

Hoofdstuk 9 - exponentiele verbanden



[KC] exponentiële verbanden

0. voorkennis

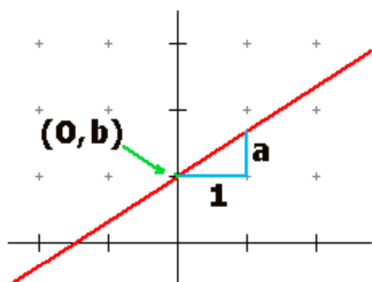
Procenten en vermenigvuldigingsfactoren Procentuele toename met $p\%$: $g = 1 + \frac{p}{100}$ $p = (g - 1) \cdot 100$ Procentuele afname met $p\%$: $g = 1 - \frac{p}{100}$ $p = (1 - g) \cdot 100$ Vuistregels: ✓ Geef kleinere geldbedragen in centen nauwkeurig. ✓ Geef procenten in één decimaal nauwkeurig (tenzij anders vermeld) ✓ Geef NIEUW en OUD in dezelfde nauwkeurigheid. Bij een toename van 15% hoort een vermenigvuldigingsfactor van 1,15 NIEUW = 1,15 × OUD Bij een afname van 15% hoort een vermenigvuldigingsfactor van 0,85. NIEUW = 0,85 × OUD ✓ Rekenen met procenten en groeifactoren	De constante factor In 1859 werden door een Engelsman 24 wilde konijnen ingevoerd in Australië voor de plezierjacht. De natuurlijke vijand van het konijn ontbrak in Australië en er ontstond een ware konijnenplaag. Neem aan dat het aantal konijnen elk jaar met 12,3% toenam. ✓ Hoeveel konijnen waren er in 2000?  Uitwerking ✓ $N(2000) = 24 \cdot 1,123^{141} \approx 304.618.920$ Dat zijn dan ongeveer 300 miljoen konijnen.
Procent op procent Een hoeveelheid neemt in de periode 2000-2010 toe met 15% en in periode 2010-2015 toe met 20%. De toename in de periode 2000-2015 bereken je dan als volgt: $\text{Toename} = 1,15 \cdot 1,20 = 1,38$ De toename in de periode 2000-2015 is 38%.	Voorbeeld 1 Je zet 500 euro op de bank tegen een rente van 5% per jaar. ✓ Hoeveel is je banktegoed na 50 jaar? Uitwerking De groeifactor is 1,05. Het startbedrag is 500 euro. Na 50 jaar heb je: $B = 500 \cdot 1,05^{50} \approx 5734$ Het tegoed is ongeveer 5734 euro.

1. twee soorten groei

Lineaire groei

Bij lineaire groei:

- ✓ neemt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal toe
- ✓ hoort een formule van de vorm $N = at + b$, waarin a de toename per tijdseenheid is en b de beginhoeveelheid
- ✓ is de grafiek een rechte lijn

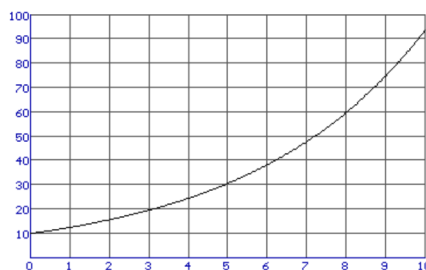


✓ **lineaire verbanden**

Exponentiële groei

Bij exponentiële groei

- ✓ wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd
- ✓ hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarin g de groeifactor per tijdseenheid is en b de beginwaarde.



