



De geschiedenis en methodes voor het oplossen van vergelijkingen met polynomen

Bèta Wetenschappelijk Onderzoek (EC-Master)

Juni 2017

Student: C. L. de Wit

Eerste Begeleider: dr. A. E. Sterk

Tweede Begeleider: prof. dr. H. L. Trentelman

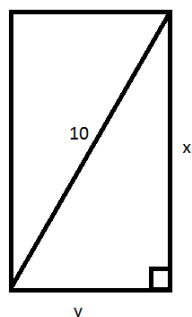
Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
2	Tweedegraads vergelijkingen	3
2.1	Ontbinden in factoren	6
2.2	De abc-formule	6
2.2.1	De geschiedenis van de abc-formule	8
2.2.2	Discriminant criterium abc-formule	10
3	Derdegraads vergelijkingen	11
3.1	De stelling van Cardano	14
3.1.1	Voorbeeld gebruik formule van Cardano	18
3.1.2	Discriminant criterium Cardano	20
3.1.3	Bombelli	22
4	Vierdegraads vergelijkingen	24
4.1	Methode van Ferrari	26
4.1.1	Voorbeeld methode van Ferrari	27
4.1.2	Discriminant vierdegraads vergelijking	27
4.2	Methode van Descartes	29
4.2.1	Voorbeeld methode van Descartes	30
5	Vergelijkingen van hogere graad	30
5.1	Het bewijs van Abel	31
6	Conclusie	33

1 Inleiding

Al op de middebare school krijg je te maken met polynomen in de wiskundeles. Je leert wat kwadratische vergelijkingen zijn en hoe je deze kan oplossen. Op een gegeven moment komt de abc-formule om de hoek kijken; een formule om elke tweedegraads vergelijking op te kunnen lossen.

Waar tegenwoordig vaak direct aan leerlingen op de middelbare school wordt verteld hoe je de vergelijkingen op moet lossen, werd er vroeger anders naar gekeken. Vroeger ging het om praktische zaken en keken ze vooral naar problemen over oppervlaktes of naar bijvoorbeeld de afmetingen van een deur. Als je weet hoe groot de diagonaal van de deur is, hoe vind je dan de bijpassende lengte en breedte van die deur?



Dit is een voorbeeld van een probleem die we in deze scriptie zullen tegenkomen. Dit probleem hoort bij een tweedegraads vergelijking. Dit probleem zouden we dus met behulp van de geleerde stof op de middelbare school moeten kunnen oplossen.

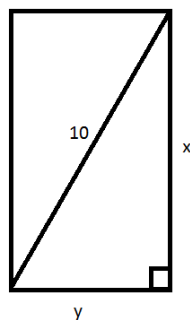
Lastiger wordt het als we gaan kijken naar vergelijkingen met polynomen van een hogere graad, bijvoorbeeld graad 3 of 4. Ook hier zijn methodes voor gevonden en deze zullen we bespreken in deze scriptie. In het laatste hoofdstuk wordt vervolgens besproken waarom het hier stopt. Voor vergelijkingen met polynomen van graad 5 of hoger is er niet meer "zo'n mooie" methode te vinden waarbij je door middel van het invullen van een paar formules de nulpunten kan vinden.

Naast de methodes zelf, speelt ook de geschiedenis van deze methodes een grote rol in deze scriptie. We zien wie de methodes hebben uitgevonden en soms ook hoe deze wiskundige op het idee van de juiste methode zijn gekomen. Op deze manier kunnen we goed zien hoe het bewijzen van stellingen vroeger ging en hoe oud de verschillende methodes zijn.

2 Tweedegraads vergelijkingen

Tweedegraads polynomen die gelijk worden gesteld aan nul zijn vaak beter bekend als kwadratische vergelijkingen. Een andere manier om een kwadratische vergelijking te omschrijven is een probleem waar een product van twee onbekenden of het kwadraat van een onbekende in voor komt. Deze problemen waren een belangrijke studie voor de Babyloniërs en de Chinezen voor de zesde eeuw.

De Babyloniërs en de Chinezen probeerden deze soort problemen op te lossen en beiden baseerden ze hun theorieën op geometrische ideeën. In het Chinese boek *Jiuzhang suanshu* (*Nine Chapters on the Mathematical Art*) staan verschillende problemen die vertaald kunnen worden naar kwadratische vergelijkingen. Het is niet mogelijk om precies te weten wanneer de ontdekkingen in dit boek zijn gedaan, maar er wordt van uit gegaan dat het stamt uit de laatste honderden jaren voor Christus. Een voorbeeld uit dit boek gaat over een deur waarvan de hoogte 6,8 voet meer is dan de breedte. Het probleem is nu om de hoogte en de breedte van de deur te vinden.



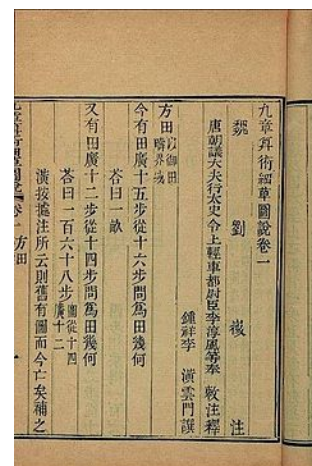
Wanneer we de stelling van Pythagoras gebruiken, kunnen we dit probleem als volgt beschouwen:

$$\begin{aligned}x - y &= 6,8 \\ x^2 + y^2 &= 100.\end{aligned}$$

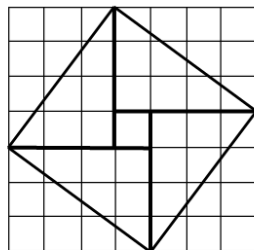
Dit probleem kunnen we omschrijven in een algemenere vorm

$$\begin{aligned}x - y &= d \\ x^2 + y^2 &= c^2.\end{aligned}$$

De Chinezen gebruikten de volgende afbeelding voor de stelling van Pythagoras.



Figuur 1: Bladzijde uit *Jiuzhang suanshu* [1]



En zeiden hierover:

Laat ons een rechthoek afsnijden met breedte 3 en lengte 4. De diagonaal tussen de twee hoeken is dan 5. Nu maken we van deze diagonaal een vierkant, omschreven door halve rechthoeken die buiten zijn gelaten door het maken van het vierkant. De breedte van deze halve rechthoeken is 3, de lengte is 4 en de diagonalen zijn 5. Samen maken deze halve rechthoeken twee rechthoeken met een oppervlakte van 24. Wanneer we dit aftrekken van het vierkant met oppervlakte 49, houden we een oppervlakte van 25 over.

Hiermee hadden de Chinezen de stelling van Pythagoras uitgelegd. Uit hetzelfde plaatje konden de Chinezen halen dat

$$(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2 \quad \text{en} \quad c^2 = 2xy + (x - y)^2$$

oftewel

$$4xy = 2c^2 - 2(x - y)^2.$$

Hieruit volgt

$$(x + y)^2 = 2c^2 - (x - y)^2$$

oftewel

$$x + y = \sqrt{2c^2 - (x - y)^2}.$$

Dat geeft uiteindelijk

$$\frac{x + y}{2} = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

De auteur van het boek beredeneert eerst dat $x + y = 12,4$ en door dit te combineren met $x - y = 6,8$ krijgt hij de oplossingen $x = 9,6$ en $y = 2,8$.

Zo hebben de Chinezen veel voorbeelden laten zien, maar van de Babyloniërs zijn nog meer voorbeelden gevonden. Veel voorbeelden zijn van de vorm

$$\begin{aligned} x + y &= b \\ xy &= c. \end{aligned}$$

Hieruit lijken we op te kunnen merken dat de Babyloniërs op zoek waren naar een verband tussen de oppervlakte en de omtrek van een rechthoek. Uit de voorbeelden blijkt dat vroeger veel mensen dachten dat de oppervlakte van een rechthoek alleen afhankelijk was van zijn omtrek.

Elk probleem van de Babyloniërs wordt beschreven met getallen die horen bij de lengte, breedte en oppervlakte. Een voorbeeld van een probleem van de Babyloniërs is

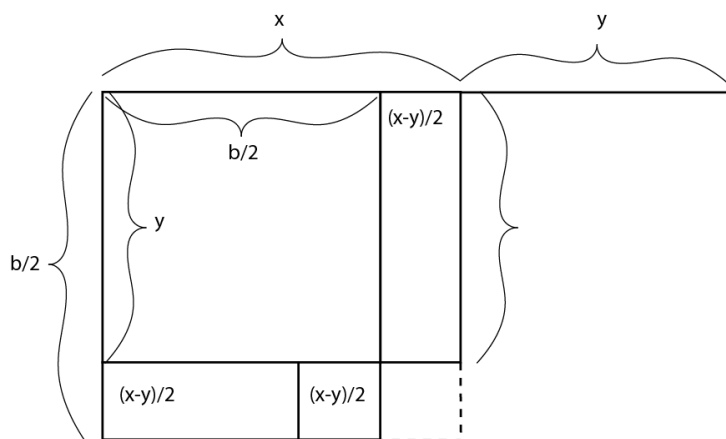
$$\begin{aligned}x + y &= 6\frac{1}{2} \\ xy &= 7\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Om dit probleem op te lossen, nemen ze de helft van $6\frac{1}{2}$ om $3\frac{1}{4}$ te krijgen. Vervolgens kwadrateren ze dit getal en krijgen ze $10\frac{9}{16}$. Hier halen ze $7\frac{1}{2}$ vanaf en ze vinden $3\frac{1}{16}$. Vervolgens halen ze de wortel ervan af en krijgen ze $1\frac{3}{4}$. Hieruit concluderen ze dat de lengte $3\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4} = 5$ is en de breedte $3\frac{1}{4} - 1\frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$.

