

De vierkantenvierhoek

Begin met vier punten A , B , C en D (het doet er niet toe hoe ze liggen).

Verbind ze met elkaar zodat je de vierhoek $ABCD$ krijgt.

Teken op de vier zijden van $ABCD$ naar buiten toe vierkanten. Noem de middelpunten van die vierkanten P , Q , R en S . Dan zal blijken dat:

- de lijnstukken PR en QS even lang zijn en loodrecht op elkaar staan, en dat
- de middens van AC , BD , PR en QS een vierkant vormen.

Geloof je het niet? Maak dan zelf maar zo'n tekening.

En hoe zit het als je de vierkanten naar binnen in plaats van naar buiten tekent?

En hoe, als je ook de middelpunten van de vierkanten tegen de diagonalen AC en BD erbij tekent? Je zult dan wel een nieuwe, niet te kleine tekening moeten maken.

Een rondwandeling zoals bij voorbeeld $A-B-D-C-A$ is als een (buitenmodels) vierhoek te beschouwen. Twee aan twee verbinden van de middelpunten van de langs de route gelegen vierkanten (pas op: alle vier rechts van de wandelrichting, óf alle vier links ervan) levert alweer gelijke en loodrechte lijnstukken.

Zo ook voor de rondwandeling $B-C-A-D-B$.

In elk van de gevallen is net als in de gegeven figuur weer een vier-middens-vierkant te tekenen. Als je het goed doet, moeten de middelpunten van die vierkanten samenvallen, juist in het zwaartepunt van de oorspronkelijke punten A , B , C en D .

De vierkanten-driehoek en nog gekker

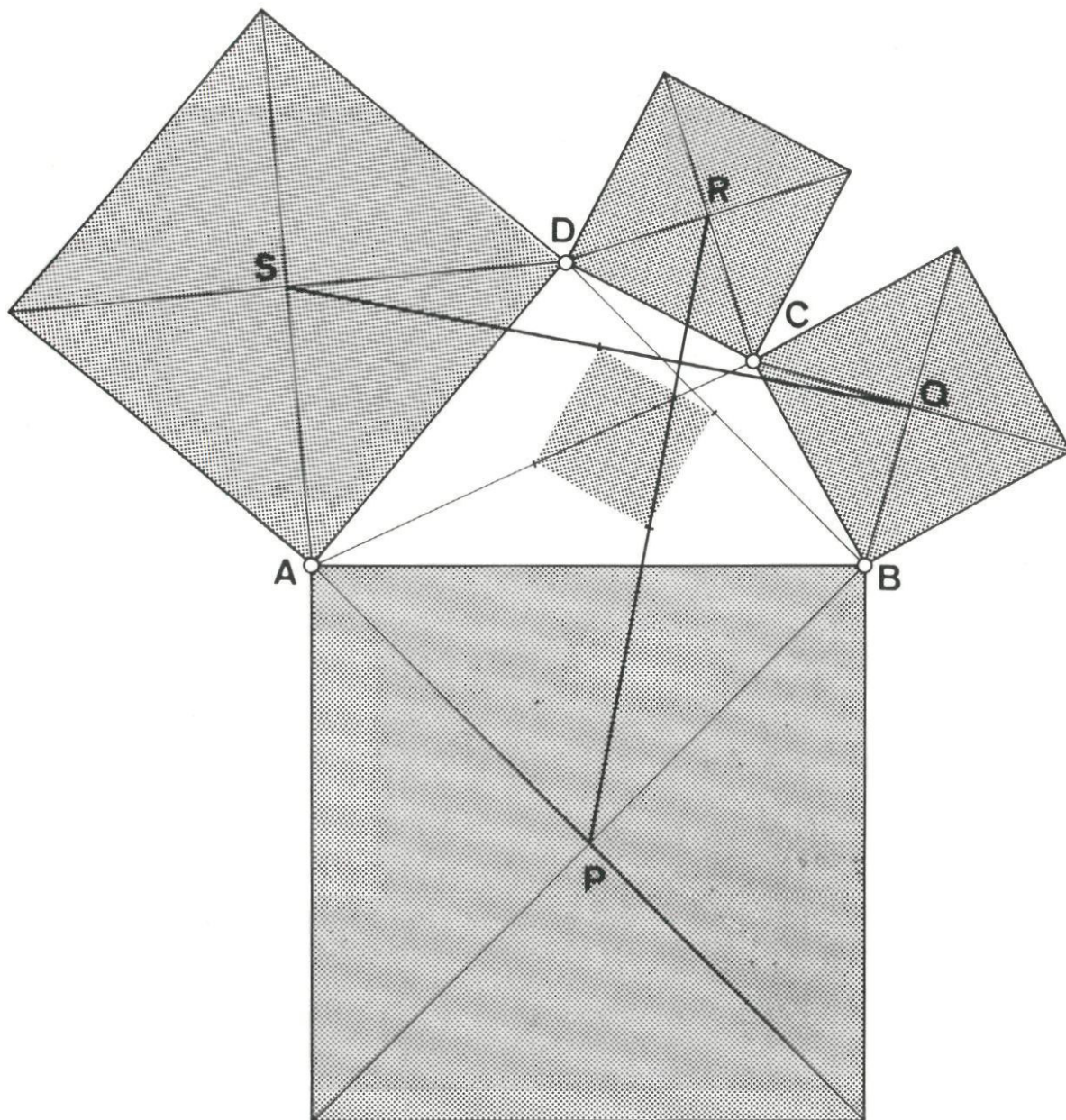
Hierboven zeiden we dat de genoemde eigenschappen voor elke vierhoek $ABCD$ gelden. Dus

