Formularium:

Analytische ruimtemeetkunde van de eerste graad

1. Affiene ruimtemeetkunde

1.1 Rechte

Gegeven: $P_1(x_1, y_1, z_1); P_2(x_2, y_2, z_2)$ t.o.v. basis $(\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3})$

Richtingsvector van de rechte P_1P_2: $\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}$

Stel richtingsgetallen van de rechte P_1P_2: $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Gegeven: punt $\overrightarrow{P_1}(x_1, y_1, z_1)$ en richtingsvector $\overrightarrow{R}(a,b,c)$ van de rechte *a*

Vectoriële vergelijking van *a*: $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_1} + k.\overrightarrow{R}$ $\quad (k \in \mathbb{R})$

Stelsel parametervergelijkingen van *a*:
$$\begin{cases} x = x_1 + k.a \\ y = y_1 + k.b \\ z = z_1 + k.c \end{cases}$$

Stelsel cartesische vergelijkingen van *a*:
$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Gegeven: 2 punten $\overrightarrow{P_1}(x_1, y_1, z_1)$ en $\overrightarrow{P_2}(x_2, y_2, z_2)$ van de rechte *b*

Vectoriële vergelijking van *b*: $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_1} + k(\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1})$

Stelsel parametervergelijkingen van *b*:
$$\begin{cases} x = x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + k(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + k(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Stelsel cartesische vergelijkingen van *b*:
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Rechte als snijlijn van 2 vlakken:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Richtingsgetallen van een rechte gegeven als snijlijn van 2 vlakken:
$$a = k\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad ; \quad b = -k\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad ; \quad c = k\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Stelsel cartesische vergelijkingen van
$$x - as: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad y - as: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad z - as: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

1.2 Vlak

Gegeven: $P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2), P_3(x_3,y_3,z_3)$ t.o.v. basis $(\vec{E_1},\vec{E_2},\vec{E_3})$

Paar richtingsvectoren van het vlak $P_1P_2P_3$: $\{\vec{P_2}-\vec{P_1},\vec{P_3}-\vec{P_1}\}$

Paar stellen richtingsgetallen van het vlak $P_1P_2P_3$:

$$\{(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)\}$$

Gegeven: 1 punt $\vec{P_1}(x_1,y_1,z_1)$ en 2 richtingsvectoren $\vec{R}(a_1,b_1,c_1),\vec{S}(a_2,b_2,c_2)$ van een vlak α

Vectoriële vergelijking van α: $\vec{P}=\vec{P_1}+k.\vec{R}+m.\vec{S}$ $\quad (k,m\in\mathbb{R})$

Stelsel parametervergelijkingen van α:

$$\begin{cases} x=x_1+k.a_1+m.a_2 \\ y=y_1+k.b_1+m.b_2 \\ z=z_1+k.c_1+m.c_2 \end{cases}$$

Cartesische vergelijking van α:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Gegeven: 3 punten $\vec{P_1}(x_1,y_1,z_1),\vec{P_2}(x_2,y_2,z_2),\vec{P_3}(x_3,y_3,z_3)$ van een vlak β

Vectoriële vergelijking van β: $\vec{P}=\vec{P_1}+k(\vec{P_2}-\vec{P_1})+m(\vec{P_3}-\vec{P_1})$

Stelsel parametervergelijkingen van β:

$$\begin{cases} x=x_1+k(x_2-x_1)+m(x_3-x_1) \\ y=y_1+k(y_2-y_1)+m(y_3-y_1) \\ z=z_1+k(z_2-z_1)+m(z_3-z_1) \end{cases}$$

Cartesische vergelijking van β:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Cartesische vergelijking van een vlak gegeven 2 punten $\vec{P_1}(x_1,y_1,z_1),\vec{P_2}(x_2,y_2,z_2)$ en een richtingsvector $\vec{R}(a,b,c)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}=0$$

Algemene gedaante van de vergelijking van een vlak:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{met} \quad \neg(A=B=C=0)$$

Cartesische vergelijking van

$xy-vlak: z=0$; $yz-vlak: x=0$; $xz-vlak: y=0$

4 punten P_1, P_2, P_3, P_4 zijn coplanair $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

1.3 Bijzondere punten

Midden van een lijnstuk $[P_1P_2]$: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

Zwaartepunt van driehoek ABC: $Z\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

Zwaartepunt van viervlak $ABCD$: $Z\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$

Puntvector en coördinaten van een punt met gegeven deelverhouding k t.o.v. (P_1, P_2):

$$k = \frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{PP_2}} \Leftrightarrow \vec{P} = \frac{\vec{P_1} - k\vec{P_2}}{1-k}$$

$$\vec{P}\left(\frac{x_1 - kx_2}{1-k}, \frac{y_1 - ky_2}{1-k}, \frac{z_1 - kz_2}{1-k}\right)$$