Tabellen bij exponentiële groei

Het herkennen van exponentiële groei bij een tabel:

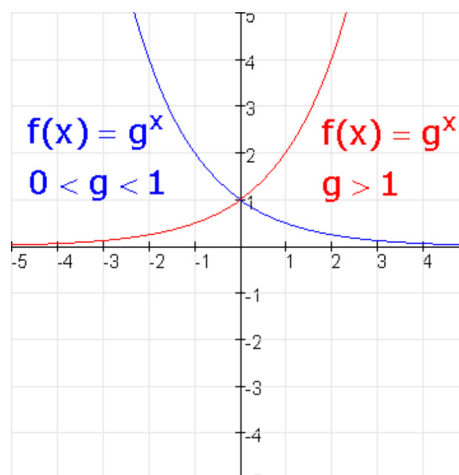
1. Bereken voor even lange tijdsintervallen de groeifactor:

$$g = \frac{\text{nieuw}}{\text{oud}}$$

2. Verschillen de uitkomsten weinig, dan mag je uitgaan van exponentiële groei.

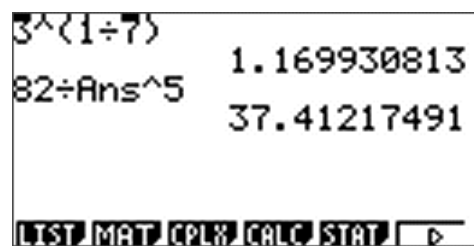
		+1	+1	+1	+1
x	0	1	2	3	4
y	100	80	64	51	41
		x0,8	x0,8	x0,8	x0,8

Grafieken bij exponentiële groei



2. groeipercentages

Groeifactor en groeipercentage Van percentage naar groeifactor: ✓ $g = 1 + \frac{p}{100}$ ✓ Bij een toename van 32% hoort een groeifactor van 1,32 ✓ Bij een afname van 22% hoort een groeifactor van 0,78 Van groeifactor naar percentage: ✓ $p = (g - 1) \cdot 100$ ✓ Bij een groeifactor van 0,8 hoort een afname van 20% ✓ Bij een groeifactor van 1,67 hoort een toename van 67% Lastige gevallen: ✓ Bij een toename van 450% hoort een groeifactor van 5,5 ✓ Bij een groeifactor van 8 hoort een toename van 700%. Voorbeeld 1 In 1859 werden door een Engelsman 24 wilde konijnen ingevoerd in Australie voor de plezierjacht. De natuurlijke vijand van het konijn ontbrak in Australie en er ontstond een ware konijnenplaag. In 2000 waren er ruim 300 miljoen konijnen. ✓ Als we veronderstellen dat de groei exponentieel verliep, bepaal dan het groeipercentage per jaar. Zie uitwerking voorbeeld 1	Groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid Is g de groeifactor is per tijdseenheid dan is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n. Dat geldt ook voor niet-gehele n. Als de groeifactor per uur bijvoorbeeld 1,25 is dan is de groeifactor: ✓ per 3 uur: $1,25^3$ ✓ per dag: $1,25^{24}$ ✓ per half uur: $1,25^{\frac{1}{2}}$ ✓ per minuut: $1,25^{\frac{1}{60}}$ Het omrekenen van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid doe je met groeifactoren. Voorbeeld ✓ Een hoeveelheid neemt toe met 2,5% per uur. Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid toe per dag? De groeifactor per dag: $1,025^{24} \approx 1,809$, dus de hoeveelheid neemt toe met 80,9% per dag. Voorbeeld 2 Om aan te tonen dat er sprake is van exponentiële groei moet je laten zien dat de groeifactor per tijdseenheid constant is. <table><tr><td>tijd in minuten</td><td>2</td><td>5</td><td>10</td><td>20</td></tr><tr><td>aantal</td><td>94</td><td>175</td><td>491</td><td>3895</td></tr></table> ✓ Laat zien dat hier sprake is van exponentiële groei. Zie uitwerking voorbeeld 2	tijd in minuten	2	5	10	20	aantal	94	175	491	3895
tijd in minuten	2	5	10	20							
aantal	94	175	491	3895							

De rekenmachine

Denk aan de haakjes bij de rekenmachine...