In formulevorm zou hun oplossing er als volgt uit zien:

$$\begin{aligned}x &= \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \\ y &= \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.\end{aligned}$$

Door de voorbeelden van de Babyloniërs goed te bestuderen, zijn we erachter gekomen dat de Babyloniërs een geometrische procedure volgden. Hierbij hoort de volgende afbeelding.



Eerst halveren de Babyloniërs b en maken een vierkant. Er geldt dat $\frac{b}{2} = x - \frac{x-y}{2} = y + \frac{x-y}{2}$, dus het vierkant met $\frac{b}{2}$ overschrijdt de originele rechthoek, met oppervlakte c , met het vierkant $\frac{x-y}{2}$. Dat geeft

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Uit het figuur kunnen we dan halen dat als we $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ optellen bij $\frac{b}{2}$ we de lengte x vinden en als we $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ van $\frac{b}{2}$ aftrekken we de breedte y vinden [16].

Op de middelbare school leren we te werken met dit soort problemen, oftewel met kwadratische vergelijkingen. Onder andere leren we deze vergelijkingen op te lossen. Hiervoor worden er verschillende methodes aangereikt, onder andere het ontbinden in factoren en het gebruiken van de abc-formule.

2.1 Ontbinden in factoren

Een snelle handige manier om kwadratische vergelijkingen op te lossen, is het ontbinden in factoren. Om het geheugen even op te frissen, volgt hieronder een voorbeeld.

Voorbeeld 1. *We kijken naar de kwadratische vergelijking $x^2 + 2x - 8$.*

Om de nulpunten van deze vergelijking te vinden, moeten we $x^2 + 2x - 8 = 0$ oplossen. Dit kunnen we doen door middel van ontbinden in factoren. We schrijven onze vergelijking om in $(x - 2)(x + 4) = 0$ en hieruit volgt direct dat $x = 2$ of $x = -4$.

2.2 De abc-formule

Een andere bekende methode om tweedegraadsvergelijkingen op te lossen is de abc-formule. Hieronder is de formule gegeven, gevolgd door enkele bewijzen.

Stelling 1. ABC-formule. *Een vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossingen*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1)$$

Er zijn verschillende manieren om de abc-formule te bewijzen. Hieronder worden twee manieren behandeld. In het eerste bewijs wordt gebruik gemaakt van substitutie.

Bewijs. We beginnen met de vergelijking die we willen oplossen $ax^2 + bx + c = 0$. Voor substitutie gebruiken we $x = x_1 + iy_1$. Hierdoor krijgen we

$$ax_1^2 + 2ax_1iy_1 + ai^2y_1^2 + bx_1 + biy_1 + c = 0$$

Er geldt $i^2 = -1$ en we zien dat de volgende twee vergelijkingen moeten gelden

1. $ax_1^2 - ay_1^2 + bx_1 + c = 0$
2. $2ax_1iy_1 + biy_1 = 0$

Hieruit kunnen we afleiden dat

1. $y_1^2 = ax_1^2 + bx_1 + \frac{c}{a}$
2. $x_1 = \frac{-b}{2a}$

Door gebruik te maken van substitutie volgt nu

$$y_1^2 = \frac{-b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{of} \quad y_1 = \frac{\pm\sqrt{-b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vervolgens gebruiken we onze substitutie $x = x_1 + iy_1$ en zien we dat

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

□

In het volgende bewijs wordt de abc-formule bewezen met behulp van kwadraat afsplitsen. Dit bewijs is afkomstig uit [17].

Bewijs. We kijken naar de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$. We weten dat $a \neq 0$, anders hebben we niet meer te maken met een kwadratische vergelijking. Omdat $a \neq 0$, mogen we elke term in de vergelijking delen door a . Hierdoor krijgen we de volgende vergelijking

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Door middel van kwadraat afsplitsen vinden we

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

Dit kunnen we vervolgens omschrijven naar

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

En met behulp van worteltrekken vinden we

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Wanneer we dit omschrijven, krijgen we de abc-formule

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

□

2.2.1 De geschiedenis van de abc-formule

Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi heeft in 825 een boek uitgebracht onder de naam "Algebra". Zijn boek begint met het volgende specifieke probleem:

"Een vierkant en tien wortels ervan zijn gelijk aan negenendertig dirhems. Dat wil zeggen, wat moet het vierkant zijn, dat aangevuld met tien van zijn eigen wortels, negenendertig oplevert?"

Dit is een bespreking van een kwadratische vergelijking. In symbolen, die toen nog niet gebruikt werden, krijgen we $x^2 + 10x = 39$. De oplossing die Al-Khwarizmi gaf, is ook in woorden:

"Je halveert het aantal wortels, wat in het huidige voorbeeld vijf oplevert. Dit [getal] vermenigvuldig je met zichzelf; het product is vijftwintig. Tel dit op bij negenendertig; de som is vierenzestig. Neem nu hiervan de wortel, dat is acht en trek daarvan de helft van het aantal wortels af, dat is vijf; er blijft drie over. Dat is de wortel van het vierkant dat je zocht, het vierkant zelf is negen."

In symbolen ziet de oplossing er als volgt uit

$$x = \sqrt{5^2 + 39} - 5 = \sqrt{25 + 39} - 5 = \sqrt{64} - 5 = 8 - 5 = 3$$

Het blijkt dat Al-Khwarizmi eigenlijk de abc-formule gebruikt om het probleem op te lossen. Hij wil $x^2 + bx = c^2$ oplossen en gebruikt hiervoor

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Deze formule ziet er echter wel iets anders uit dan de abc-formule die we nu kennen. Een reden hiervoor is dat wiskundigen in die tijd nog niet werkten met negatieve getallen.

Na een beetje omschrijven en de negatieve oplossing toevoegen, zien we dat zijn formule hetzelfde is als de huidige abc-formule:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

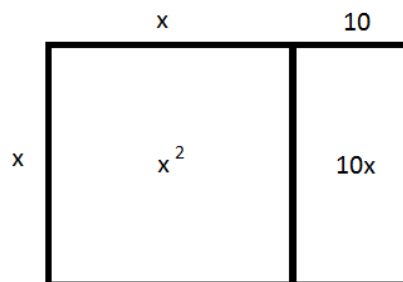
Het enige verschil is dat a ontbreekt in de formule. Dit komt omdat Al-Khwarizmi een vierkant bekeek en in dat geval geldt $a = 1$.



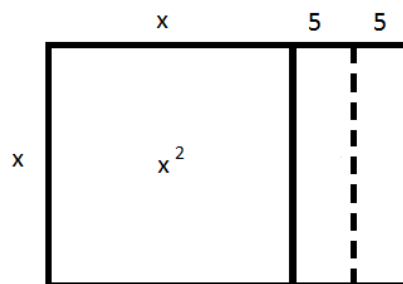
Figuur 2: Al-Khwarizmi [2]

Al-Khwarizmi wilde ook uitleggen waarom zijn formule werkt. Hij deed dit echter niet op algebraïsche manier, zoals we eerder twee bewijzen hebben bekeken, maar hij gebruikte een meetkundig argument.

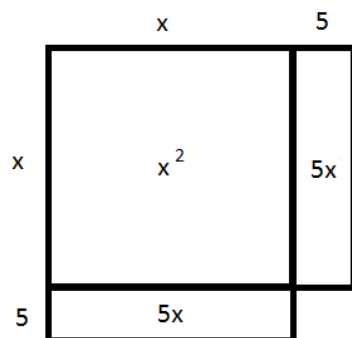
We kunnen 'een vierkant en tien wortels' als volgt afbeelden



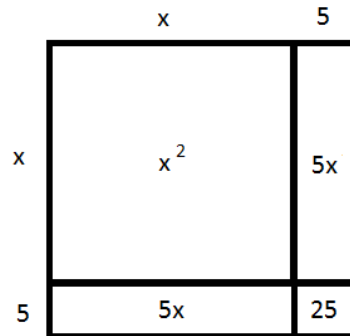
Het probleem vertelt ons dat de oppervlakte van bovenstaande figuur gelijk is aan 39. Om het probleem op te lossen, gaan we eerst het aantal wortels halveren



Een deel van de rechterkant verplaatsen we naar de onderkant en we krijgen het volgende figuur



Dit figuur heeft nog steeds een oppervlakte van 39. Dit figuur kunnen we aanvullen tot een groot vierkant door middel van het toevoegen van een klein vierkantje met een oppervlakte van 25. De totale oppervlakte van het gehele figuur is dan $39 + 25 = 64$.



De totale oppervlakte is 64, dat betekent dat de zijde van het grote vierkant gelijk is aan de wortel van 64, dus aan 8. We trekken hier 5 van af en vinden dat x gelijk is aan 3.

Na Al-Khwarizmi hebben ook andere wiskundigen over kwadratische vergelijkingen geschreven, alhoewel de methodes verfijnder werden, bleef het basisidee hetzelfde. Ook werd vaak hetzelfde probleem beschreven, het probleem dat hierboven ook staat beschreven.

