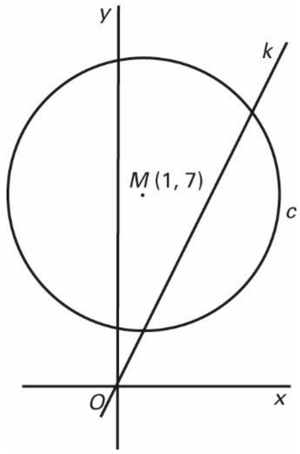
Uitwerkingen bij examen 2019-I

Lijnen door de oorsprong en een cirkel

5p **1** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: maak een schets. Stel de vergelijkingen van cirkel c en lijn k op.



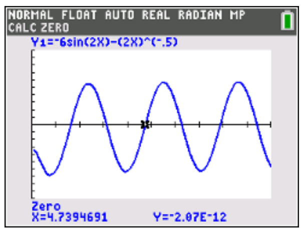
eerste methode met behulp van de vergelijking van lijn k:
Cirkel c heeft middelpunt (1, 7) en straal 5, dus $c: (x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$.
De richtingsvector van lijn k is $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, dus de richtingscoëfficiënt is 2 en de vergelijking van lijn k door de oorsprong is dus $k: y = 2x$.
Substitutie van $y = 2x$ levert $(x-1)^2 + (2x-7)^2 = 25$.
Dus voor de snijpunten van c en k geldt $x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 28x + 49 = 25$.
Herleiden levert $5x^2 - 30x + 25 = 0$ en $x^2 - 6x + 5 = 0$ en $(x-1)(x-5) = 0$,
dus $x = 1$ en $x = 5$.
Conclusie: de snijpunten zijn (1, 2) en (5, 10).
Opmerking: controleer het resultaat in de tekening.

tweede methode met behulp van de vectorvoorstelling van lijn k:
Cirkel c heeft middelpunt (1, 7) en straal 5 dus $c: (x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$.
Er geldt $x = t$ en $y = 2t$.
Substitutie van $x = t$ en $y = 2t$ levert $(t-1)^2 + (2t-7)^2 = 25$.
Dus voor de snijpunten van c en k geldt $t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 28t + 49 = 25$.
Herleiden levert $5t^2 - 30t + 25 = 0$ en $t^2 - 6t + 5 = 0$ en $(t-1)(t-5) = 0$ dus $t = 1$ en $t = 5$.
Conclusie: de snijpunten zijn (1, 2) en (5, 10).
Opmerking: controleer het resultaat in de tekening.

Rechts van het snijpunt

5p **2** *Toon aan, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: punt A wordt genoemd, dus bereken de coördinaten (x-coördinaat) van punt A. Punt B wordt genoemd, dus bereken de coördinaten (x-coördinaat) van punt B. Punt B is een top, dus bereken x-coördinaat met afgeleide = 0. Gebruik van afgeleide van f is verplicht, let op kettingregel.

eerste methode, bereken de x-coördinaat van A en B:
Bereken x-coördinaat punt A:
$g(x) = 3 - \sqrt{2x}$ dus $3 - \sqrt{2x} = 0$ oplossen levert $\sqrt{2x} = 3$ dus $2x = 9$ dus $x_A = 4\frac{1}{2}$
Bereken x-coördinaat punt B:
$f(x) = 3\cos(2x) - \sqrt{2x} = 3\cos(2x) - (2x)^{\frac{1}{2}}$
Afgeleide van f opstellen: $f'(x) = -3\sin(2x)\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot(2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2 = -6\sin(2x) - (2x)^{-\frac{1}{2}}$ (of $f'(x) = -6\sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}$)
Punt B is de derde top, dus afgeleide f'(x) = 0 en neem de derde x-waarde vanaf de oorsprong waarvoor dit geldt.
Berekenen x-coördinaat punt B met grafische rekenmachine:
$y_1 = -6\sin(2x) - (2x)^{-\frac{1}{2}}$ en Calc Zero levert $x_B = 4{,}7...$
Conclusie: omdat $4{,}7... > 4\frac{1}{2}$ ligt punt B rechts van punt A.



Opmerkingen: omdat het gebruik van de grafische rekenmachine toegestaan is, is het verder herleiden van f'(x) niet nodig. Gebruik in de conclusie dezelfde woorden als in de vraag, dus niet 'A links van B'.

tweede methode, laat zien of de x-coördinaat van A op het dalende stuk links van B ligt of op het stijgende stuk rechts van B:
Bereken x-coördinaat punt A:

$g(x) = 3 - \sqrt{2x}$ dus $3 - \sqrt{2x} = 0$ oplossen levert $\sqrt{2x} = 3$ dus $2x = 9$ dus $x_A = 4\frac{1}{2}$

Afgeleide van *f* opstellen: $f'(x) = -3\sin(2x) \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot (2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = -6\sin(2x) - (2x)^{-\frac{1}{2}}$ (of $f'(x) = -6\sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}$)

Voor $x = 4\frac{1}{2}$ geldt $f'(4\frac{1}{2}) = -2{,}80....$ dus de grafiek van *f* daalt als $x = 4\frac{1}{2}$.

Dus $x = 4\frac{1}{2}$ ligt op het dalende stuk van de grafiek, dus de top van *f* ligt rechts van het nulpunt van *g*.

Conclusie: punt *B* ligt rechts van punt *A*.

