Toets – functies van meer variabelen – herkans (1)

Opgave 1

Gegeven $f(x,y) = (x-1)(x^2 + y^2 - 2x)$

a. Bereken de stationaire punten van f.
b. Bereken eventuele zadelpunten en extremen van f.

Opgave 2

Gegeven $f(x,y) = 2xy$

a. Teken in een xOy-assenstelsel de hoogtelijnen die horen bij f(x,y)=0, f(x,y)=2 en f(x,y)= −2
b. Zoek de extremen van f onder de nevenvoorwaarde $x^2+y^2=3$

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+2}$ op het domein $0 \le x \le 3$ en $1 \le y \le 4$

a. Teken in dit domein de niveaukromme bij $1\frac{1}{2}$, 1 en $\frac{1}{2}$
b. Bepaal de extremen van f op dit domein.

Opgave 4

Gegeven $f(x) = \dfrac{xy^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

a. Bereken de limieten van $(x,y) \to (0,0)$ voor het naderen via de x-as en het naderen via de y-as.
b. Bereken de limiet als je nadert via lijnen met vergelijking y=mx.
   Welke conclusie kan je trekken op grond van je antwoord?

Opgave 5

Gegeven $f(x,y) = x^2 \cdot \ln(y) + 2y \cdot \sin^2(x)$

Geef de vergelijking van het raakvlak van f in het punt $(\pi,1)$

Normering

	Opgave 1	Opgave 2	Opgave 3	Opgave 4	Opgave 5
+5	a. 6 b. 6	a. 4 b. 6	a. 4 b. 6	a. 4 b. 4	5

Totaal 50 punten
Cijfer = punten : 5

Toets – functies van meer variabelen herkans (1) – uitwerkingen

Opgave 1

a.

$f(x,y) = (x-1)(x^2 + y^2 - 2x)$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 - 6x + y^2 + 2 \\ f_y(x,y) = 2y(x-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + y^2 + 2 = 0 \\ 2y(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + y^2 + 2 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

Stationaire punten:

$(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}, 0), (1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}, 0), (1, -1)$ en $(1, 1)$

b.

$f_{xx}(x,y) = 6x - 6$

$f_{yy}(x,y) = 2x - 2$

$f_{xy}(x,y) = 2y$

$H(x,y) = 4y^2 - (6x - 6)(2x - 2)$

$H(x,y) = 4y^2 - (6x - 6)(2x - 2)$

$H(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}, 0) = -4 \Rightarrow$ extreem

$f_{xx}(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}, 0) = -2\sqrt{3} \Rightarrow$ maximum

$H(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}, 0) = -4 \Rightarrow$ extreem

$f_{xx}(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}, 0) = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ minimum