In het begin van de zeventiende eeuw kwamen wiskundigen met het idee om letters te gebruiken om getallen aan te geven. Thomas Harriot en René Descartes bedachten dat het handiger is om vergelijkingen om te schrijven naar een vorm die eindigt op $= 0$. Vanaf dit moment konden $ax^2 + bx = c$ en $ax^2 + c = bx$ gezien worden als vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$. Hieruit volgde ook de formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

de abc-formule zoals wij die nu gebruiken [10].

2.2.2 Discriminant criterium abc-formule

Vanaf de Mesopotamische tijden tot aan de Renaissance kwamen er drie vormen van kwadratische vergelijkingen voor. De standaardvorm zoals wij die nu kennen, $ax^2 + bx + c = 0$ kwam niet voor, ook niet met $a, b, c > 0$. De oorzaak hiervan is dat er alleen werd gekeken naar vergelijkingen met positieve en rationale oplossingen. De drie vormen die wel voorkwamen, inclusief hun oplossing, zijn de volgende:

1. De standaardvorm $ax^2 + bx = c$ met oplossing

$$x = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}}{a}.$$

2. De standaardvorm $ax^2 = bx + c$ met oplossing

$$x = \frac{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}}{a}.$$

3. De standaardvorm $ax^2 + c = bx$ met oplossingen

$$x = \frac{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Alleen de laatste oplossing kan meerdere positieve oplossingen hebben, zolang de discriminant positief is [18]. Hierbij valt op dat alleen de laatste oplossing een $\pm$ bevat waar de eerste twee alleen een $+$ -oplossing bevatten. Dit heeft waarschijnlijk te maken met het feit dat ze op dat moment in de wiskunde slechts keken naar de positieve oplossingen.

Ook bij de abc-formule zoals we die nu kennen, hebben we te maken met een discriminant criterium. De oplossing van een tweedegraads vergelijking volgens de abc-formule is

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

De discriminant is dan

$$b^2 - 4ac.$$

Nu zijn er drie opties. Wanneer de discriminant positief is, heeft de vergelijking twee reële nulpunten, als de discriminant gelijk is aan nul, heeft de vergelijking één reëel nulpunt en wanneer de discriminant negatief is, heeft de vergelijking geen reële nulpunten. In het laatste geval heeft de vergelijking wel twee complexe nulpunten.

3 Derdegraads vergelijkingen

Derdegraads vergelijkingen zijn vergelijkingen van de vorm

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

In de geschiedenis kwamen derdegraads vergelijkingen voor in meetkundige problemen die voor het eerst bekeken werden door de Grieken. De originele problemen zijn erg oud, soms wel van 400 jaar voor Christus, maar de oplossingen van deze problemen kwamen pas 2000 jaar later.

Een beroemde meetkundige vraag die betrekking heeft op derdegraads vergelijkingen is de volgende:

”Gegeven een hoek, is er een manier om een hoek te construeren die één derde deel van de gegeven hoek is?”

Het is belangrijk om hierbij eerst te kijken welke hulpmiddelen we mogen gebruiken om de gevraagde hoek te construeren. Wanneer we slechts een passer en een latje mogen gebruiken, is het niet mogelijk deze hoek te construeren. Het is wel mogelijk als we ook andere instrumenten toestaan.

Op het moment dat de goniometrie ontwikkeld was, kwamen de wiskundigen erachter dat bovenstaande probleem neerkomt op het oplossen van een derdegraads vergelijking. Dit kunnen we bekijken door de gegeven hoek, θ te noemen. Wanneer we opzoek zijn naar één derde van deze hoek, zoeken we dus een hoek, hoek α , die wanneer we hem drie keer nemen, we hoek θ terugkrijgen. Er geldt dus dat $\alpha = \frac{\theta}{3}$. Vervolgens kunnen we de formule voor de cosinus van 3α toepassen:

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha). \quad (2)$$

Hoek θ is bekend, en hierdoor is ook $\cos(\theta)$ bekend, deze noemen we b . Als we $\frac{\theta}{3}$ willen construeren, moeten we eigenlijk de cosinus van de hoek construeren. We laten $x = \cos(\frac{\theta}{3})$ en we gebruiken (2) met $\alpha = \frac{\theta}{3}$. We krijgen $b = 4x^3 - 3x$ oftewel $4x^3 - 3x - b = 0$. Het vinden van x komt nu neer op het oplossen van een derdegraadsvergelijking.

Vanaf het moment dat de Arabische wiskundigen zich bezig hielden met algebra was het onvermijdelijk dat iemand zou proberen de regels uit de algebra van dat moment toe te passen op derdegraadsvergelijkingen. Eén van de wiskundigen die dit probeerde was Umar Al-Khayammi, ook wel bekend onder de naam Omar Khayyam. Khayyam is geboren in 1048 in Iran en overleden in 1131.

De Arabische wiskundigen gebruikten in die tijd geen negatieve getallen en stonden niet toe dat de nul als coëfficiënt gebruikt mag worden. Hierdoor moest Khayyam veel verschillende soorten vergelijkingen onderscheiden. Zo is $x^3 + ax = b$ een andere soort vergelijking dan $x^3 = ax + b$. Wanneer we op deze manier naar vergelijkingen kijken, zijn er veertien verschillende soorten derdegraads vergelijkingen. Voor elke soort derdegraads vergelijking vond Khayyam een oplossing, hij vond een manier om een lijnstuk te construeren die voldoet aan de vergelijking. Helaas helpen deze oplossingen niet als we op zoek zijn naar een waarde voor x die aan de vergelijking voldoet. Dit zag Khayyam zelf ook in en hij liet het probleem over aan andere wiskundigen.

De volgende wiskundigen die zich aan het probleem waagden, waren de wiskundigen in Italië. Dit vond plaats in de dertiende eeuw. De Italianen gaven voorbeelden van derdegraads vergelijkingen met een oplossing. Het probleem was echter dat ze de voorbeelden zo kozen dat ze wisten hoe ze ze moesten oplossen of dat de voorbeelden waren opgebouwd uit de oplossing van het probleem. Ook kwam het voor dat er onjuiste manieren werden uitgelegd om derdegraads vergelijkingen op te lossen. Er was op dat moment nog steeds geen volledige oplossing voor het algemene probleem gevonden.



Figuur 3: Scipione del Ferro (links) [3] en Nicollò Fontana (rechts) [4]

De wiskundigen die als eerste een methode hadden voor het oplossen van bepaalde derdegraads vergelijkingen waren Scipione del Ferro (1465-1526) en Nicollò Fontana (1500-1557). Fontana is ook wel bekend onder de naam Tartaglia, wat "de Stotteraar" betekent. Echter hielden beide wiskundigen hun methode geheim. Hier was een reden voor. In de tijd dat deze wiskundigen leefden werden ze onderhouden door rijke beschermheren. Deze heren wilden dat de wiskundigen hun talenten bewezen tijdens openbare competities. Tijdens deze competities werd er van de wiskundigen verwacht dat de andere geleerden konden verslaan. Del Ferro en Fontana konden andere geleerden uitdagen om een derdegraads vergelijking op te lossen. Hierbij kozen ze natuurlijk een vergelijking uit die ze zelf wisten op te lossen.

In 1535 begon Tartaglia op te scheppen over de kennis die hij bezat, hij wist immers hoe je een derdegraads vergelijking kon oplossen. Hij wilde dit echter nog steeds niet aan iemand uitleggen. In die tijd was del Ferro overleden en hij had voor zijn dood zijn methode uitgelegd aan zijn student Antonio Maria Fior. Fior daagde Tartaglia uit en kwam erachter dat Tartaglia had uitgevonden hoe je een vergelijking van de vorm $x^3 + bx^2 = d$ kan oplossen, terwijl hij van del Ferro had geleerd hoe je een vergelijking van de vorm $x^3 + cx = d$ kan oplossen.

Tijdens de wedstrijd stelde Fior een hele serie vragen met vergelijkingen van de vorm waarvan hij zelf de oplossing had. Tartaglia slaagde er op dat moment ook in om een oplossing voor deze soort vergelijkingen te vinden en hij won de wedstrijd met gemak, aangezien de kennis van Fior niet verder ging dan dat hij van zijn leermeester had geleerd.



De Italiaanse wiskundige Girolamo Cardano (1501-1576) hoorde van de overwinning van Tartaglia. In 1539 nam hij contact op met Tartaglia en probeerde hem te overtuigen om zijn oplossing te delen. Cardano beloofde het geheim te houden en Tartaglia raakte overtuigd. Hij reisde naar Milaan om zijn oplossing uit te leggen aan Cardano. Cardano was vanaf dat moment ook op de hoogte van de

Figuur 4: Girolamo Cardano [5]

methode om enkele soorten derdegraads vergelijkingen op te kunnen lossen. Hij pakte vervolgens het algemene probleem van de derdegraads vergelijking aan. Na zes jaar hard werken, is het hem gelukt. Cardano heeft het probleem van de algemene derdegraads vergelijkingen volledig weten op te lossen. Cardano stuitte echter wel op een probleem. Hij had immers Tartaglia de belofte gemaakt om oplossing van Tartaglia geheim te houden. Cardano kwam er echter achter dat del Ferro de oplossing eerder had gevonden dan Tartaglia. Hij had echter niet beloofd om de oplossing van del Ferro geheim te houden en hij bedacht dat hij die wel kon publiceren. Cardano heeft hierna het boek *Ars Magna* ([12]) gepubliceerd. In het boek stond onder andere de algemene oplossing voor derdegraads vergelijkingen en vierdegraadsvergelijkingen (die inmiddels gevonden was door zijn assistent Lodovico Ferrari (1522-1565)). Het boek van Cardano was geschreven in het Latijn en hierdoor bereikte het vele wiskundigen in heel Europa. Ook Tartaglia kreeg het boek onder ogen. Dit maakte hem natuurlijk erg boos en hij probeerde het verhaal van het bedrog van Cardano te verspreiden, maar Cardano was inmiddels bezig met andere dingen in zijn leven. De assistent van Cardano, Ferrari, nam contact op met Tartaglia en daagde hem uit voor een wedstrijd. In het begin had Tartaglia hier geen belangstelling voor, maar toen in 1548 hem een professoraat werd aangeboden onder de voorwaarde dat hij Ferrari zou verslaan, stemde hij in met de wedstrijd. Aangezien Ferrari de algemene oplossing van een derdegraads en zelfs een vierdegraads vergelijking wist, maakte Tartaglia geen kans en verloor hij de wedstrijd [10].