óók als twee hoekpunten (zeg C en D) erg dicht bij elkaar liggen. Hoe wordt de figuur als C en D (en dus ook R) helemaal samenvallen? Weer anders:

- hoe wordt de figuur als vierhoek $ABCD$ één hoek van 180° heeft?
- hoe als twee hoeken naast elkaar allebei 180° zijn (en de beide andere dus 0°)?
- hoe als twee overstaande hoeken beide 180° zijn?
- hoe als C en D samenvallen en hoek B 180° is?
- hoe als C en D samenvallen en eveneens A en B ?
- hoe als B , C en D samenvallen?

Bewijzen

De uit de figuur blijkende eigenschappen kunnen natuurlijk ook *bewezen* worden. Dat kan op drie manieren: met 'congruentie', met 'transformaties' en met 'vectoren'. Eenvoudig te vinden zijn die bewijzen echter niet. Wie er nieuwsgierig naar is kan ze toegestuurd krijgen. Zend daartoe een brief aan het redactiesecretariaat met er op vermeld 'Bewijzen vierkantenvierhoek' en er in een aan jezelf geadresseerde en gefrankeerde envelop.



De vierkantenvierhoek uit een Grieks kruis

Een algemene, maar moeilijk bewijsbare stelling luidt:

bij een mooie stelling hoort een mooi bewijs.

De eigenschap van de gelijke en loodrecht op elkaar staande verbindingslijnen in de vierkantenvierhoek vonden we mooi genoeg om in Pythagoras te zetten (nummer 25-1 bladzijde 16). De bewijzen die we ervan hadden echter niet. Dat was dus *niet* te rijmen met bovengenoemde stelling!

We zijn daarom reuze blij met de reactie van N. M. Buizert uit Amsterdam, die liet zien dat het wél simpel en begrijpelijk – dus ook 'mooi' – kan.

Eenvoudig beginnen

De gegeven willekeurige vierhoek, met vier ongelijke zijden en daar vier ongelijke vierkanten tegenaan, is te ingewikkeld. Kijk daarom eerst naar een eenvoudiger bijzonder geval.

Het simpelst is natuurlijk een vierkant $ABCD$ met gelijke vierkanten tegen elke zijde (een Grieks kruis). De verbindingslijnen PR en QS zijn dan natuúrlijk gelijk en staan loodrecht op elkaar. . . niet waar?



Het kruis in het Zwitserse wapen is een voorbeeld van een Grieks ('gelijkarmig') kruis. Deze figuur vormt het uitgangspunt van het bijgaande bewijs.