Opmerkingen: omdat het gebruik van de grafische rekenmachine toegestaan is, is het verder herleiden van f'(x) niet nodig.
Gebruik in de conclusie dezelfde woorden als in de vraag, dus niet 'A links van B'.

Altijd raak

5p **3** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: raken, dus moet gelden $f_p(a) = y(a)$ en $f_p'(a) = y'(a)$. In de raakpunten geldt richtingscoëfficiënt = 1.

eerste methode, raakpunten berekenen en controleren of deze raakpunten op lijn k liggen:

$f_p(x) = p + \sqrt{x-p} = p + (x-p)^{\frac{1}{2}}$ dus $f_p'(x) = \frac{1}{2}(x-p)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(x-p)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x-p}}$ *(ga na wat er door het differentiëren met de parameter p gebeurt)*

Er moet gelden $f'(x) = y'(x)$ en er geldt $y' = 1$, dus:

$\frac{1}{2\sqrt{x-p}} = 1$ dus $\sqrt{x-p} = \frac{1}{2}$ dus $x = p + \frac{1}{4}$,

dus in de raakpunten geldt $x = p + \frac{1}{4}$.

Controleer of voor $x = p + \frac{1}{4}$ geldt dat $f_p(x) = y(x)$.

Voor *f* geldt: $f_p(x) = f_p(p + \frac{1}{4}) = p + \sqrt{p + \frac{1}{4} - p} = p + \sqrt{\frac{1}{4}} = p + \frac{1}{2}$ dus $y = p + \frac{1}{2}$

Voor *k* geldt: $y(x) = y(p + \frac{1}{4}) = p + \sqrt{p + \frac{1}{4} - p} = p + \frac{1}{2}$

Dus voor $x = p + \frac{1}{4}$ geldt $f_p'(x) = y'(x) = 1$ en $f_p(x) = y(x)$.

Conclusie: lijn *k* raakt de grafiek van f_p.

tweede methode, maak gebruik van de functie $g(x) = \sqrt{x}$ en van de translatie p naar rechts en p omhoog:

De standaardfunctie $g(x) = \sqrt{x}$ transleren over $\begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}$ geeft $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$.

$y = x + \frac{1}{4}$ transleren over de vector $\begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}$ geeft de lijn $k: y = (x-p) + \frac{1}{4} + p = x + \frac{1}{4}$.

Bewijs nu dat $g(x) = \sqrt{x}$ de lijn $y = x + \frac{1}{4}$ raakt.

$g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ dus $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Voor het raakpunt moet gelden $g'(x) = y'(x)$ en er geldt $y' = 1$ dus:

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$ dus $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ dus $x = \frac{1}{4}$

Dus in het raakpunt van *g* met richting = 1 geldt $x = \frac{1}{4}$ en $g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ligt ook op de lijn $k: y = x + \frac{1}{4}$ (want $y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$).

Dus in $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ geldt: $g'(x) = y'(x) = 1$ en $g(x) = y(x)$, dus *y* en *g* raken elkaar.

De grafieken van $g(x) = \sqrt{x}$ en $y = x + \frac{1}{4}$ transleren over $\begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}$ geeft $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$ en $k: y = x + \frac{1}{4}$, dus deze grafieken raken elkaar in $\left(\frac{1}{4} + p, \frac{1}{2} + p\right)$.

Conclusie: lijn *k* raakt de grafiek van f_p.

derde methode, gemeenschappelijke punten (raakpunten) van k en f_p berekenen:
Analyse: raken, dus één punt gemeenschappelijk, dus discriminant = 0.

$k: y = x + \frac{1}{4}$ snijden met $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$, dus $p + \sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4}$

Oplossen, dus $\sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4} - p$ dus $x - p = (x + \frac{1}{4} - p)^2 = x^2 + 2x \cdot (\frac{1}{4} - p) + (\frac{1}{4} - p)^2$

Dus $x^2 + \frac{1}{2}x - 2px - x + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}p + p^2 + p = 0$ dus $x^2 + (-\frac{1}{2} - 2p) \cdot x + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}p + p^2 = 0$

Discriminant is $(-\frac{1}{2} - 2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\frac{1}{16} + \frac{1}{2}p + p^2) = 0$ dus $\frac{1}{4} + 2p + 4p^2 - \frac{1}{4} - 2p - 4p^2 = 0$

Voor elke waarde van p is de discriminant gelijk aan 0. Dus k en f_p hebben altijd één gemeenschappelijk punt.
Omdat het randpunt (of de hele grafiek van f_p) onder (of rechts van) de grafiek van k ligt, is er sprake van een raakpunt (geen snijpunt), zie de figuur.
Conclusie: lijn k raakt de grafiek van f_p.

3p **4** *Analyse: genoemd worden randpunten, dus druk de randpunten van f_p uit in p. Het randpunt van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}, dus geef de vergelijking van f_{p-1}.*

Randpunt, dus $x - p = 0$ dus $x_{\text{randpunt}} = p$ en $y_{\text{randpunt}} = p + \sqrt{p-p} = p$

Vergelijking $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$ dus vergelijking $f_{p-1}(x) = p - 1 + \sqrt{x - (p-1)}$ *(let op de haakjes)*

Controle dat randpunt (p, p) op grafiek van f_{p-1} ligt:

$f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p - (p-1)} = p - 1 + \sqrt{p - p + 1} = p - 1 + 1 = p = y_{\text{randpunt}}$

Conclusie: het randpunt van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}.
Opmerking: het resultaat van deze opgave kan misschien gebruikt worden bij de volgende opgave.

