen deze driehoek. Middellijn AE snijdt zijde BC in punt D.
Zie figuur 1.
Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

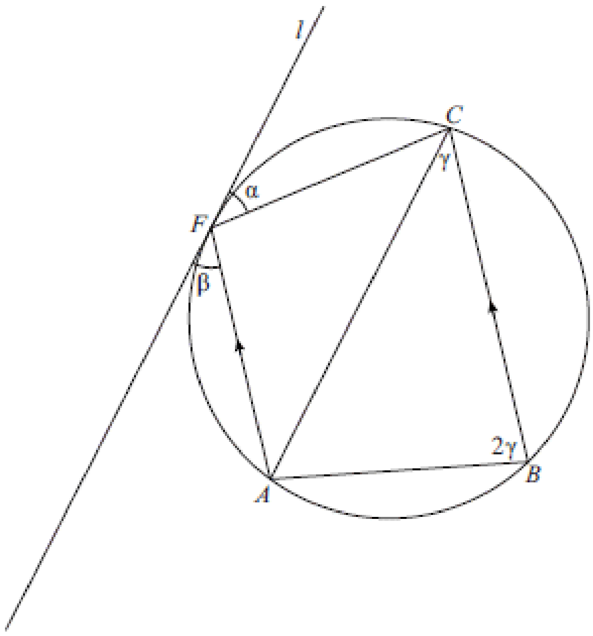
figuur 1



4p 13 Bewijs dat driehoek ABD gelijkbenig is.

In figuur 2 is opnieuw de driehoek ABC getekend met zijn omgeschreven cirkel. De lijn door A evenwijdig met zijde BC snijdt de cirkel behalve in A ook in punt F.
Lijn l raakt de cirkel in F. De hoek tussen l en lijnstuk CF is α en de hoek tussen l en lijnstuk AF is β.
Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

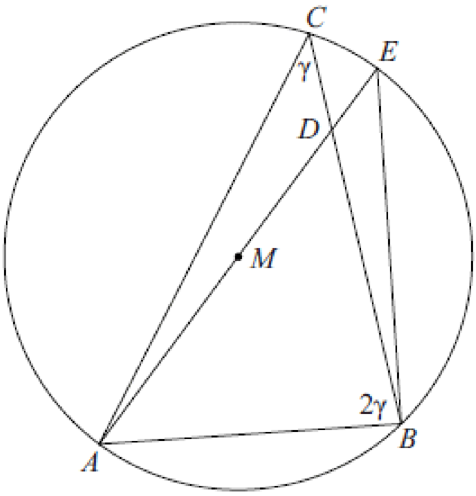
figuur 2



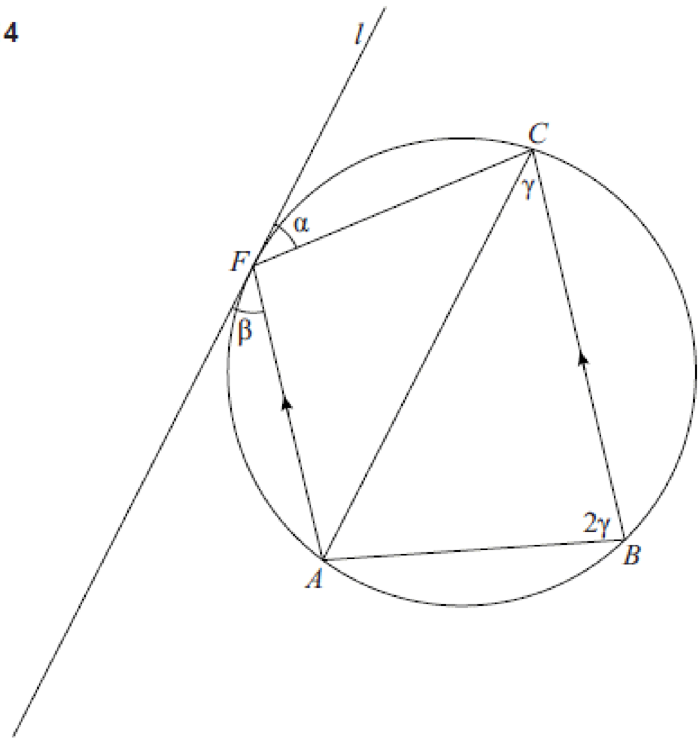
5p 14 Bewijs dat l evenwijdig is aan AC.

Uitwerking

13



14



VWO wiskunde B 2016 II

Driehoek, cirkel en koordenvierhoek

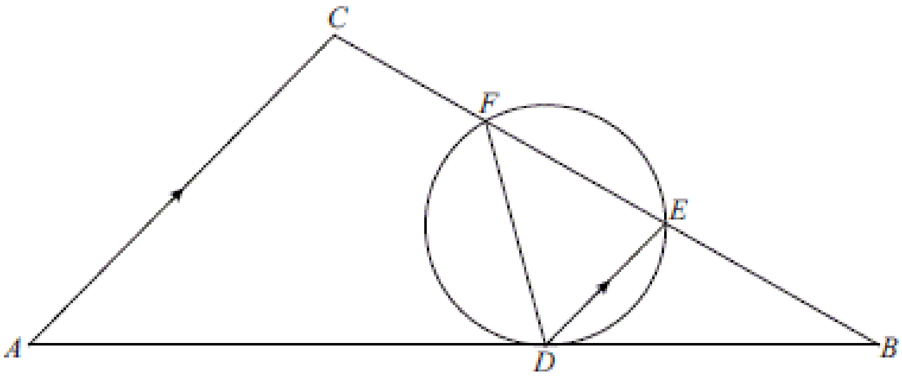
VWO wiskunde B 2016 II

Gegeven is driehoek ABC. Verder is gegeven een cirkel, zo dat

- de cirkel zijde AB in punt D raakt;
- de cirkel zijde BC in twee punten E en F snijdt;
- zijde DE evenwijdig aan zijde AC is.

Zie de figuur, die ook op de uitwerkbijlage staat.

figuur



4p 16 Bewijs dat vierhoek $ADFC$ een koordenvierhoek is.

Uitwerking

16