Dan een klein stapje

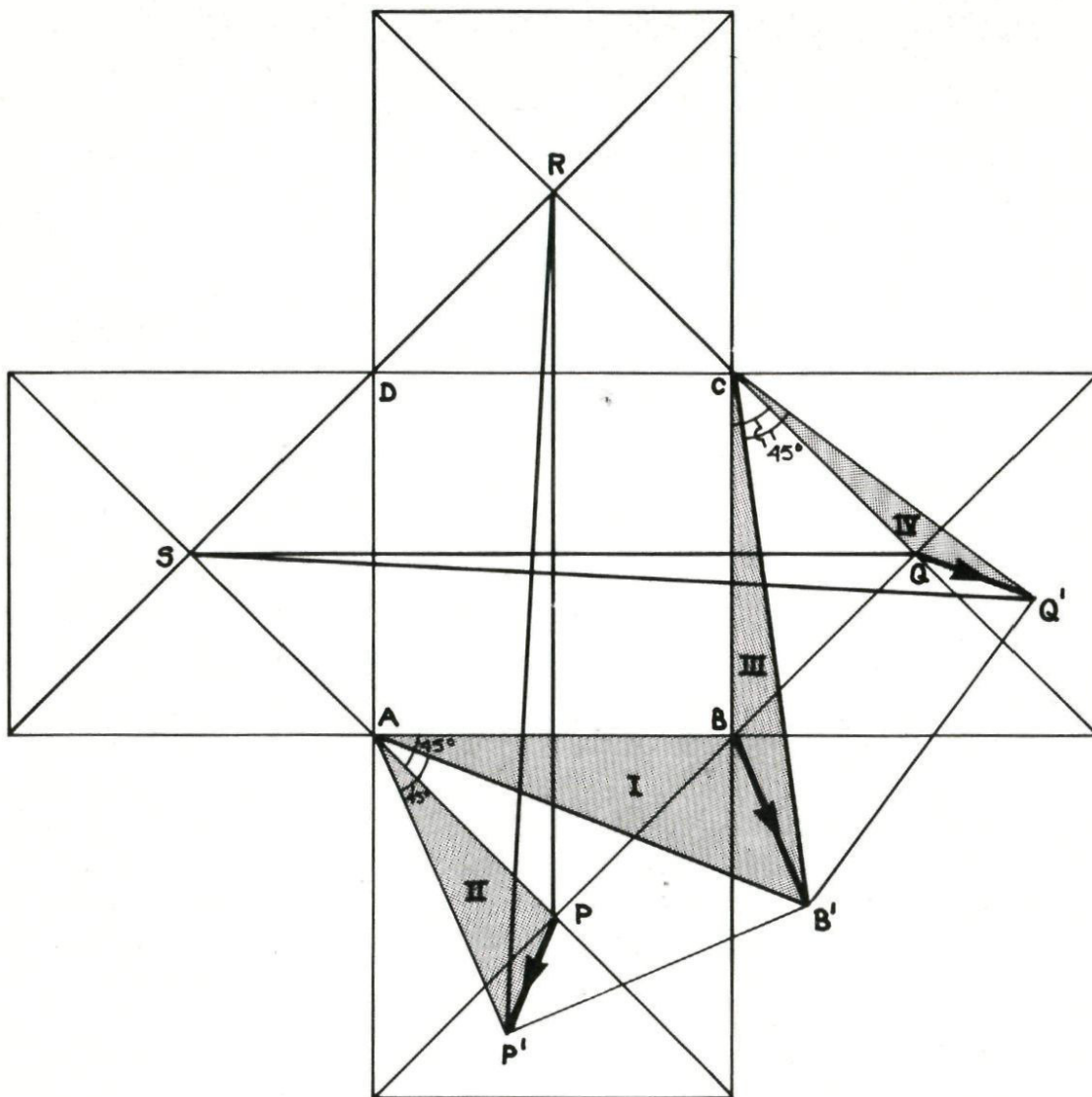
Trek nu stapje voor stapje dat vierkant $ABCD$ wat uit z'n fatsoen. Net zo lang tot je de drakerigste vierhoek krijgt die je maar wilt hebben. Maar neem die stapjes niet te groot. Verschuif bij voorbeeld eerst het hoekpunt B van het beginvierkant een stukje, tot B' .