5p **5** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode met behulp van $= \int_1^2 (\text{bovenste} - \text{onderste})\,dx$ *:*

Analyse: bepaal primitieve van f_1 en l. Gebruik formule oppervlakte $= \int_1^2 (f_1(x) - l(x))\,dx$.

Lijn l gaat door $A(1, 1)$ en $B(2, 2)$, dus de vergelijking van lijn l is $y = x$.

Primitieve van $f_1(x) = 1 + \sqrt{x-1} = 1 + (x-1)^{\frac{1}{2}}$ is $F_1(x) = x + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$

Primitieve van $l: y = x$ is $L(x) = \frac{1}{2}x^2$

Gevraagde oppervlakte $\int_1^2 (f_1(x) - l(x))\,dx = \left[x + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 2 + \frac{2}{3} - 2 - (1 + 0 - \frac{1}{2}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

Conclusie: gevraagde oppervlakte = $\frac{1}{6}$

tweede methode, de oppervlakte onder de lijn l bestaat uit een driehoek en een rechthoek:
Analyse: bepaal primitieve van f_1. Bepaal de oppervlakte onder de lijn l.

Primitieve van $f_1(x) = 1 + \sqrt{x-1} = 1 + (x-1)^{\frac{1}{2}}$ is $F_1(x) = x + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$

Oppervlakte onder f_1 is $\int_1^2 f_1(x)\,dx = \left[x + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = 2 + \frac{2}{3} - (1 + 0) = 1\frac{2}{3}$

Oppervlakte onder lijn l bestaat uit:
- een rechthoek met hoogte 1 en breedte 1 en dus oppervlakte 1
- en daarop een rechthoekige driehoek met hoogte 1 en breedte 1 en dus oppervlakte $\frac{1}{2}$

De oppervlakte onder lijn l is dus $1\frac{1}{2}$.

Conclusie: gevraagde oppervlakte = $1\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Slingshot

3p **6** *Bereken, rond af op één decimaal, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: de formule $F_k = 0{,}6 \cdot (L - 8)$ *is gegeven. Gevraagd wordt de kracht* F_k*.*

Bereken dus eerst L met Pythagoras.

L is de lengte van het koord, dus de afstand CB (of CA).

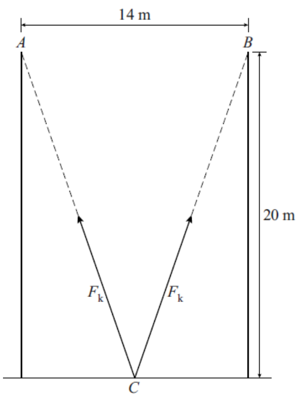
$L = \sqrt{7^2 + 20^2} = 21{,}18...$

Dus $F_k = 0{,}6 \cdot (21{,}18... - 8)$

Conclusie: $F_k \approx 7{,}9$

Opmerking: let op het aantal decimalen, geef tussenberekeningen met niet-afgeronde getallen. Tussenberekening niet afronden en dus noteren als L = 21,18... (dus met drie punten).

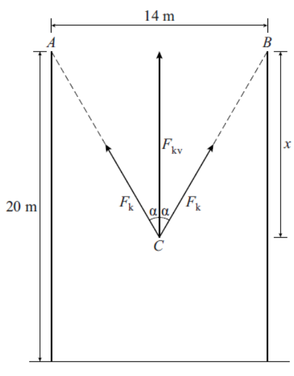
figuur 1



6p **7** *Let op, er worden hier twee vragen gesteld.*
Vraag 1: Druk F_{kv} *uit in x. Druk uit, dus gebruik grafische rekenmachine is in dit eerste deel niet toegestaan.*
Vraag 2: Bereken hoe hoog de capsule boven de grond hangt en rond af op één decimaal. Bereken, dus de grafische rekenmachine is in dit tweede deel wel toegestaan.

Analyse: gegeven zijn de formule voor $F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos(\alpha)$ *en* $F_z = 1{,}8$*. De kracht* F_{kv} *is afhankelijk van* F_k*, dus gebruik ook de formule* $F_k = 0{,}6 \cdot (L - 8)$*. Hierin is L de lengte van het uitgerekte koord. L is afhankelijk van het hoogteverschil x tussen C en B (of C en A). Dus druk L uit in x. Opgelost moet worden* $F_{kv} = 1{,}8$*.*

figuur 2



F_{kv} uitdrukken in x:

L uitdrukken in x levert $L^2 = x^2 + 7^2$ dus $L = \sqrt{x^2 + 49}$

dus $F_k = 0{,}6 \cdot (L - 8) = 0{,}6 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8)$

dus $F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos(\alpha) = 2 \cdot 0{,}6 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8) \cdot \cos(\alpha)$

Omdat $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{L} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$ geldt:

$$F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos(\alpha) = 2 \cdot 0{,}6 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$$

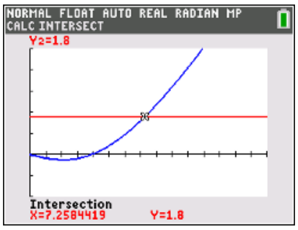
Berekenen van x:

Omdat $F_{kv} = F_z$ en $F_z = 1{,}8$ moet opgelost worden $2 \cdot 0{,}6 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8) \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 49}} = 1{,}8$

Deze vergelijking oplossen met de grafische rekenmachine:

$y_1 = 2 \cdot 0{,}6 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8) \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$

$y_2 = 1{,}8$



Calc Intersect levert x = 7,25...