$H(1, -1) = 4 \Rightarrow$ zadelpunt

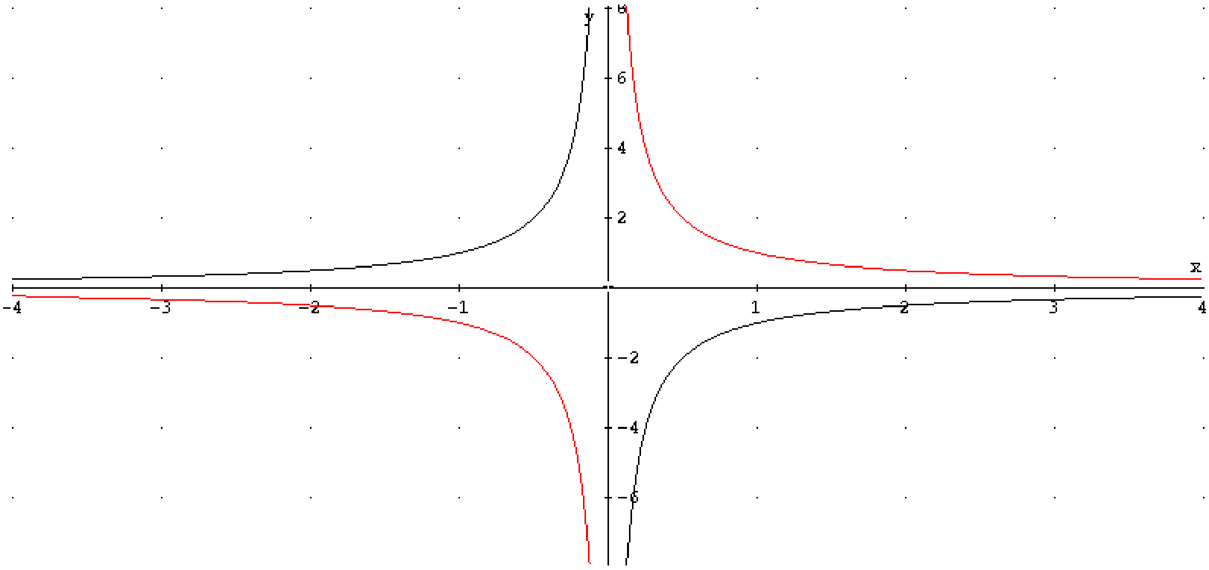
$H(1, 1) = 4 \Rightarrow$ zadelpunt

Maximum bij $(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}, 0) : \frac{2}{9}\sqrt{3}$

Minimum bij $(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}, 0) : -\frac{2}{9}\sqrt{3}$

Opgave 2

a.



(y = -1/x, y=1/x, x=0 en y=0)

b.

$$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ 2y=\lambda\cdot 2x \\ 2x=\lambda\cdot 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=3 \\ \lambda=\dfrac{y}{x} \\ \lambda=\dfrac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x^2=y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x=y \vee x=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2=3 \\ x=y \end{cases} \text{of} \begin{cases} 2x^2=3 \\ x=-y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\sqrt{6} \\ y=\dfrac{1}{2}\sqrt{6} \end{cases} \text{of} \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}\sqrt{6} \\ y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{6} \end{cases} \text{of} \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\sqrt{6} \\ y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{6} \end{cases} \text{of} \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}\sqrt{6} \\ y=\dfrac{1}{2}\sqrt{6} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\sqrt{6},\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)=3 \quad (\text{maximum})$$

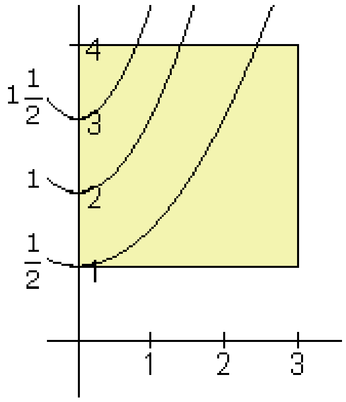
$$f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6},\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)=-3 \quad (\text{minimum})$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6},-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)=3 \quad (\text{maximum})$$

$$f\left(\frac{1}{2}\sqrt{6},-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)=-3 \quad (\text{minimum})$$

Opgave 3

a. Schrijf de uitdrukking als $y=Cx^2+2C$, waarbij C een constante is...



b. Minimum $f(3,1)={}^{1}/_{11}$.
Maximum $f(0,4)=2$

Opgave 4

a.

Via de $x-$as:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} = \frac{xy^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x\cdot 0^2-0^2}{x^2+0^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{0}{x^2} = 0$$

Via de $y-$as:

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} = \frac{xy^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{0\cdot y^2-y^2}{0^2+y^2} = \lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

b.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} = \frac{xy^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} = \frac{x(mx)^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{m^2x^3-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{m^2x-m^2}{1+m^2} = \frac{-m^2}{1+m^2}$$

De conclusie moet zijn dat de limiet voor $(x,y)\to(0,0)$ niet bestaat

Opgave 5

$$f(x,y) = x^2 \cdot \ln(y) + 2y \cdot \sin^2(x)$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x \cdot \ln(y) + 4y \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \\ f_y(x,y) = \dfrac{x^2}{y} + 2 \cdot \sin^2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\pi,1) = \pi^2 \cdot \ln(1) + 2 \cdot 1 \cdot \sin^2(\pi) = 0 + 0 = 0 \\ f_x(\pi,1) = 2\pi \cdot \ln(1) + 4 \cdot 1 \cdot \sin(\pi) \cdot \cos(\pi) = 0 + 0 = 0 \\ f_y(\pi,1) = \dfrac{\pi^2}{1} + 2 \cdot \sin^2(\pi) = \pi^2 \end{cases}$$

$$z(x,y) = \pi^2 \cdot (y-1)$$