3.1 De stelling van Cardano

Stelling 2. *Formule van Cardano* Een vergelijking van de vorm $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossingen

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 - \frac{a}{3} \\ y_2 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} + \frac{u_1 v_1}{2} \cdot i\sqrt{3} - \frac{a}{3} \\ y_3 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{u_1 v_1}{2} \cdot i\sqrt{3} - \frac{a}{3} \end{aligned}$$

met daarin

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ v_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

en daarin geldt dat

$$p = b - \frac{a^2}{3}$$
$$q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c.$$

Het bewijs dat hieronder gegeven wordt is een combinatie van de bewijzen uit [15] en [18].

Bewijs. We kijken naar de algemene vorm van een derdegraadsvergelijking

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

waarin A , B , C , en D reële getallen zijn. Hiernaast moet gelden dat A ongelijk aan nul is, anders is het immers geen derdegraads vergelijking.

Deze algemene vorm kunnen we omschrijven naar

$$x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A} = 0.$$

Hierdoor raken we de coëfficiënt voor de x^3 kwijt en krijgen we de volgende, simpelere, vorm

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (3)$$

We voeren vervolgens de substitutie $x = y + k$ uit en krijgen hierdoor

$$y^3 + (3k + a)y^2 + (3k^2 + 2ak + b)y + (k^3 + ak^2 + bk + c) = 0.$$

Wanneer we $k = -\frac{a}{3}$ kiezen, zien we de volgende vergelijking ontstaan

$$y^3 + (b - \frac{a^2}{3})y + (\frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c) = 0. \quad (4)$$

In simpele vorm hebben we nu

$$y^3 + py + q = 0. \quad (5)$$

We hebben nu de substitutie $x = y - \frac{a}{3}$ uitgevoerd en hierdoor hebben we de derdegraads vergelijking (3) kunnen omschrijven naar een gereduceerde vorm waar de kwadratische term is weggefallen.

Voor alle $u, v \in \mathbb{R}$ geldt

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0. \quad (6)$$

Wanneer we de vergelijkingen (5) en (6) met elkaar vergelijken, zien we dat $y = u + v$ een oplossing kan zijn wanneer de volgende twee vergelijkingen gelden

$$3uv = -p$$
$$u^3 + v^3 = -q. \quad (7)$$

Omschrijven geeft ons

$$\begin{aligned} u^3 v^3 &= -\frac{1}{27}p^3 \\ u^3 + v^3 &= -q. \end{aligned} \tag{8}$$

Wanneer we deze twee vergelijkingen combineren kunnen we een vergelijking vormen waaruit v^3 wegvalt:

$$u^3(-q - u^3) = -\frac{1}{27}p^3.$$

En dat geeft ons

$$(u^3)^2 + qu^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0.$$

Dit kunnen we oplossen voor u^3 met behulp van de abc-formule. We vinden dan

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}. \tag{9}$$

De vergelijkingen (7) en (8) kunnen we ook combineren en omschrijven zodanig dat u^3 wegvalt. We krijgen dan

$$v^3(-q - v^3) = -\frac{1}{27}p^3.$$

En dat geeft ons

$$(v^3)^2 + qv^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0.$$

Wanneer we dit oplossen voor v^3 met behulp van de abc-formule vinden we

$$v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

We zien dat u en v omgewisseld kunnen worden en maken een keuze. We kiezen er nu voor om u^3 uit te drukken in de plus-variant en om v^3 uit te drukken in de min-variant. We vinden nu

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Door deze uitdrukkingen te combineren vinden we de formule die bekend staat als de "formule van Cardano":

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

We weten dat als we kijken naar een vergelijking van de vorm $z^3 = c$ we drie oplossingen hebben, namelijk

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{c} \\ z_2 &= \sqrt[3]{c} \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ z_3 &= \sqrt[3]{c} \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

De oplossingen voor x moeten dus van de vorm $x = u_i + v_j$ zijn met $i, j = 1, 2, 3$. We vinden

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ u_2 &= u_1 \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ u_3 &= u_1 \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ v_2 &= v_1 \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ v_3 &= v_1 \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

We hebben nu inmiddels 3 oplossingen voor u en 3 oplossingen voor v gevonden. Nu moeten de paren gevonden worden die voldoen aan onze uitdrukkingen voor p en q die we in (7) hebben gevonden:

$$\begin{aligned} 3uv &= -p \\ u^3 + v^3 &= -q. \end{aligned}$$

Het paar (u_1, v_1) voldoet aan deze vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
u_1^3 + v_1^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\
&= -q \\
3u_1v_1 &= 3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
&= 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\
&= 3\left(-\frac{p}{3}\right) \\
&= -p.
\end{aligned}$$

Op dezelfde manier kunnen we zien dat de paren (u_2, v_3) en (u_3, v_2) ook aan de vergelijkingen voldoen. De overige paren voldoen wel aan de vergelijking $u^3 + v^3 = -q$, maar niet aan $3uv = -p$. Dit is te wijten aan de producten met de factoren $1 \pm \sqrt{3}$ die ontstaan. We hebben nu de drie nulpunten van de derdegraads vergelijkingen gevonden, namelijk

$$\begin{aligned}
y_1 &= u_1 + v_1 && \text{(Dit is de formule van Cardano)} \\
y_2 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} + \frac{u_1 - v_1}{2} \cdot i\sqrt{3} \\
y_3 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{u_1 - v_1}{2} \cdot i\sqrt{3}.
\end{aligned} \tag{11}$$

We hebben nu de oplossingen voor vergelijking (4) gevonden. Tijdens het oplossen hebben we gebruik gemaakt van de substitutie $x = y - \frac{a}{3}$. Om de oplossingen voor vergelijking (3),

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

te vinden, moeten we de gebruikte substitutie verwerken in de oplossingen. De oplossingen voor (3) worden dan

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - \frac{a}{3} \\
x_2 &= y_2 - \frac{a}{3} \\
x_3 &= y_3 - \frac{a}{3}.
\end{aligned}$$

□

3.1.1 Voorbeeld gebruik formule van Cardano

Voorbeeld 2. *We gaan kijken naar de vergelijking*

$$x^3 - 11x^2 + 4x + 60 = 0. \tag{12}$$

Deze vergelijking gaan we oplossen met behulp van de methode van Cardano.

We zien dat in ons geval geldt dat $a = -11$, $b = 4$ en $c = 60$. We gebruiken vervolgens de substitutie $x = y - \frac{a}{3}$, wat in ons geval $x = y + \frac{11}{3}$ wordt.

Je kan ervoor kiezen om deze substitutie zelf uit te voeren in (12), maar je kan er ook voor kiezen om de gevonden a , b en c in te vullen in (4). We krijgen

$$y^3 + \left(4 - \frac{(-11)^2}{3}\right)y + \left(\frac{2}{27} \cdot (-11)^3 - \frac{-44}{3} + 60\right) = 0.$$

Wanneer we dit uitwerken vinden we

$$y^3 - \frac{109}{3}y - \frac{646}{27} = 0. \quad (13)$$

We kunnen hieruit concluderen dat $p = -\frac{109}{3}$ en $q = -\frac{646}{27}$. Deze p en q kunnen we gebruiken om u_1 en v_1 uit te rekenen. We vinden

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{\frac{323}{27} + \sqrt{\left(-\frac{323}{27}\right)^2 + \left(-\frac{109}{9}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{323}{27} + \sqrt{-\frac{4900}{3}}} \\ v_1 &= \sqrt[3]{\frac{323}{27} - \sqrt{\left(-\frac{323}{27}\right)^2 + \left(-\frac{109}{9}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{323}{27} - \sqrt{-\frac{4900}{3}}}. \end{aligned}$$

Vervolgens kunnen we de som van u_1 en v_1 uitrekenen:

$$u_1 + v_1 = \sqrt[3]{\frac{323}{27} + \sqrt{-\frac{4900}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{323}{27} - \sqrt{-\frac{4900}{3}}} = \frac{19}{3}.$$

Dit is tevens onze eerste oplossing, y_1 . Door de formules voor y_2 en y_3 uit (11) in te vullen vinden we de andere twee oplossingen:

$$\begin{aligned} y_2 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} + \frac{u_1 - v_1}{2} \cdot i\sqrt{3} = -\frac{17}{3} \\ y_3 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{u_1 - v_1}{2} \cdot i\sqrt{3} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

We hebben nu de drie oplossingen voor (13) gevonden. Om de oplossingen voor ons probleem (12),

$$x^3 - 11x^2 + 4x + 60 = 0,$$

te vinden, moeten we kijken naar de substitutie die we gebruikt hebben. De substitutie die we hebben gebruikt in dit geval is $x = y + \frac{11}{3}$. De oplossingen voor x kunnen we dus vinden door bij alle oplossingen voor y $\frac{11}{3}$ op te tellen. De oplossingen voor (12) worden dan

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 + \frac{11}{3} = \frac{19}{3} + \frac{11}{3} = 10 \\x_2 &= y_2 + \frac{11}{3} = -\frac{17}{3} + \frac{11}{3} = -2 \\x_3 &= y_3 + \frac{11}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{11}{3} = 3.\end{aligned}$$

3.1.2 Discriminant criterium Cardano

Het aantal reële oplossingen, dubbele oplossingen meegeteld, van een derdegraads vergelijking is één of drie. Het exacte aantal reële nulpunten hangt, net als bij tweedegraads vergelijkingen, af van de discriminant. Er zijn drie mogelijkheden:

1. De discriminant is positief. Dat betekent dat

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0.$$

Wanneer dit het geval is, heeft de vergelijking één reële oplossing en twee complexe oplossingen.