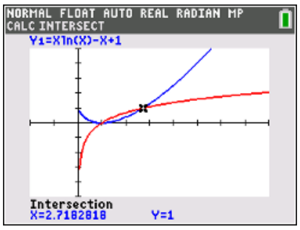
Conclusie: hoogte boven de grond is 20 − 7,25... dus afgerond 13 meter.

Opmerkingen: noteer altijd de vergelijking die met behulp van de grafische rekenmachine opgelost moet worden. Het is niet nodig de vergelijking eerst te vereenvoudigen of deels zelf op te lossen voordat hij ingevoerd wordt in de rekenmachine. Let bij je eindantwoord op het aantal decimalen (en wat de vraag is).

Een logaritmische functie en haar afgeleide

5p **8** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: genoemd worden f(x) en f'(x) = g(x). Bepaal f'(x) en los daarmee de vergelijking f(x) = g(x) op. Let op gebruik productregel.

$f(x) = x\ln(x) - x + 1$ dus $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = g(x)$ *(productregel)*



Vergelijking $f(x) = g(x)$ exact oplossen, dus $x\ln(x) - x + 1 = \ln(x)$

dus $x\ln(x) - \ln(x) - x + 1 = 0$ dus $\ln(x) \cdot (x-1) - x + 1 = 0$ dus $\ln(x) \cdot (x-1) = 1 \cdot (x-1)$ *

dus $x - 1 = 0$ of $\ln(x) = 1$ en dus $x = 1$ of $x = e$ *(controleer de antwoorden, zie plot)*

Conclusie: $x = 1$ of $x = e$.

Opmerking: als $A \cdot B = A \cdot C$ dan A = 0 of B = C, dus hier met A = x − 1 en B = ln(x) en C = 1*

of $x\ln(x) - x + 1 = \ln(x)$ *kan herschreven worden tot* $\ln(x) = \frac{x-1}{x-1} = 1$ *voor* $x \neq 1$*. Dit levert*

x = e op. Controleer daarnaast of ook x − 1 = 0 dus x = 1 een oplossing is!

7p **9** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: omdat g(x) = f'(x) geldt ook G(x) = f(x) = xln(x) − x + 1. De primitieve van g(x) is dus gegeven.

eerste methode met behulp van de uitkomst van de integraal is 0:

$$\int_p^{2p} g(x)\,dx = [G(x)]_p^{2p} = G(2p) - G(p) = f(2p) - f(p)$$

$f(p) = p \cdot \ln(p) - p + 1$ en $f(2p) = 2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1$

Er moet gelden $f(2p) - f(p) = 0$ dus $2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1 - (p \cdot \ln(p) - p + 1) = 0$ dus

$2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1 - p \cdot \ln(p) + p - 1 = 0$

dus $2p \cdot \ln(2p) - p \cdot \ln(p) - p = 0$ dus $p \cdot (2 \cdot \ln(2p) - \ln(p) - 1) = 0$

dus $2 \cdot \ln(2p) - \ln(p) - 1 = 0$ ($p = 0$ voldoet niet)

$\ln\left((2p)^2\right) - \ln(p) - 1 = 0$ dus $\ln\left(\frac{4p^2}{p}\right) - 1 = 0$ dus $\ln(4p) = 1$ dus $4p = e$ *(rekenregels logaritmen)*

Conclusie: $p = \frac{1}{4}e$

Opmerking: als primitieve van g(x) kan in plaats van f(x) = xln(x) − x + 1 ook $G(x) = x\ln(x) - x$ *genomen worden.*

tweede methode met behulp van twee gelijke oppervlaktes:
Analyse: de oppervlaktes links en rechts van het snijpunt van de grafiek van g met de x-as moeten gelijk zijn.

Snijpunt van g met de x-as: $g(x) = f'(x) = \ln(x) = 0$ dus $x = 1$

Opgelost moet worden $-\int_p^1 g(x)\,dx = \int_1^{2p} g(x)\,dx$

Omdat $-\int_p^1 g(x)\,dx = -[G(x)]_p^1 = -G(1) + G(p) = -f(1) + f(p)$ en $\int_1^{2p} g(x)\,dx = [G(x)]_1^{2p} = G(2p) - G(1) = f(2p) - f(1)$

geldt $-f(1) + f(p) = f(2p) - f(1)$ dus $p \cdot \ln(p) - p + 1 = 2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1$

dus $2p \cdot \ln(2p) - p \cdot \ln(p) - p = 0$ dus $p \cdot (2 \cdot \ln(2p) - \ln(p) - 1) = 0$

dus $2 \cdot \ln(2p) - \ln(p) - 1 = 0$ ($p = 0$ voldoet niet)

$\ln\left((2p)^2\right) - \ln(p) - 1 = 0$ dus $\ln\left(\frac{4p^2}{p}\right) - 1 = 0$ dus $\ln(4p) = 1$ dus $4p = e$ *(rekenregels logaritmen)*

