Op gelijke afstand

Willem van Ravenstein

Opgave

Gegeven zijn de punten A(1,0,-1), B(2,3,1) en C(0,2,-3). Bepaal een punt P dat op gelijke afstand ligt van A, B en C en op afstand √5 van het vlak ABC.

Uitwerking

Voor het opstellen van de vergelijking van het middelloodvlak van A en B kiezen we M als het midden van A en B:

$$M\left(1\frac{1}{2},1\frac{1}{2},0\right)$$

Voor het opstellen van de vergelijking van het middelloodvlak van B en C kiezen we N als het midden van B en C:

$$N\left(1,2\frac{1}{2},-1\right)$$

Dit geeft:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$
$$x+3y+2z=d$$
$$1\frac{1}{2}+3\cdot 1\frac{1}{2}+2\cdot 0=d$$
$$d=6$$
$$k: x+3y+2z=6$$

$$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$$
$$2x+y+4z=d$$
$$2\cdot 1+2\frac{1}{2}+4\cdot -1=d$$
$$d=\frac{1}{2}$$
$$l: 4x+2y+8z=1$$

Het gevraagde punt P ligt op de snijlijn van *k* en *l*.

P is het snijpunt van *k* en *l*

$$\begin{cases}x+3y+2z=6\\4x+2y+8z=1\end{cases}$$
$$\begin{cases}4x+12y+8z=24\\4x+2y+8z=1\end{cases}$$
$$(1)-(2)$$
$$\begin{cases}10y=23\\4x+2y+8z=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2\frac{3}{10}\\4x+4\frac{6}{10}+8z=1\end{cases}$$
$$\begin{cases}y=2\frac{3}{10}\\4x+8z=-3\frac{6}{10}\end{cases}$$
$$\begin{cases}y=2\frac{3}{10}\\x+2z=-\frac{9}{10}\end{cases}$$

$$z=\lambda$$
$$x+2\lambda=-\frac{9}{10}$$
$$x=-2\lambda-\frac{9}{10}$$
$$P:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{10}\\2\frac{3}{10}\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Vlak door A, B en C

$U: Vlak(ABC)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \mu + 2\rho \\ y = 3\mu + \rho \\ z = -1 + 2\mu + 4\rho \end{cases}$$

$(1) + (3)$

$$\begin{cases} x = 1 + \mu + 2\rho \\ y = 3\mu + \rho \\ x + z = 3\mu + 6\rho \end{cases}$$

$(3) - (2)$

$$\begin{cases} x = 1 + \mu + 2\rho \\ y = 3\mu + \rho \\ x + z - y = 5\rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = 5 + 5\mu + 10\rho \\ 10y = 30\mu + 10\rho \\ 2x + 2z - 2y = 10\rho \end{cases}$$

$(3) \downarrow (1)$

$(3) \downarrow (2)$

$$\begin{cases} 5x = 5 + 5\mu + 2x + 2z - 2y \\ 10y = 30\mu + 2x + 2z - 2y \\ 2x + 2z - 2y = 10\rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z - 5 = 5\mu \\ -2x + 12y - 2z = 30\mu \\ 2x + 2z - 2y = 10\rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x + 12y - 12z - 30 = 30\mu \\ -2x + 12y - 2z = 30\mu \\ 2x + 2z - 2y = 10\rho \end{cases}$$

$(1) - (2)$

$20x - 10z - 30 = 0$

$U: 2x - z - 3 = 0$

Afstand

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} \\ 2\frac{3}{10} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } d(P,U) = \frac{\left|2\left(-2\lambda - \frac{9}{10}\right) - \lambda - 3\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\lambda = \frac{1}{25} \vee \lambda = -1\frac{24}{25}$$

Mogelijke oplossingen

$$\lambda = \frac{1}{25} \rightarrow P_1\left(-\frac{49}{50}, \frac{23}{10}, \frac{1}{25}\right)$$

$$\lambda = -1\frac{24}{25} \rightarrow P_2\left(3\frac{1}{50}, \frac{23}{10}, -1\frac{24}{25}\right)$$