Dit lijkt iets tegen het gevoel in te gaan misschien. We gaan hier iets beter naar kijken.

Wanneer $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, geldt dat u_1 en v_1 beide imaginair zijn. De eerste oplossing vinden we door $y_1 = u_1 + v_1$ wat een reëel antwoord oplevert. De term $u_1 - v_1$ is wel imaginair, maar voor de oplossingen y_2 en y_3 vermenigvuldigen we deze termen weer met een imaginair getal, waardoor ze weer reëel worden. Er zijn dus inderdaad 3 reële oplossingen in het geval dat de discriminant positief is.

2. De discriminant is gelijk aan nul, dus

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Wanneer dit het geval is, zijn er drie reële nulpunten, maar is één nulpunt een dubbel nulpunt. We zien dan dat

$$u_1 = v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}y_1 &= -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \\y_{2,3} &= \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\end{aligned}$$

3. De discriminant is negatief, dus

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0.$$

Wanneer dit het geval is, heeft de vergelijking drie reële nulpunten.

De laatste optie kunnen we nog iets verder bekijken. Wanneer de discriminant negatief is, kunnen we de volgende vergelijking opstellen:

$$\begin{aligned} -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} &= -\frac{q}{2} \pm i \sqrt{-\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]} \\ &= r (\cos \varphi \pm i \sin \varphi). \end{aligned}$$

Hierin geldt

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ \cos \varphi &= -\frac{q}{2r} \\ \sin \varphi &= \frac{1}{r} \sqrt{-\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]} \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we halen dat

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{3} \right) \\ v &= \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{3} - i \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

waarin k gelijk is aan 0, 1 of 2. Deze k is gelijk gekozen in de vergelijking voor u als in de vergelijking voor v . Hierdoor wordt er aan de vergelijking $u_i \cdot v_i = -\frac{p}{3}$ voldaan.

De nulpunten van de vergelijking zijn dan

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3} \\ x_2 &= 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} \\ x_3 &= 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Deze oplossingen zijn allemaal reëel [18].

Cardano was dus de wiskundige die er in is geslaagd om de algeme oplossing van een derdegraads vergelijking te geven. Er zat echter wel een 'maar' aan het hele verhaal. Tijdens het oplossen van vergelijkingen van de vorm $x^3 = px + q$ aan de hand van de methode

van Cardano kwamen mensen erachter dat ze soms op, voor hun, vreemde uitdrukkingen uitkwamen. Wanneer we kijken naar de vergelijking

$$x^3 = 15x + 4$$

geeft de formule van Cardano de volgende oplossing:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

In het algemeen zou het voorkomen van de wortels van een negatief getal als conclusie hebben dat er geen oplossing bestaat voor de gegeven vergelijking, maar in dit geval heeft de vergelijking, $x^3 = 15x + 4$, wel een oplossing: $x = 4$.

Cardano had voor het uitgeven van zijn boek dit probleem zelf al ontdekt. Hij heeft hierover gepraat met Tartaglia, maar Tartaglia had geen verklaring voor dit verschijnsel. Hij is ervan uitgegaan dat Cardano zijn methode gewoon niet helemaal begrepen had en dat er hierdoor iets fout was gegaan.

Degene die uiteindelijk met de oplossing kwam, was Rafael Bombelli (1526-1572) [10]. De oplossing van Bombelli zien we in de volgende paragraaf.

3.1.3 Bombelli



Figuur 5: Rafael Bombelli
[6]

Rafeal Bombelli is de auteur van drie boeken genaamd *l'Algebra* die veel invloed hebben gehad. De eerste versie van de boeken is in 1572 gedrukt. Bombelli vond het werk van Cardano goed, maar hij van van mening dat Cardano niet helemaal duidelijk was geweest. Dit zorgde ervoor dat Bombelli besloot om te schrijven voor beginners. Aan de hand van zijn geschreven werken moesten beginners is staat zijn om het onderwerp onder de knie te krijgen zonder gebruik te hoeven maken van andere boeken.

In hoofdstuk 2 van zijn boek kijkt Bombelli naar de oplossingen van polynomen tot en met graad vier. Hij volgt de methodes van Cardano, maar hij bespreekt ook de "casus irreducibilis". Hiervoor kijkt ook hij naar de vergelijking

$$x^3 = 15x + 4. \quad (14)$$

Volgens de methode van Cardano heeft deze vergelijking als oplossing

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \quad (15)$$

In eerste instantie vindt Bombelli deze nulpunten onbetrouwbaar, maar hij merkt op, net als Cardano, dat vergelijking (14) wel oplosbaar is, want $x = 4$ is een nulpunt van deze vergelijking. Vervolgens probeert hij de eerste wortel in (15) gelijk te stellen aan $p + \sqrt{-q}$:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = p + \sqrt{-q}. \quad (16)$$

Hieruit volgt

$$2 + \sqrt{-121} = (p^3 - 3pq) + (3p^2 - q) \sqrt{-q}.$$

Hieruit volgt

$$2 = p^3 - 3pq \quad (17)$$

en

$$\sqrt{-121} = (3p^2 - q) \sqrt{-q}.$$

Nu kunnen we ook de tweede wortel in vergelijking (15) omschrijven. Dit geeft ons

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = p - \sqrt{-q}. \quad (18)$$

Wanneer we (16) en (18) met elkaar vermenigvuldigen, zag Bombelli het volgende gebeuren

$$\sqrt[3]{125} = p^2 + q$$

oftewel

$$q = 5 - p^2. \quad (19)$$

Deze laatste vergelijking kunnen we substitueren in (17) en dan vinden we een derdegraads vergelijking voor p :

$$4p^3 - 15p = 2.$$

Een oplossing van deze vergelijking is $p = 2$. Wanneer we dit invullen in (19) vinden we $q = 5 - 4 = 1$. We kunnen nu concluderen dat

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{en} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

En dus geldt

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= ((2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1})) = 4. \end{aligned}$$

Bombelli was erg blij met zijn gevonden resultaat. Hij introduceerde een notatie voor $+i$, namelijk *più di meno* en een notatie voor $-i$, namelijk *meno di meno*. Vervolgens presenteerde hij rekenregels zoals

$$\textit{meno di meno uia men di meno fà meno}$$

waarmee hij, in de hedendaagse notatie, bedoelt

$$(-i) \times (-i) = -1.$$

Ook geeft hij in zijn boek nog enkele voorbeelden van berekeningen met complexe getallen [19].

4 Vierdegraads vergelijkingen



Figuur 6: Lodovico Ferrari
[7]

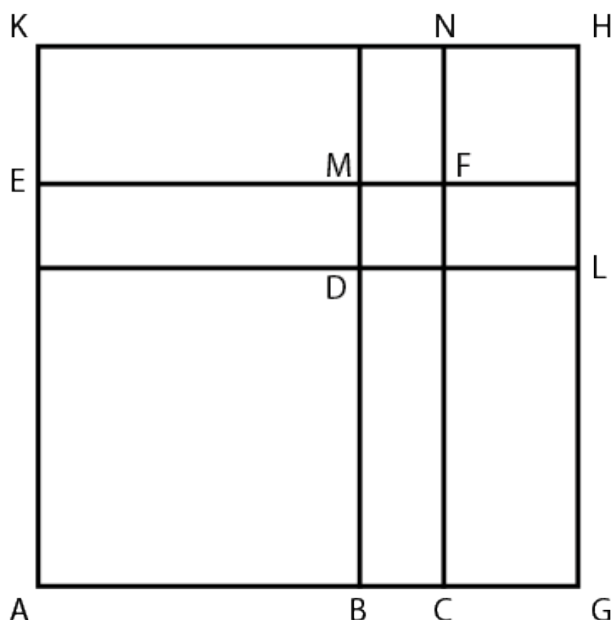
In 1536 kwam Lodovico Ferrari als een knecht in het huishouden van Cardano terecht. Hij was toen 14 jaar oud. Ferrari leerde wiskunde en in de loop van de tijd groeide hij uit tot een goede wiskundige en vriend en secretaris van Cardano. Ferrari ontdekte dat de algemene vergelijking van een vierdegraads polynoom

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

kan worden omgeschreven naar een derdegraads vergelijking en op deze manier kunnen vierdegraads vergelijkingen worden opgelost met behulp van het oplossen van tweedegraads en derdegraads vergelijkingen.

In het boek *Ars Magna* beschrijft Cardano in hoofdstuk 39 de methode van Ferrari. Hierbij geeft Cardano aan dat hij het via Ferrari heeft gekregen.