Conclusie: $p = \frac{1}{4}e$

Opmerking: als primitieve van g(x) kan in plaats van f(x) = xln(x) − x + 1 ook $G(x) = x\ln(x) - x$ *genomen worden.*

Gebroken goniometrische functie

6p **10** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: opgelost moet worden $f(x) = \sqrt{2}$ *. (Denk aan de formules goniometrie vooraan het examen, zie ook de bijlage formuleblad in deze examenbundel.)*

Opgelost moet worden $\dfrac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}$ dus $\cos(x) = \sqrt{2} \cdot -\sin^2(x)$

dus $\cos(x) = \sqrt{2} \cdot (\cos^2(x) - 1)$ (want $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$)

dus $\sqrt{2} \cdot \cos^2(x) - \cos(x) - \sqrt{2} = 0$

dus $\cos(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot -\sqrt{2}}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1 \pm 3}{2 \cdot \sqrt{2}}$ *(abc-formule)*

dus $\cos(x) = \dfrac{-2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ (of $\cos(x) = \dfrac{4}{2 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (heeft geen oplossingen))

$\cos(x) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ dus $x = \dfrac{3}{4}\pi$ of $x = \dfrac{5}{4}\pi$

Conclusie: de *x*-coördinaten van *A* en *B* zijn $x = \dfrac{3}{4}\pi$ en $x = \dfrac{5}{4}\pi$.

6p **11** *Onderzoek, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: perforatie, dus teller en noemer zijn voor dezelfde waarde van x gelijk aan 0 én de limiet bestaat.

eerste methode, perforatie als de teller en noemer voor x = a nul zijn én de limietwaarde voor x = a bestaat. Begin met de teller = 0:

Perforatie: teller en noemer zijn voor dezelfde waarde van *x* gelijk aan 0.

Teller $\cos(x) = 0$ als $x = \dfrac{1}{2}\pi + k\pi$

$\sin\left(\dfrac{1}{2}\pi + 2k\pi\right) = 1$ en $\sin\left(1\dfrac{1}{2}\pi + 2k\pi\right) = -1$,

dus voor deze waarden van *x* geldt $\sin(x) = 1$ of $\sin(x) = -1$ dus $\sin^2(x) = 1$,

dus als $x = \dfrac{1}{2}\pi + k\pi$ en noemer $p - \sin^2(x) = 0$ dan moet gelden $p = 1$.

$f_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)}$ heeft een perforatie als voor $x = \dfrac{1}{2}\pi + k\pi$ de $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi + k\pi} f_1(x)$ bestaat.

$f_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$ en $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi + k\pi} f_1(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi + k\pi} \dfrac{1}{\cos(x)}$ geeft 1 gedeeld door 0,

dus deze limiet bestaat niet.

Dus de grafiek heeft voor $x = \dfrac{1}{2}\pi + k\pi$ een verticale asymptoot (teller $\neq 0$ en noemer = 0).

Conclusie: de grafiek van $f_1(x)$ heeft geen perforaties.

Opmerkingen: beschouw het hele domein, dus vergeet de $+k\pi$ *van* $x = \dfrac{1}{2}\pi + k\pi$ *niet. Het controleren van oplossingen is, zeker in deze opgave, belangrijk. Een schets verduidelijkt de situatie.*

tweede methode, perforatie als de teller en noemer voor x = a nul zijn én de limietwaarde voor x = a bestaat. Begin met de noemer = 0:
Perforatie: teller en noemer zijn voor dezelfde waarde van x gelijk aan 0.
Noemer is 0 als $p - \sin^2(x) = 0$ dus als $\sin^2(x) = p$.
Als $\sin^2(x) = p$ dan geldt $1 - \cos^2(x) = p$ dus dan geldt $\cos(x) = \pm\sqrt{1-p}$.
Als de teller $\cos(x) = \pm\sqrt{1-p}$ is gelijk aan 0 dan geldt $p = 1$.
Controle: als $p = 1$, heeft $f_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}$ dan perforaties?
Teller $\cos(x) = 0$ als $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$

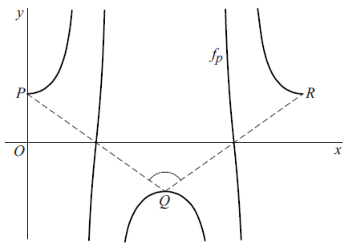
$f_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$ en $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} f_1(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{1}{\cos(x)}$

(en voor de andere waarden van $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$) bestaat niet.
Conclusie: de grafiek van $f_1(x)$ heeft geen perforaties.
Opmerkingen: beschouw het hele domein, dus vergeet de $+k\pi$ van $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ niet. Het controleren van oplossingen is, zeker in deze opgave, belangrijk. Een schets verduidelijkt de situatie.

4p **12** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode met behulp van de richtingscoëfficiënten:
Analyse: denk aan het product van de richtingscoëfficiënten = −1. Druk de coördinaten van P, Q en R uit in p.
De punten zijn $P(0, \frac{1}{p})$, $Q(\pi, -\frac{1}{p})$ en $R(2\pi, \frac{1}{p})$.

figuur 2



De richtingscoëfficiënt van PQ is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-\frac{1}{p} - \frac{1}{p}}{\pi - 0} = -\dfrac{2}{p\pi}$.

De richtingscoëfficiënt van QR is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{p} - -\frac{1}{p}}{2\pi - \pi} = \dfrac{2}{p\pi}$.