1.4 Evenwijdige stand

Gegeven de rechten e met richtingsgetallen (a,b,c) en f met richtingsgetallen (a',b',c'):

$$e \parallel f \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0 : a' = k.a \wedge b' = k.b \wedge c' = k.c$$

Gegeven de vlakken $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ en $\beta : A'x + B'y + C'z + D' = 0$:

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0 : A' = k.A \wedge B' = k.B \wedge C' = k.C$$

Gegeven de rechte e met richtingsgetallen (a,b,c) en het vlak $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$:

$$e \parallel \alpha \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc = 0$$

2. Euclidische ruimtemeetkunde

2.1 Scalair product

Definitie:

$$\forall \vec{A},\vec{B} \in S_0 \setminus \{\vec{O}\} : \vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\left(\widehat{\vec{A}\vec{B}}\right)$$

$$\forall \vec{A},\vec{B} \in S_0 : \vec{A}.\vec{O} = \vec{O}.\vec{B} = 0$$

Eigenschappen:

$$\vec{A}.\vec{B} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

$$\vec{A}^2 = |\vec{A}|^2$$

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$$

Een basis $\left(\vec{E_1},\vec{E_2},\vec{E_3}\right)$ is **georthonormeerd**

$$\Leftrightarrow \vec{E_1}.\vec{E_2} = \vec{E_2}.\vec{E_3} = \vec{E_3}.\vec{E_1} = 0 \wedge \vec{E_1}^2 = \vec{E_2}^2 = \vec{E_3}^2 = 1$$

Analytische uitdrukking van het scalair product **t.o.v. een georthonormeerde basis**:

$$\vec{A}.\vec{B} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

2.2 Loodrechte stand

Gegeven 2 rechten *e* en *f* met richtingsgetallen (a,b,c) en (a',b',c'):

$$e \perp f \Leftrightarrow a.a' + b.b' + c.c' = 0$$

Gegeven 2 vlakken $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ en $\beta : A'x + B'y + C'z + D' = 0$:

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow A.A' + B.B' + C.C' = 0$$

Gegeven rechte *e* met richtingsgetallen (a,b,c) en vlak $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$:

$$e \perp \alpha \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0 : a = k.A \wedge b = k.B \wedge c = k.C$$

Stelsel vergelijkingen van de loodlijn door $P(x_1, y_1, z_1)$ op vlak $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

Vergelijking van het loodvlak door $P(x_1, y_1, z_1)$ op rechte met richtingsgetallen (a,b,c):

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

2.3 Afstanden

Afstand van 2 punten: $|OA| = |\vec{A}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Afstand van een punt tot een vlak: $|P\alpha| = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Vergelijking van een boloppervlak met middelpunt $M(x_1, y_1, z_1)$ en straal r:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$$

2.4 Hoeken

Hoek tussen 2 rechten: $\cos\alpha = \dfrac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$

Hoek tussen 2 vlakken: $\cos\alpha = \dfrac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$

Hoek tussen rechte en vlak: $\sin\alpha = \dfrac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

2.5 Vectorieel product

Definitie: $\vec{A}\times\vec{B}$ is een vector met
1) richting loodrecht op vlak *OAB*
2) zin zodat $\left(\vec{A},\vec{B},\vec{A}\times\vec{B}\right)$ positief georiënteerd is
3) norm $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|.\sin\left(\vec{A}\vec{B}\right)$

Eigenschappen: $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$ = maatgetal van de oppervlakte van parallellogram met *A, O, B* als opeenvolgende hoekpunten

$\vec{A}\times\vec{O} = \vec{O}\times\vec{A} = \vec{O}$

$\vec{A} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A}\times\vec{B} = \vec{O}$

$\vec{A}\times\vec{B} = -\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$

Voor een positief georthonormeerde basis geldt:

$$\begin{cases} \vec{E_1}\times\vec{E_1} = \vec{E_2}\times\vec{E_2} = \vec{E_3}\times\vec{E_3} = \vec{O} \\ \vec{E_1}\times\vec{E_2} = \vec{E_3} \wedge \vec{E_2}\times\vec{E_3} = \vec{E_1} \wedge \vec{E_3}\times\vec{E_1} = \vec{E_2} \end{cases}$$

Analytische uitdrukking van het vectorieel product **t.o.v. een positief georiënteerde georthonormeerde basis**:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{E_1} & \vec{E_2} & \vec{E_3} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Toepassing: $\vec{A}\times\vec{B}$ is een richtingsvector van de gemeenschappelijke loodlijn van twee kruisende rechten met richtingsvectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$.

2.6 Gemengd product

Definitie en analytische uitdrukking t.o.v. een positief georiënteerde georthonormeerde basis:

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\vec{C} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Toepassing: inhoud van een parallellepipedum = $\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\right|$

Toepassing: afstand tussen 2 kruisende rechten *e* (gegeven punt *A* en richtingsvector *R*) en *f* (gegeven punt *B* en richtingsvector *S*):

$$|ef| = \frac{\left|\left(\vec{R}\times\vec{S}\right).\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{R}\times\vec{S}\right|}$$