In zijn boek begint Cardano het uitleggen van de methode met een theorie over vierkanten en rechthoeken. Hij gebruikt hierbij de volgende afbeelding en uitleg.



Het vierkant AF kunnen we verdelen in de twee vierkanten AD en DF , we hebben daarnaast dan de twee rechthoeken DC en DE en we kunnen het grotere vierkant AH afmaken

door de vorm KFG toe te voegen. CF is gelijk aan CA volgens de eigenschappen van een vierkant. Ook geldt er, volgens de elementen, dat KF gelijk is aan FG . De oppervlakte van KF en FG is dan $GCx2CA$. Ook geldt er, volgens de elementen, dat de oppervlakte van FH gelijk is aan GC^2 . Het is dus duidelijk dat de oppervlakte van het figuur KFG gelijk is aan GC^2 plus 2 keer de lijn $GCxCA$. Stel nu dat AD gelijk is aan 4, CD en DE zijn beide gelijk aan $3x^2$ en DF is gelijk aan 9. Dan moet gelden dat BA gelijk is aan x^2 en BC gelijk is aan 3. Nu willen we graag meer vierkanten toevoegen aan DC en DE , dit zouden CL en KM zijn. Om nu het hele vierkanten compleet te kunnen maken, hebben we de vorm LMN nodig. De oppervlakte van CL is $GCxAB$. Ook weten we dat AB gelijk is aan x^2 , omdat we hebben aangenomen dat AD gelijk is aan x^4 . Daarom bestaan FL en MN uit $GCxCB$. We kunnen nu dus zeggen dat LMN bestaat uit het vierkant GC plus $2GCxBC$.

Wanneer we gaan kijken naar de uitleg van Cardano in de moderne algebraïsche notatie zien we het volgende.

Laat $AB = s$, $BC = a$ en $CG = b$. De theorie die Cardano heeft bewezen is gelijk aan de vergelijking

$$(s + a + b)^2 = (s + a)^2 + 2sb + 2ab + b^2.$$

Cardano neemt nu voor $s = AB$ het kwadraat van de onbekende x . Hierdoor krijgt hij

$$(x^2 + a + b)^2 = (x^2 + a)^2 + 2x^2b + 2ab + b^2. \quad (20)$$

Een derdegraads vergelijking kan altijd zo worden omgeschreven dat de term x^3 wegvalt. Dan blijven alleen de termen x^4 , x^2 , x en een constante over. Als voorbeeld kijkt Cardano naar de vergelijking

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$

Aan de linkerkant wil hij een kwadraat creeëren en hiervoor telt hij aan beide kanten de term $6x^2$ op. Hij krijgt

$$(x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x.$$

Vervolgens geeft hij aan dat als $6x^2 + 60x$ een wortel had gehad, we de oplossing hadden gevonden. Aangezien dit niet het geval is, moeten we nog meer termen toevoegen.

Dit betekent dat als $6x^2 + 60x$ een kwadraat zou zijn van $px + q$ we aan beide kanten de wortel konden nemen. Aangezien het niet het geval is, moeten we de term $2bx^2$ en een constante toevoegen aan beide kanten van de vergelijking.

Wanneer we $a = 6$ invullen in (20) krijgen we

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (x^2 + 6)^2 + 2x^2b + 12b + b^2.$$

Als we hier de term $2bx^2 + 12b + b^2$ aan toevoegen krijgen we

$$\begin{aligned} (x^2 + 6 + b)^2 &= (6x^2 + 60x) + (2bx^2 + 12b + b^2) \\ &= (2b + 6)x^2 + 60x + (b^2 + 12b). \end{aligned}$$

We hebben nu b zo gekozen dat de rechterkant van de vergelijking een kwadraat wordt van $px + q$. Er moet nu gelden dat

$$\begin{aligned}(2b + 6)(b^2 + 12b) &= 30^2 \\ 2b^3 + 30b^2 + 72b &= 900 \\ b^3 + 15b^2 + 36b &= 450.\end{aligned}$$

Dit is een derdegraads vergelijking voor b en deze kunnen we oplossen met de methode van Cardano die we in het vorige hoofdstuk hebben besproken [19].

4.1 Methode van Ferrari

Een duidelijke manier om de methode van Ferrari uit te leggen is als volgt.

We kijken weer naar de algemene vorm van een vierdegraads vergelijking

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0. \quad (21)$$

Deze algemene vorm kunnen we omschrijven naar

$$x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e.$$

De linkerkant bevat twee van de termen van het kwadraat van $x^2 + \frac{1}{2}bx$. Dus om het kwadraat compleet te maken, hebben we de volgende vergelijking nodig

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}bx\right)^2 = \left(\frac{1}{4}b^2 - c\right)x^2 - dx - e.$$

Wanneer we aan beide kanten de term $(x^2 + \frac{1}{2}bx)y + \frac{1}{4}y^2$ toevoegen, krijgen we

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y\right)^2 = \left(\frac{1}{4}b^2 - c + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}by - d\right)x + \frac{1}{4}y^2 - e. \quad (22)$$

De rechterkant is te schrijven als het kwadraat van een lineaire functie van x dan en slechts dan als de discriminant gelijk is aan nul.

$$\left(\frac{1}{2}by - d\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}b^2 - c + y\right)\left(\frac{1}{4}y^2 - e\right) = 0.$$

Dit kunnen we vervolgens omschrijven naar

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y - b^2e + 4ce - d^2 = 0. \quad (23)$$

Nu kiezen we y als een nulpunt van bovenstaande vergelijking. De rechterkant van (22) kunnen we schrijven als een lineaire functie $mx + n$. We zien dan dat

$$x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y = mx + n \quad \text{of} \quad x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y = -mx - n. \quad (24)$$

De nulpunten van deze vergelijking zijn de vier nulpunten van (22). En dus zijn dit ook de nulpunten van de algemene vorm van een vierdegraads vergelijking (21) [14]. Hieruit kunnen we ook halen dat voor een vierdegraads vergelijking er 4 nulpunten te vinden zijn, waarvan er één twee of vier reële nulpunten zijn [18].

4.1.1 Voorbeeld methode van Ferrari

We kijken naar de vergelijking

$$x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0. \quad (25)$$

In bovenstaande vergelijking geldt dat $b = 0$, $c = -3$, $d = 6$ en $e = -2$. Wanneer we dit invullen in (23) ontstaat de volgende vergelijking

$$y^3 + 3y^2 + 8y - 12 = 0.$$

Deze vergelijking heeft als oplossing $y = 1$. Wanneer we $y = 1$ invullen in (22) krijgen we

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 &= 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} \\ &= \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Wanneer we dit oplossen, zien we dat

$$x^2 + \frac{1}{2} = \pm \left(2x - \frac{3}{2}\right).$$

Hieruit volgen de twee vergelijkingen

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \text{of} \quad x^2 + 2x - 1 = 0.$$

De oplossingen van deze twee vergelijkingen, $x = 1 \pm i$ en $x = -1 \pm \sqrt{2}$, zijn de oplossingen van (25) [14].

4.1.2 Discriminant vierdegraads vergelijking

Stelling 3. *De discriminant van een vierdegraads vergelijking*

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (26)$$

is gelijk aan de discriminant van derdegraads vergelijking die hieruit gehaald kan worden. Dat betekent dat de discriminant gelijk is aan de discriminant

$$-4p^3 - 27q^2$$

van de derdegraads vergelijking

$$Y^3 + pY = Q = 0.$$

Hierin geldt

$$p = bd - 4e - \frac{1}{3}c^2 \quad \text{en} \quad q = -b^2e + \frac{1}{3}bcd + \frac{8}{3}ce - d^2 - \frac{2}{27}c^3.$$

Bewijs. De discriminant Δ van de vierdegraads vergelijking (26) is gelijk aan het product van de kwadraten van het verschil van zijn nulpunten[13]. Dus

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2$$

waarin x_1, x_2, x_3 en x_4 nulpunten zijn van de vergelijking (26).

Het nulpunt y dat we eerder hebben benoemd als nulpunt voor de vergelijking (23) noemen we y_1 . Ook nemen we x_1 en x_2 als nulpunten voor de eerste kwadratische vergelijking van (24) en x_3 en x_4 als nulpunten voor de tweede kwadratische vergelijking. Er gelden nu de volgende vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{1}{2} y_1 - n \\ x_3 x_4 &= \frac{1}{2} y_1 + n \\ x_1 x_2 + x_3 x_4 &= y_1 \end{aligned}$$

Wanneer we in plaats van y_1 een ander nulpunt voor (23) hadden gekozen, waren de nulpunten x_1, x_2, x_3 en x_4 in een andere volgorde verschenen. Hieruit kunnen we concluderen dat

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 x_2 + x_3 x_4 \\ y_2 &= x_1 x_3 + x_2 x_4 \\ y_3 &= x_1 x_4 + x_2 x_3 \end{aligned} \tag{27}$$

waarbij y_2 en y_3 andere oplossingen zijn voor (23).