Loodrecht als $-\dfrac{2}{p\pi} \cdot \dfrac{2}{p\pi} = -1$ dus als $\dfrac{4}{\pi^2} = p^2$

Conclusie: PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $p = \dfrac{2}{\pi}$ of $p = -\dfrac{2}{\pi}$.

tweede methode met behulp van de richtingsvectoren:
Analyse: denk aan het inproduct van de richtingsvectoren = 0. Druk de coördinaten van P, Q en R uit in p.
De punten zijn $P(0, \frac{1}{p})$, $Q(\pi, -\frac{1}{p})$ en $R(2\pi, \frac{1}{p})$.

De richtingsvector $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \pi - 0 \\ -\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{2}{p} \end{pmatrix}$.

De richtingsvector $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 2\pi - \pi \\ \frac{1}{p} - -\frac{1}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix}$.

Loodrecht als $\begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{2}{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix} = 0$ dus als $\pi^2 - \dfrac{4}{p^2} = 0$ dus als $p^2 = \dfrac{4}{\pi^2}$

Conclusie: $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{QR}$ staan loodrecht op elkaar als $p = \dfrac{2}{\pi}$ of $p = -\dfrac{2}{\pi}$.

derde methode met behulp van een rechthoekige driehoek:
Analyse: gebruik Pythagoras. Als geldt $PQ^2 + QR^2 = PR^2$ dan staan PQ en QR loodrecht op elkaar.
De punten zijn $P(0, \frac{1}{p})$, $Q(\pi, -\frac{1}{p})$ en $R(2\pi, \frac{1}{p})$.

Dus lengte $PQ = QR = \sqrt{\left(\dfrac{2}{p}\right)^2 + \pi^2}$ *(Pythagoras)* en lengte $PR = 2\pi$

Er moet gelden $PQ^2 + QR^2 = PR^2$ dus $\left(\dfrac{2}{p}\right)^2 + \pi^2 + \left(\dfrac{2}{p}\right)^2 + \pi^2 = 4\pi^2$ dus $\left(\dfrac{2}{p}\right)^2 = \pi^2$ *(Pythagoras)*

$\dfrac{4}{p^2} = \pi^2$ dus als $p^2 = \dfrac{4}{\pi^2}$

Conclusie: PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $p = \dfrac{2}{\pi}$ of $p = -\dfrac{2}{\pi}$.

vierde methode met behulp van twee rechthoekige driehoeken:
Analyse: driehoek PQR is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door Q. Als driehoek PQR rechthoekig is, dan moet gelden $|x_Q - x_P| = |y_Q - y_P|$.

De punten zijn $P(0, \frac{1}{p})$, $Q(\pi, -\frac{1}{p})$ en $R(2\pi, \frac{1}{p})$.

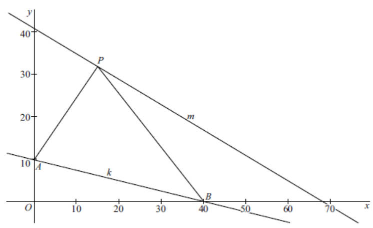
Driehoek *PQR* is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door *Q*. Als driehoek *PQR* rechthoekig is, dan moet gelden dat $|x_Q - x_P| = |y_Q - y_P|$.

$|x_Q - x_P| = \pi$ dus $|y_Q - y_P| = \pi$ dus $\left|-\frac{1}{p} - \frac{1}{p}\right| = \pi$ dus $\left|-\frac{2}{p}\right| = \pi$ dus $-\frac{2}{p} = \pi$ of $-\frac{2}{p} = -\pi$

Conclusie: *PQ* en *QR* staan loodrecht op elkaar als $p = \frac{2}{\pi}$ of $p = -\frac{2}{\pi}$.

Driehoek met bewegend punt

figuur



5p **13** *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: de punten A, B en P vormen géén driehoek als P op het snijpunt van de lijnen k en m ligt. Bereken de coördinaten van dit snijpunt. Stel de vergelijking van lijn k op.

eerste methode, m substitueren in k:
Lijn *k* gaat door *A*(0, 10) en *B*(40, 0), dus $k: y = 10 - \frac{1}{4}x$.

De punten *A*, *B* en *P* vormen géén driehoek als *P* op het snijpunt van de lijnen *k* en *m* ligt.

$m: \begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$ substitueren in *k* geeft:

$30 - 3t = 10 - \frac{1}{4}(18 + 5t)$ dus $30 - 3t = 5\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}t$ dus $t = 14$

Conclusie: de gevraagde coördinaten van *P* zijn (88, −12).

tweede methode, vergelijking van m opstellen:
Lijn *k* gaat door *A*(0, 10) en *B*(40, 0), dus $k: y = 10 - \frac{1}{4}x$.

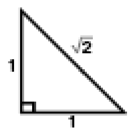
De punten *A*, *B* en *P* vormen géén driehoek als *P* op het snijpunt van de lijnen *k* en *m* ligt.

Omdat $m: \begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$ geldt voor lijn $m: y = -\frac{3}{5}x + 40\frac{4}{5}$.

Voor het snijpunt van *k* en *m* geldt: $10 - \frac{1}{4}x = -\frac{3}{5}x + 40\frac{4}{5}$ dus $\frac{7}{20}x = 30\frac{4}{5}$ dus $x = 88$

Conclusie: de gevraagde coördinaten van *P* zijn (88, −12).