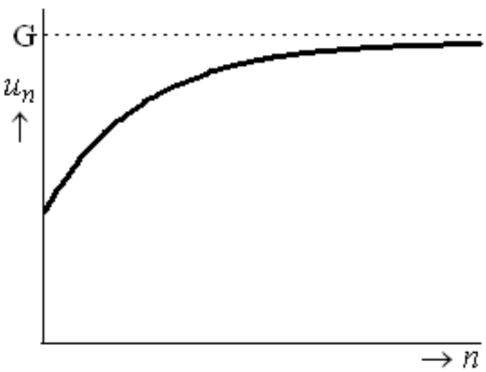
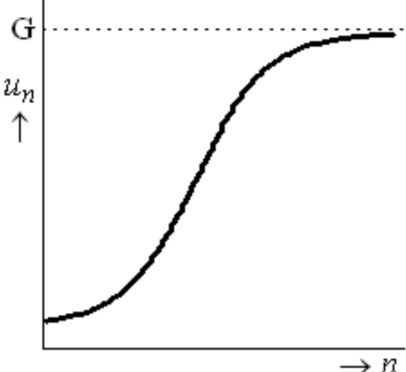
Afspraak

Groeipercentages geef je in 1 decimaal en groeifactoren in 3 decimalen tenzij anders wordt gevraagd.

3. verdubbelingstijden en halveringstijden

Verdubbelingstijd De verdubbelingstijd bij exponentiële groei is de tijdsduur die nodig is voor verdubbeling van een hoeveelheid. Bij exponentiële groei met groeifactor g vind je de verdubbelingstijd door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen. Je kunt de vergelijking $g^t = 2$ oplossen met je GR. ✓ Zie SOLVER	Halveringstijd De halveringstijd bij exponentiële groei is de tijdsduur waarin de hoeveelheid gehalveerd wordt. Is de groeifactor g dan vind je de halveringstijd door de vergelijking $g^t = 0,5$ op te lossen. Je kunt de vergelijking $g^t = 0,5$ oplossen met je GR. ✓ Zie SOLVER
Voorbeeld 1 Gegeven is de formule $N = 6 \cdot 1,25^t$. Hierin is t de tijd in jaren. ✓ Bereken de verdubbelingstijd in maanden. Uitwerking Er moet gelden dat $1,25^t = 2$. Oplossen met de SOLVER geeft:  Math Deg Norm1 ab/c Real Eq: $1.25^x = 2$ $x = 3.10628372$ Lft = 2 Rgt = 2 REPEAT Dat komt (ongeveer) overeen met 37 maanden.	Voorbeeld 2 Gegeven is de formule $N = 6 \cdot 0,8^t$. Hierin is t de tijd in jaren. ✓ Bereken de halveringstijd in maanden. Uitwerking Er moet gelden dat $0,8^t = 0,5$. Oplossen met de SOLVER geeft:  Math Deg Norm1 ab/c Real Eq: $.8^x = .5$ $x = 3.10628372$ Lft = 0.5 Rgt = 0.5 REPEAT Dat komt (ongeveer) overeen met 37 maanden.
Opgave 1 De bevolking van een land is in 10 jaar met 30% toegenomen. De laatste 8 jaar was de toename 2,6% per jaar. De eerste twee jaar nam de bevolking toe met een vast percentage per jaar. ✓ Bereken dat vast percentage van de eerste twee jaar. Zie uitwerking opgave 1	Opgave 2 Een bedrag is eerst met 10% afgenomen en daarna verder afgenomen met 15%. ✓ Met hoeveel procent moet het bedrag toenemen om weer op de 'oude' waarde uit te komen? Zie uitwerking opgave 2