Met behulp van de vergelijkingen (27) kunnen we de volgende vergelijkingen opstellen

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) \\ y_1 - y_3 &= (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) \\ y_2 - y_3 &= (x_1 - x_2)(x_3 - x_4). \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$(y_1 - y_2)^2 (y_1 - y_3)^2 (y_2 - y_3)^2 = \Delta.$$

De discriminant van een derdegraads vergelijking is

$$(y_1 - y_2)^2 (y_1 - y_3)^2 (y_2 - y_3)^2 = -4p^3 - 27q^2$$

dus we kunnen concluderen dat

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2$$

Waarbij $-4p^3 - 27q^2$ de discriminant is van de derdegraads vergelijking $Y^3 + pY + q = 0$ die we hebben verkregen door de substitutie $y = Y + \frac{c}{3}$ toe te passen op de vergelijking (23). Hieruit volgt

$$p = bd - 4e - \frac{1}{3}c^2 \quad \text{en} \quad q = -b^2e + \frac{1}{3}bcd + \frac{8}{3}ce - d^2 - \frac{2}{27}c^3.$$

En hiermee is het bewijs compleet [13]. □

4.2 Methode van Descartes

Naast Ferrari was er nog een andere wiskunde die een methode heeft gevonden om een vierdegraads vergelijking op te lossen. Dit was René Descartes (1596-1650)[16].

Ook Descartes begint bij de algemene vergelijking

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

In deze algemene vergelijking vervangt hij x door $z - \frac{b}{4}$. Hierdoor krijgt hij de vergelijking

$$z^4 + qz^2 + rz + s = 0 \quad (28)$$

waarin de term z^3 ontbreekt. We gaan vervolgens bewijzen dat we de linkerkant van deze vergelijking kunnen schrijven als het product van twee kwadratische vergelijkingen. We kunnen schrijven dat

$$(z^2 + 2kz + l)(z^2 - 2kz + m) = z^4 + (l + m - 4k^2)z^2 + 2k(m - l)z + lm.$$

Door bovenstaande vergelijking te vergelijken met (28) zien we dat de volgende vergelijkingen moeten gelden:

$$\begin{aligned} l + m - 4k^2 &= q \\ 2k(l - m) &= r \\ lm &= s. \end{aligned}$$

Wanneer we aannemen dat $k \neq 0$ geven de eerste twee vergelijkingen

$$\begin{aligned} 2l &= q + 4k^2 - \frac{r}{2k} \\ 2m &= q + 4k^2 + \frac{r}{2k}. \end{aligned}$$

Wanneer we de twee bovenstaande vergelijkingen verwerken in $2l \cdot 2m = 4s$ zien we dat

$$64k^6 + 32qk^4 + 4(q^2 - 4s)k^2 - r^2 = 0. \quad (29)$$

Deze vergelijking kan worden opgelost als een derdegraads vergelijking voor k^2 . Elk nulpunt $k^2 \neq 0$ geeft een een combinatie van kwadratische factoren uit (28):

$$z^2 \pm 2kz + \frac{q}{2} + 2k^2 \mp \frac{r}{4k}.$$

De vier nulpunten van deze twee kwadratische vergelijkingen zijn de vier nulpunten van (28).

Deze methode van Descartes werkt goed, behalve als elk nulpunt van (29) gelijk is aan nul, dus $q = s = r = 0$. Dan hebben we te maken met de vergelijking $z^4 = 0$ [13].



Figuur 7: René Descartes [8]

4.2.1 Voorbeeld methode van Descartes

We kijken naar de vergelijking

$$z^4 - 3z^2 + 6z - 2 = 0.$$

Vergelijking (29) komt er dan als volgt uit te zien:

$$64k^6 - 3 \cdot 32k^4 + 4 \cdot 17k^2 - 36 = 0.$$

Wanneer we $k^2 = 1$ nemen, krijgen we de factoren $z^2 + 2z - 1$ en $z^2 - 2z + 2$. Wanneer we deze gelijkstellen aan nul en oplossen vinden we de gevraagde vier nulpunten: $-1 \pm \sqrt{2}$, $1 \pm \sqrt{-1}$ [13]. De laatste twee nulpunten schrijven we tegenwoordig als $1 \pm i$.

5 Vergelijkingen van hogere graad

Nu de methodes waren gevonden om een tweedegraads, derdegraads of vierdegraads vergelijking op te lossen, is er in de eeuwen daarna veel gezocht door wiskundige naar methodes voor het oplossen van vergelijkingen met hogere graad. Ze waren op zoek naar een manier om de vergelijkingen op te lossen in een eindig aantal stappen waarin alleen gebruik wordt gemaakt van de vier rekenkundige bewerkingen en het nemen van wortels.

Beetje bij beetje kwamen wiskundige erachter dat, om vergelijkingen met graad 5 of hoger op te lossen, je tijdens de berekeningen vergelijkingen met nog hogere graad dan het originele probleem moet oplossen.

Toen ze hierachter waren gekomen, was het niet meer de vraag of je vergelijkingen met polynomen van graad 5 of hoger kan oplossen, maar nu werd de hoofdvraag of het mogelijk is om deze vergelijkingen op te lossen aan de hand van een formule.

De italiaan P. Ruffini (1765-1822) was de eerste die bewees dat het onmogelijk is om vergelijkingen met polynomen hoger dan graad 4 op deze manier op te kunnen lossen. Zijn bewijs hiervoor was echter erg complex en niet zonder fouten.

Een tijdje later kwam de Noorse N. Abel (1802-1829) met een oplossing om een vijfdegraads vergelijking op te lossen. Hij wist op dat moment niet dat Ruffini had proberen te bewijzen dat dit niet mogelijk was. Abel werd gevraagd om zijn methode aan de hand van een voorbeeld uit te leggen. Deze vraag bleek erg gunstig te zijn. Abel slaagde er niet in om het voorbeeld goed uit te werken en vond zo een fout in zijn methode. Hierdoor is het hem gelukt om te bewijzen dat het inderdaad niet mogelijk is om een vijfdegraads vergelijking op te lossen door middel van een algeme methode of formule.



Figuur 8: Niels Henrik Abel [9]

De vergelijkingen waar de wiskundigen naar hadden gekeken, waren de algemene vergelijkingen. Dat deze algemene vergelijkingen niet konden worden opgelost aan de hand van een algemene methode of formule, betekent nog niet dat geen enkele vergelijking met graad 5 of hoger niet op deze manier kan worden opgelost. De vraag was nu onder welke condities een gegeven vergelijking wel op deze manier kon worden opgelost. Het antwoord op deze vraag is gegeven door E. Galois (1811-1832). Hierbij heeft hij methodes ontwikkeld die erg verschillen van de methodes die in de afgelopen vier millenia waren gebruikt [18].

5.1 Het bewijs van Abel

In 1824 bewees Abel dat het onmogelijk is om een vergelijking met graad 5 of hoger op te lossen met behulp van een methode of formule. In dat jaar publiceerde hij zijn eerste bewijs. Hij deed dit met een pamflet genaamd *Mémoire sur les équations algébriques*. Enkele jaren later, in 1826 kwam Abel met een nieuw bewijs in *Démonstration de l'impossible de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré* (Oeuvres I, p 66-78). Het grootste gedeelte van het bewijs was gelijk, maar hij had enkele delen uitgebreid en enkele delen versimpeld [19].

Bewijs. Abel begint met de vergelijking

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0. \quad (30)$$

We nemen aan dat y geschreven kan worden als

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \quad (31)$$

waarin m een priemgetal is. De factoren $R, p, p_1, \dots, p_{m-1}$ zijn allemaal algebraïsche functies waarvan de graad lager is dan de graad van y in (31). Dat we dit daadwerkelijk mogen aannemen heeft Abel bewezen in een artikel in 1826.

Abel geeft aan dat we kunnen aannemen dat $R^{\frac{1}{m}}$ niet geschreven kan worden als een rationale functie van de coëfficiënten van (30) samen met $p, p_1, \dots, p_{m-1}, R$ en dat in vergelijking (31) niet alle coëfficiënten $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ gelijk zijn aan nul.

Abel had in zijn eerste bewijs aangenomen dat $p_1 \neq 0$, maar in zijn tweede bewijs heeft hij laten zien dat deze aanname niet essentieel is. Wel kunnen we aannemen dat $p_1 = 1$. Wanneer dit nog niet het geval is, kunnen we dit realiseren door R te vervangen door $\frac{R}{p_1^m}$.

Wanneer we vervolgens $R^{\frac{1}{m}} = z$ nemen, krijgen we

$$y = p + z + p_2 z^2 + \cdots + p_{m-1} z^{m-1}. \quad (32)$$

Wanneer we deze vergelijking substitueren in (30) krijgen we

$$q + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_{m-1} z^{m-1} = 0 \quad (33)$$

waarin $q, q_1, q_2, \dots$ polynomen zijn van $a, b, \dots, p_1, p_2, \dots$ en R .

Nu komt de belangrijkste stap in het bewijs van Abel. Abel beweert dat, om vergelijking (33) te laten kloppen, het noodzakelijk is dat

$$q, q_1, q_2, \dots, q_{m-1} = 0$$

Hij bewijst dit als volgt:

Vergelijking (33) en

$$z^m - R = 0 \tag{34}$$

hebben een aantal nulpunten met elkaar gemeen als we ervan uitgaan dat $q, q_1, q_2, \dots, q_{m-1}$ niet allemaal gelijk zijn aan nul. Dit is het makkelijkst te zien door even terug te gaan naar de substitutie die we hebben uitgevoerd om vergelijking (32) te verkrijgen. Dat was de substitutie $z = R^{\frac{1}{m}}$. Vergelijking (34) kunnen we ook omschrijven naar $z = R^{\frac{1}{m}}$. We nemen nu aan dat (33) en (34) k gemeenschappelijke oplossingen hebben. We kunnen nu het polynoom

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_k z^k \tag{35}$$

vinden die deze k waarden als nulpunten heeft en waarin c_i rationale functies van $R, q, q_1, \dots, q_{m-1}$ zijn.