De vierkantmiddens R en S blijven daarbij op hun plaats, alleen P en Q verschuiven wat, naar P' en Q' . Hoe precies? Dat zie je in de figuur.

Driehoek II ligt -45° gedraaid ten opzichte van I, en is $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ keer zo groot (want $AP:AB =$ halve diagonaal: zijde van een vierkant $= AP':AB' = \frac{1}{2}\sqrt{2}:1$). Dus: ook lijnstuk PP' ligt -45° gedraaid ten opzichte van BB' en is ook $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ keer zo groot.

Hetzelfde verhaal kun je nog een keer afsteken, want driehoek IV ligt $+45^\circ$ gedraaid ten opzichte van III. Dus QQ' ligt $+45^\circ$ gedraaid ten opzichte van BB' en is $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ keer zo groot.

Conclusie: PP' is gelijk aan en staat loodrecht op QQ' . Dit 'gelijk'



en 'loodrecht' gold al voor PR en QS , en daarom geldt het ook voor de driehoeken $PP'R$ en $QQ'S$ als geheel. En dan dus ook de derde zijden: $P'R$ en $Q'S$.
Einde van het eerste stapje.

De rest gaat net zo

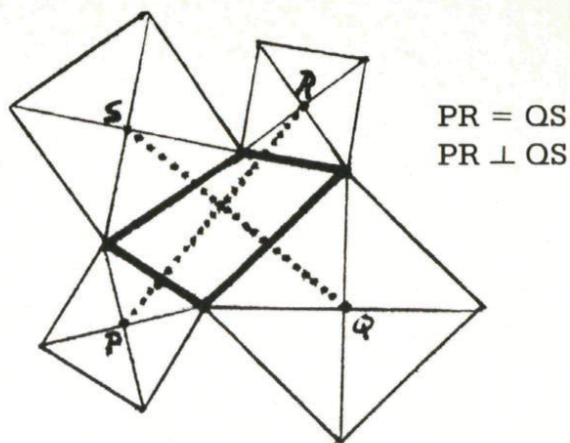
Als B' nog niet ligt waar je hem hebben wilde (wat natuurlijk stom is, want als je er toch mee op sjouw bent kun je hem beter meteen naar z'n goede plaats brengen) schuif je hem verder. Daarna ga je D naar z'n goede plaats dirigeren. Bij al die stapjes *blijven PR en QS gelijk en loodrecht op elkaar*, alleen met een toenemend aantal accenten bij

die letters. De eigenschap is wat we noemen *invariant* onder vervorming van de vierhoek. Of ook: de eigenschap *blijft behouden* bij vervorming van de vierhoek.

A en C mogen ook nog een beurt hebben, maar een handigerd zou er helemaal aan het begin al voor gezorgd hebben dat twee hoekpunten van het beginvierkant al juist op de verlangde plaats in de eindvierhoek lagen!

Een schitterend, simpel bewijs vonden we en dat wilden we je toch niet onthouden. Waarom is het zo moeilijk om zoiets te vinden?

De vierhoeksstelling van Van Aubel



We zijn nog wat meer te weten gekomen over de geschiedenis van het probleem van de 'vierkantenvierhoek' (eerder behandeld in de nummers 1 en 2 van deze jaargang). Over de oorsprong, en over de manier waarop het toen bewezen werd. Het probleem blijkt al meer dan een eeuw lang velen te boeien en uit te dagen.

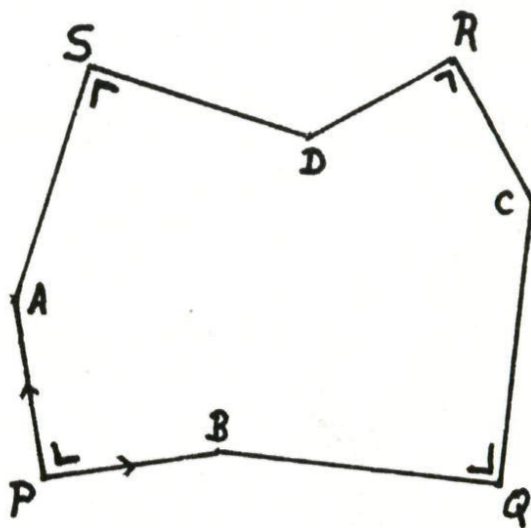
De oorsprong (?)