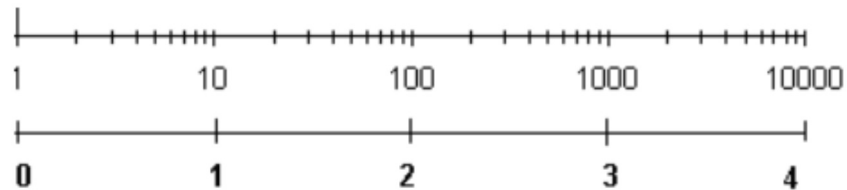
4. formules bij groeiverschijnselen

Een formule opstellen bij exponentiële groei Is bij een exponentiële groei de hoeveelheid op twee tijdstippen bekend dan kun je de bijbehorende formule opstellen.. Je berekent eerst de groeifactor per tijdseenheid en daarna de beginhoeveelheid. ✓ $N = b \cdot g^t$	Voorbeeld 1 Gegeven is exponentiële groei met $N(4) = 1040$ en $N(10) = 2510$ met t in dagen ✓ Stel een formule op. Voorbeeld 2 Gegeven is exponentiële afname met $N(2) = 800$ en $N(7) = 200$ met t in dagen. ✓ Stel een formule op.
Afspraak Geef de beginhoeveelheid in dezelfde nauwkeurigheid als de gegevens, tenzij anders vermeld... Zie de opmerking bij de uitwerkingen	Exponentiële verband Je kunt ook te maken met een exponentiële verband waarbij tijd niet een van de variabelen is. Je kunt dan niet spreken over de groeifactor per tijdseenheid, maar wel over de groeifactor per andersoortige eenheid.
Begrensd groei  Hierboven zie je de grafiek van begrensd groei. Hierbij neemt de hoeveelheid in het begin toe maar bereikt uiteindelijk het verzadigingsniveau. Voorbeeld 3 De formule $N = 50(1 - 0,6^t)$ beschrijft een voorbeeld van begrensd groei. ✓ Beredeneer dat het verzadigingsniveau gelijk aan 50 is.	Logistische groei  Hierboven zie je de grafiek van een ander groeiproces. In het begin neemt de hoeveelheid exponentieel toe, maar daarna wordt de groei afgeremd. Voorbeeld 4 De formule $N = \frac{50}{1 + 18 \cdot 0,6^t}$ beschrijft een voorbeeld van logistische groei. ✓ Beredeneer dat de grafiek stijgend is.

5. logaritmisch papier

Logaritmische schaalverdeling

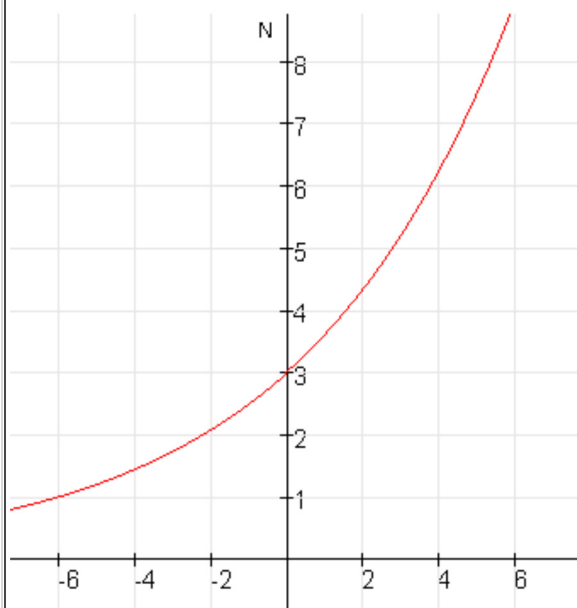
Van een gewone schaalverdeling naar je logaritmische schaalverdeling door elk getal n te vervangen door 10^n :



Het voordeel van een logaritmische schaalverdeling is dat je waarnemingen kunt uitzetten die sterk in grootte verschillen.