8p **14** *Onderzoek op algebraïsche wijze, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*



eerste methode met behulp van $1 : 1 : \sqrt{2}$ *driehoeken:*
Analyse: gelijkbenig dus $|AP| = |BP|$. *Als bovendien de hoek bij P recht is, dan is driehoek ABP gelijkvormig met een driehoek met zijden 1, 1 en* $\sqrt{2}$ *(zie afbeelding), dus moet gelden* $\sqrt{2} \cdot |AP| = |AB|$. *Druk de coördinaten van P uit in t.*

P heeft als coördinaten (18 + 5*t*, 30 − 3*t*).

A(0, 10) dus lengte $|AP| = \sqrt{(18 + 5t)^2 + (20 - 3t)^2}$

B(40, 0) dus lengte $|BP| = \sqrt{(22 - 5t)^2 + (30 - 3t)^2}$

$|AP| = |BP|$ dus $\sqrt{(18 + 5t)^2 + (20 - 3t)^2} = \sqrt{(22 - 5t)^2 + (30 - 3t)^2}$ dus $60t + 724 = -400t + 1384$ dus $t = \frac{33}{23}$ $(= 1{,}43...)$

Lengte van *AP* (of *BP*) is dus $|AP| = \sqrt{\left(25\frac{4}{23}\right)^2 + \left(15\frac{16}{23}\right)^2} = \sqrt{880\frac{42}{529}}$ $(= 29{,}66...)$

Lengte van $|AB| = \sqrt{10^2 + 40^2} = \sqrt{1700}$ $(= 41{,}23...)$

Als de hoek bij P recht is, dan moet gelden $\sqrt{2} \cdot |AP| = |AB|$ maar $\sqrt{2} \cdot \sqrt{880\frac{42}{529}} \neq \sqrt{1700}$ *(of* $\sqrt{2} \cdot 29{,}66... \neq 41{,}23...$*)*

De hoek bij P is dus niet recht.
Conclusie: het gevraagde punt P bestaat niet.
Opmerking: 'algebraïsch', dus het gebruik van de niet-afgeronde decimale breuken (met de drie stippen) en de 'is gelijk'-tekens (in plaats van 'ongeveer'-tekens) is toegestaan.

tweede methode met behulp van vectoren en inproduct:
Analyse: loodrecht dus inproduct = 0. Gelijkbenig dus $|AP| = |BP|$. Druk de coördinaten van P uit in t.

P heeft als coördinaten $(18 + 5t, 30 - 3t)$.
$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 18 + 5t \\ 20 - 3t \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -22 + 5t \\ 30 - 3t \end{pmatrix}$

Loodrecht als $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ dus als $(18 + 5t) \cdot (-22 + 5t) + (20 - 3t) \cdot (30 - 3t) = 0$

dus $34t^2 - 170t + 204 = 0$ dus $t^2 - 5t + 6 = 0$ dus $(t - 3)(t - 2) = 0$

$t = 2$ geeft $P(28, 24)$ en $t = 3$ geeft $P(33, 21)$

In geval $t = 2$ en $P(28, 24)$ dan lengte $|AP| = \sqrt{28^2 + 14^2} = \sqrt{980}$ en lengte $|BP| = \sqrt{12^2 + 24^2} = \sqrt{720}$

In geval $t = 3$ en $P(33, 21)$ dan lengte $|AP| = \sqrt{33^2 + 11^2} = \sqrt{1210}$ en lengte $|BP| = \sqrt{7^2 + 21^2} = \sqrt{490}$

Conclusie: in beide gevallen geldt $|AP| \neq |BP|$, dus het gevraagde punt P bestaat niet.

Opmerking: 'algebraïsch', dus het gebruik van de niet-afgeronde decimale breuken (met drie stippen) is toegestaan.

derde methode met behulp van diagonalen:
Analyse: als hoek APB een rechte hoek is én $|AP| = |BP|$, dan zijn A, B en P de hoekpunten van een vierkant APBC. Dan is AB een diagonaal. Punt P moet dan op de andere diagonaal liggen én tegelijkertijd op lijn m liggen. De diagonalen van een vierkant snijden elkaar loodrecht middendoor.

$A(0, 10)$ en $B(40, 0)$. Het midden van AB is het punt $M(20, 5)$.
Omdat $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \end{pmatrix}$ geldt $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$ en dus $P(25, 25)$.

P ligt op m en heeft dus als coördinaten $(18 + 5t, 30 - 3t)$.
Dus moet gelden $18 + 5t = 25$ en tegelijkertijd $30 - 3t = 25$.
$18 + 5t = 25$ geeft $t = \frac{7}{5}$ én $30 - 3t = 25$ geeft $t = \frac{5}{3}$.

Conclusie: het gevraagde punt P bestaat niet.

vierde methode met behulp van cirkel en Thales:
Analyse: stel de vergelijking op van de cirkel met middellijn AB. Snijpunt cirkel en lijn m is een mogelijk punt P. Controleer of $|AP| = |BP|$.

Cirkel c met middellijn AB heeft middelpunt $M(20, 5)$ en straal $r = \sqrt{425}$ dus geldt $c: (x - 20)^2 + (y - 5)^2 = 425$ en er moet gelden $\angle APB = 90°$ dus P ligt op deze cirkel (Thales).