Uit naspeuringen in bibliotheken bleek dat de eigenschap mogelijk voor het eerst gevonden is in de tweede helft van de vorige eeuw, door een leraar aan het Atheneum te Antwerpen *Dr. H. van Aubel*. De oudste vermelding die we nu kennen komt voor in de jaargang 1878 van het Belgische tijdschrift *Nouvelle correspondance mathématique*. Door Van Aubel en anderen zijn er in de jaren daarna nog tal van varianten en uitbreidingen op gepubliceerd. De eigenschap zelf wordt in verschillende boeken aangehaald als: de vierhoeksstelling van Van Aubel.

Een bewijs van toen

De bewijzen die destijds werden gegeven doen in zekere opzicht modern aan: er werd gerekend met translaties, rotaties en vectoren. Alleen werden die namen toen nog niet gebruikt; gesproken werd van de 'equipollentiemethode'. Zo'n bewijs komt neer op het volgende:

Als figuur is niet méér nodig dan wat hieronder staat. Van de willekeurige vierhoek zijn alleen de hoekpunten *A, B, C* en *D* aangegeven. En van de vierkanten op de zijden (met centra *P, Q, R* en *S*) spelen alleen de getekende halve diagonalen een rol.



Als we ons op reis denken langs de zijden van deze achthoek, dan geldt dat de verplaatsing *PA* even groot is als de verplaatsing *PB*, maar de richting ervan is een

kwartslag (tegen de klok in) verdraaid. Iets dergelijks geldt voor de lijnstukken die bij Q , bij R en bij S samenkomen.

We kijken nu in het bijzonder naar twee reizen van P naar R , één langs de route via B , Q , C en één via A , S , D . Beide reizen samen zijn opgebouwd uit in totaal acht deelverplaatsingen:

$PB, BQ, QC, CR, PA, AS, SD, DR$.

Vervangen we deze stuk voor stuk door verplaatsingen die even groot zijn, maar in richting een kwartslag tegen de klok in verdraaid, dan krijgen we (ga maar na in de figuur) het volgende achttal:

$PA, QC, QB, RD, BP, DS, AS, CR$.

Dit blijken juist de verplaatsingen te zijn die voorkomen in de beide

wegen van Q naar S , zie alweer de figuur. Alleen de volgorde ervan is anders. Maar omdat het resultaat van een aantal verplaatsingen niet afhangt van de volgorde waarin je ze achter elkaar zet, geeft het totaal van de acht verdraaide deelverplaatsingen precies twee keer de reis van Q naar S .

Conclusie: het resultaat QS is even lang als, en qua richting loodrecht op het resultaat PR .

Als reactie op het 'Griekse-kruisbewijs' uit nummer 2, ontvingen we van *J. N. S. Calis* uit Voorst nog een bewijs dat hoofdzakelijk gebruikmaakt van congruente driehoeken. Dit soort meetkunde voerde jarenlang in het onderwijs de boventoon. Het bovenstaande oude Belgische vonden we echter aardiger.

Pi opnieuw op rijm

Op de oproep uit nummer vier ontvingen we nog een aantal pi-rijmen. Die van *E. C. Buissant des Amorie* uit Amstelveen vonden we het aardigst. Het stopt bij de 32e decimaal, want dat is de eerste nul!

Wie π voor 't eerst optekende

3 1 4 1 5 9

en daarna nacht aan nacht geplaagd berekende,

2 6 5 3 5 8 9

schreef natuurlijk vel na vel.

7 9 3 2 3

Nochtans, arme fanaat

8 4 6

(ja, ietwat laat)

2 6 4

met een computer kun je sneller benaderen, jawel!

3 3 8 3 2 7 9 5 0