Vergelijking (35) deelt zijn k nulpunten met (34). Hieruit kunnen we concluderen dat de nulpunten van vergelijking (34) van de vorm ξz zijn, waarbij ξ een nulpunt is van de vergelijking $x^m - 1 = 0$.

Wanneer we vervolgens de oplossingen $\xi_i^j z$ substitueren in vergelijking (33) vinden we de volgende k vergelijkingen

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 z + \dots + c_k z^k &= 0 \\ c_0 + \xi_1 c_1 z + \dots + \xi_1^k c_k z^k &= 0 \\ &\vdots \\ c_0 + \xi_{k-1} c_1 z + \dots + \xi_{k-1}^k c_k z^k &= 0. \end{aligned}$$

Wanneer we elke macht van z als een aparte onbekende beschouwen dan hebben we hier te maken met k vergelijkingen om k onbekenden op te lossen. Hieruit volgt dat we z kunnen schrijven als een rationale functie van $c_0, c_1, \dots, c_k$. Omdat c_i zelf een rationale functie is van de coëfficiënten van (30) samen met $p, p_1, \dots, p_{m-1}$ en R kunnen we concluderen dat $R^{\frac{1}{m}}$ geschreven kan worden als een rationale functie van de coëfficiënten van (30) samen met $p, p_1, \dots, p_{m-1}, R$. We hebben echter aangenomen dat dat niet mogelijk is en dit geeft ons een tegenspraak. Onze aanname klopt dus niet en we kunnen concluderen dat $q, q_1, q_2, \dots, q_{m-1} = 0$.

Eerder in het bewijs hadden we al vergelijking (32) gesubstitueerd in (30) en vergelijking (34) gebruikt. Nu geldt (34) niet alleen voor z , maar ook voor $\xi z, \xi^2 z, \dots, \xi^{m-1} z$. Dit

betekent dat wanneer we in vergelijking (31) de term $R^{\frac{1}{m}}$ vervangen door $\xi^k R^{\frac{1}{m}}, \dots$, we altijd nulpunten van vergelijking (30) ontdekken. Dit zijn allemaal verschillende nulpunten, dus m kan niet groter zijn dan 5. Wanneer we de gevonden nulpunten $y_1, \dots, y_m$ noemen, vinden we dat

$$\begin{aligned} y_1 &= p + z + p_2 z^2 + \dots + p_{m-1} z^{m-1} \\ y_2 &= p + \xi z + \xi^2 p_2 z^2 + \dots + \xi^{m-1} p_{m-1} z^{m-1} \\ &\vdots \\ y_m &= p + \xi^{m-1} z + \xi^{m-2} p_2 z^2 + \dots + \xi p_{m-1} z^{m-1}. \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen kunnen worden opgelost voor $p, z, p_2 z^2, \dots, p_{m-1} z^{m-1}$. Hieruit volgt dat $p, p_1, \dots, p_{m-1}$ en $z = R^{\frac{1}{m}}$ rationale functies zijn van de nulpunten $y_1, \dots, y_5$ van vergelijking (30). Ook de functie $R = z^m$ is een rationale functie van deze nulpunten.

De term R kan geschreven worden als een rationale functie van $v^{\frac{1}{n}}$:

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 + v^{\frac{2}{n}} + \dots + S_{n-1} + v^{\frac{n-1}{n}}. \quad (36)$$

Wanneer we deze vergelijking op dezelfde manier behandelen als dat we bij y hebben gedaan van vergelijking (31) zien we dat de toevoeging van $v^{\frac{1}{n}}$ onnodig is of dat de termen $v^{\frac{1}{n}}, S, S_2, \dots$ uitgedrukt kunnen worden als rationale functies van de nulpunten $y_1, \dots, y_5$. Wanneer we dit argument herhaaldelijk toepassen, kunnen we concluderen dat alle niet-rationale termen die voorkomen in de vergelijking van de nulpunten y rationale functies van deze nulpunten zijn.

Vanuit deze hypothese was Ruffini begonnen met zijn bewijs. Vanaf dit punt was Abel in staat om de methodes en resultaten van Lagrange, Ruffini en Cauchy te gebruiken. Aan het begin van het bewijs heeft Abel aangenomen dat m een priemgetal is en we hebben al gezien dat m niet groter kan zijn dan 5. Cauchy heeft laten zien dat m niet gelijk kon zijn aan 3 of 4. Hieruit concludeerde Abel dat m gelijk moest zijn aan 2 of 5. Beide mogelijkheden onderzocht hij en hij concludeerde dat in beide gevallen de vergelijking niet algebraïsch op te lossen was [19][11]. $\square$

Twee maanden voordat Abel overleed in 1829 publiceerde hij *Mémoire sur une classe particulière d'équations résoluble algébriquement*. Hierin schreef Abel over een bepaalde klasse van vergelijkingen van verschillende graden die algebraïsch oplosbaar zijn. Tot deze klasse behoort bijvoorbeeld de vergelijking $x^n - 1 = 0$ [19].

6 Conclusie

In deze scriptie hebben we gekeken naar vergelijkingen met polynomen. We zijn begonnen met tweedegraads vergelijkingen en hebben dit uitgebreid naar vierdegraads vergelijkingen. Op verschillende punten hebben we, naast enkele bewijzen, gekeken naar de geschiedenis die achter de bewijzen te vinden is.

Vroeger waren de wiskundigen vooral bezig met het oplossen van praktische problemen. Het ging over de oppervlakte van figuren, het construeren van een hoek met behulp van een passer en een latje en over de breedte en lengte van bijvoorbeeld een deur als je de diagonaal weet. Aan de hand van dit soort problemen zijn er algemene formules gevonden om vergelijkingen met polynomen op te kunnen lossen. Bij de tweedegraadsvergelijkingen kan dit met behulp van een simpele formule, bij een derdegraads vergelijking is de formule, door het gebruik van substituties en omschrijvingen, al een stuk ingewikkelder en bij een vierdegraads vergelijking wil je eigenlijk al niet meer aan een algemene formule denken. Voor de geïnteresseerden is er via wikipedia wel een algemene formule te vinden voor een vierdegraads vergelijking.

In het laatste hoofdstuk hebben we gekeken naar het bewijs dat Abel heeft gegeven voor de stelling dat er voor polynomen van graad 5 of hoger geen radicale oplossing gegeven kan worden. Ondanks dat het bewijs niet helemaal compleet is, is de manier waarop Abel het heeft uitgelegd duidelijk. Tegenwoordig zouden we dit ook kunnen bewijzen met behulp van groepentheorie.

Referenties

- [1] <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e0/%E4%B9%9D%E7%AB%A0%E7%AE%97%E8%A1%93%E7%B4%B0%E8%8D%89%E5%9C%96%E8%AA%AA.jpg/240px-%E4%B9%9D%E7%AB%A0%E7%AE%97%E8%A1%93%E7%B4%B0%E8%8D%89%E5%9C%96%E8%AA%AA.jpg>. [Afbeelding].
- [2] <https://www.famousscientists.org/scientist-photos/al-khwarizmi.jpg>. [Afbeelding].
- [3] <http://matematica.unibocconi.it/sites/default/files/ritratti/delferro.jpg?1256654515>. [Afbeelding].
- [4] http://mathematica.sns.it/media/img_autore/Niccolo_Tartaglia.jpg. [Afbeelding].
- [5] http://beyondthirtynine.com/wp-content/uploads/2013/03/ACardano_Sagesse.jpg. [Afbeelding].
- [6] http://24.media.tumblr.com/tumblr_lqypfyW7bB1r2bm9to1_r1_250.jpg. [Afbeelding].
- [7] <http://www.compendium.ro/imgpers/1895.jpg>. [Afbeelding].
- [8] <http://www.siradisibilgiler.com.tr/images/upload/D%C3%BCnyay%C4%B1%20De%C4%9Fi%C5%9Ftiren%2010%20Filozof--8.png>. [Afbeelding].
- [9] <https://www.famousscientists.org/images1/300-niels-henrik-abel.jpg>. [Afbeelding].
- [10] William P. berlinghoff and Fernando Q. Gouva. *Wortels van de wiskunde*. Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2016.
- [11] Jim Brown. Abel and the insolubility of the quintic.
- [12] Girolamo Cardano. *The great art or the rules of algebra*. The M.I.T. Press, 1968.
- [13] Leonard Eugene Dickson. *New first course in the theory of equations*. John Wiley and Sons Inc. New York, 2009.
- [14] Leonard Eugene Dicksons. *New first course in the theory of equations*. John Wiley and Sons inc New York, 1939.
- [15] ir. H. Karsmakers. De formules van cardano bij derdegraadsvergelijkingen. <http://members.chello.nl/h.karsmakers/De%20formule%20van%20Cardano%20bij%20derdegraadsvergelijkingen.pdf>.
- [16] Victor J. Katz. *A History of Mathematics: An Introduction (2nd Edition)*. Addison Wesley, 1998.

- [17] Math4All. Wiskunde voor 3 havo deel 2. <http://www.h2o-boeken.nl/preview/bk-3h-dl2-studieboek-preview.pdf>, 2013.
- [18] Jacques Sesiano. *An Introduction to the History of Algebra, Solving Equations from Mesopotamian Times to the Renaissance*, volume 27 of *Mathematical world*. American Mathematical Society, 2009.
- [19] B.L. van der Waerden. *A History of Algebra from al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Springer-Verlag, 1985.