Snijden cirkel c met lijn m geeft $(18 + 5t - 20)^2 + (30 - 3t - 5)^2 = 425$

dus $34t^2 - 170t + 204 = 0$ dus $t^2 - 5t + 6 = 0$ dus $(t - 3)(t - 2) = 0$

$t = 2$ geeft $P(28, 24)$ en $t = 3$ geeft $P(33, 21)$.

In geval $t = 2$ en $P(28, 24)$ dan lengte $|AP| = \sqrt{28^2 + 14^2} = \sqrt{980}$ en lengte $|BP| = \sqrt{12^2 + 24^2} = \sqrt{720}$

In geval $t = 3$ en $P(33, 21)$ dan lengte $|AP| = \sqrt{33^2 + 11^2} = \sqrt{1210}$ en lengte $|BP| = \sqrt{7^2 + 21^2} = \sqrt{490}$

Conclusie: in beide gevallen geldt $|AP| \neq |BP|$, dus het gevraagde punt P bestaat niet.

Opmerking: 'algebraïsch', dus het gebruik van de niet-afgeronde decimale breuken (met drie stippen) is toegestaan.

vijfde methode met behulp van middelloodlijn:
Analyse: $|AP| = |BP|$ *dus P ligt op middelloodlijn van AB. P ligt mogelijk op snijpunt middelloodlijn en lijn m. Controleer of* $\angle APB = 90°$.

Het midden van *AB* is *M*(20, 5) en richtingscoëfficiënt *AB* = $-\frac{1}{4}$

Middelloodlijn heeft dus richtingscoëfficiënt 4 dus $y = 4x + b$

M(20, 5) invullen levert $y = 4x - 75$ (of $y - 5 = 4(x - 20)$)

Snijden met lijn m : $\begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$ geeft $30 - 3t = 4(18 + 5t) - 75$

Dus $t = \frac{33}{23}$ ($t = 1{,}43...$) dus $P(25\frac{4}{23}, 25\frac{16}{23})$ (of *P*(25,17…; 25,69…)

$|AP| = |BP|$ en als $\angle APB = 90°$ dan geldt $(AP)^2 + (BP)^2 = (AB)^2$

$AP^2 + BP^2 = \left(25\frac{4}{23}\right)^2 + \left(25\frac{16}{23}\right)^2 = 880\frac{42}{529}$ (= 880,07…)

$AB^2 = 10^2 + 40^2 = 1700$

Dus $(AP)^2 + (BP)^2 \neq (AB)^2$

Conclusie: het gevraagde punt *P* bestaat niet.

Opmerking: 'algebraïsch', dus het gebruik van de niet-afgeronde decimale breuken (met de drie stippen) en de 'is gelijk'-tekens (in plaats van 'ongeveer'-tekens) is toegestaan.

Afgeknotte paraboloïde

7p **15** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode, druk V en A uit in a en b:
Analyse: bereken de inhoud, dus gebruik $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$. *Genoemd wordt* $h \cdot A$, *dus bepaal ook h en oppervlakte A.*

Inhoud *V* van de afgeknotte paraboloïde: $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx = \pi \cdot \int_a^b (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \cdot \int_a^b x \, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \pi \cdot (\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2)$

Hoogte *h* van afgeknotte paraboloïde is afstand tussen *b* en *a* dus *h* = *b* − *a*

Oppervlakte cirkel: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (\sqrt{m})^2 = \pi \cdot m$

m is het midden van *a* en *b* dus $m = \frac{b + a}{2}$ dus $A = \pi \cdot m = \pi \cdot \frac{b + a}{2}$

h = *b* − *a* en $A = \pi \cdot \frac{b + a}{2}$ dus $h \cdot A = (b - a) \cdot \pi \cdot \frac{b + a}{2}$

Uitwerken levert: $(b - a) \cdot \pi \cdot \frac{b + a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (b - a) \cdot (b + a) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (b^2 + ab - ab - a^2) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (b^2 - a^2) = \pi \cdot (\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2)$

Conclusie: $V = h \cdot A$.

tweede methode, druk V en A uit in m en h:
Analyse: bereken de inhoud, dus gebruik $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$. *Genoemd wordt* $h \cdot A$, *dus bepaal ook h en oppervlakte A.*

Inhoud van de afgeknotte paraboloïde: $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$ met $b = m + \frac{1}{2}h$ en $a = m - \frac{1}{2}h$

Dus $V = \pi \int_{m-\frac{1}{2}h}^{m+\frac{1}{2}h} (f(x))^2 \, dx = \pi \int_{m-\frac{1}{2}h}^{m+\frac{1}{2}h} (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_{m-\frac{1}{2}h}^{m+\frac{1}{2}h} x \, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{m-\frac{1}{2}h}^{m+\frac{1}{2}h} = \frac{1}{2}\pi \cdot ((m + \frac{1}{2}h)^2 - (m - \frac{1}{2}h)^2)$

Uitwerken levert: $V = \frac{1}{2}\pi \cdot ((m^2 + mh + h^2) - (m^2 - mh + h^2)) = \frac{1}{2}\pi \cdot (2mh) = \pi mh$

Oppervlakte cirkel: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (\sqrt{m})^2 = \pi \cdot m$ dus $h \cdot A = h \cdot \pi \cdot m$

Conclusie: $V = h \cdot A$.