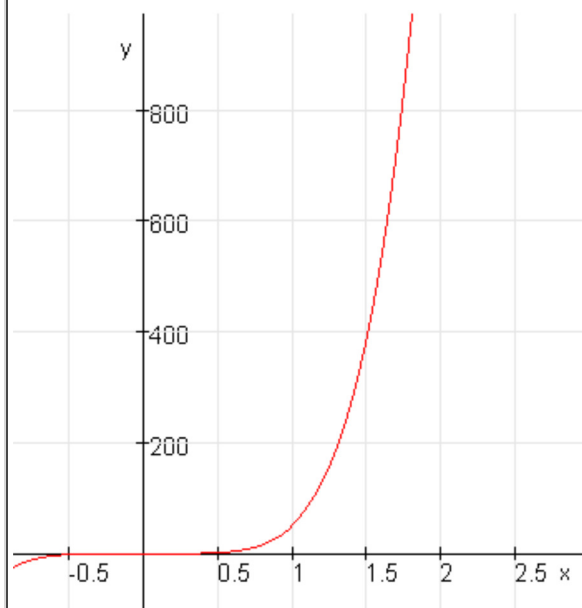
Logaritmische papier

Je ziet hier de grafiek van:
 $N = 3 \cdot 1,2^t$



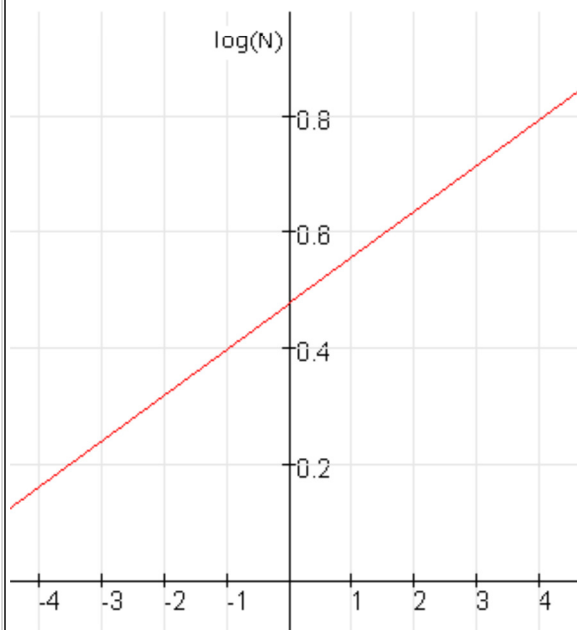
Dubbellogaritmisch papier

Je ziet hier de grafiek van:
 $y = 50 \cdot x^5$



Logaritmische papier

Als je voor de **verticale as** niet N zet maar $\log(N)$ krijg je deze grafiek:



De grafiek is dan een **rechte lijn**.

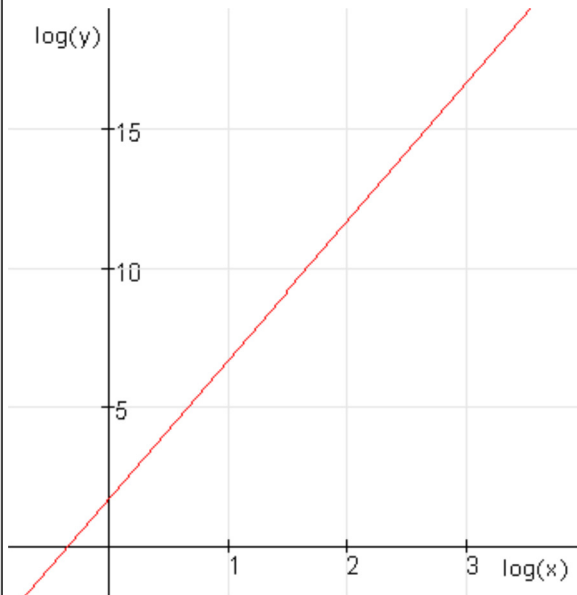
Logaritmische papier - exponentieel verband

De grafiek van een exponentieel verband wordt op enkellogaritmisch papier weergegeven als een rechte lijn.

- ✓ Je kunt vanuit een rechte lijn op enkellogaritmisch papier de formule afleiden
- ✓ Je kunt een functie tekenen op enkellogaritmisch papier.

Dubbellogaritmisch papier

Als je op de **verticale as** niet N zet maar $\log(N)$ en op **horizontale as** niet x maar $\log(x)$ krijg je deze grafiek:



De grafiek is dan een **rechte lijn**.

Logaritmische papier - machtsverband

De grafiek van een machtsverband wordt op dubbellogaritmisch papier weergegeven als een rechte lijn.

- ✓ Je kunt een functie tekenen op dubbellogaritmisch papier.



Logaritmisch papier

- ✓ Zie **bestanden**