# Hoofdstuk 5 - Recursie

Een banktegoed waarover je jaarlijks rente krijgt uitgekeerd is een voorbeeld van recursie. Je kunt steeds het nieuwe banktegoed berekenen op basis van het banktegoed van vorig jaar.

## Opdracht 1

Je zet 1000 euro op de bank en je krijgt elk jaar 3% rente.

a. Wat is je banktegoed na 10 jaar?
b. Neem $X_{n+1}$: het nieuwe banktegoed en $X_n$ het banktegoed van vorig jaar. Geef een indirecte formule voor $X_{n+1}$.
c. Geef ook een directe formule voor B(t): het banktegoed na t jaar.

## Opdracht 2

Je zet 1000 euro op je rekening. Je krijgt 3% rente per jaar en je stort jaarlijks 750 euro bij.

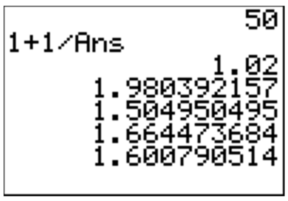
a. Wat is je banktegoed na 10 jaar?
b. Neem $X_{n+1}$: het nieuwe banktegoed en $X_n$ het banktegoed van vorig jaar. Geef een indirecte formule voor $X_{n+1}$.
c. Geef ook een directe formule voor B(t): het banktegoed na t jaar.[1]

## Opdracht 3

- "Ik ga een bedrag lenen van 3400 euro. Dit ga ik dan in maandelijkse termijnen van 50 euro terugbetalen uit mijn baantje. De jaarrente die ik moet betalen is 3%. Hoeveel maanden duurt dan mijn terugbetaling vanaf 1 juni 2010?"
  bron: wisfaq

## Opdracht 4

Toets op je GR in het rekenscherm het getal 50 in. Type vervolgens **1+1/Ans** en druk op **ENTER**. Ga hiermee door tot het getal op je scherm niet meer verandert.




a. Welke getal krijg je?
b. Laat zien dat dit getal inderdaad de oplossing is.

---

1 Oplossing van $X_{t+1} = a \cdot X_t + b$ (lineaire differentievergelijking) is:

$$X_t = \frac{b}{1-a} + \left(X_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^t$$

## Opdracht 5

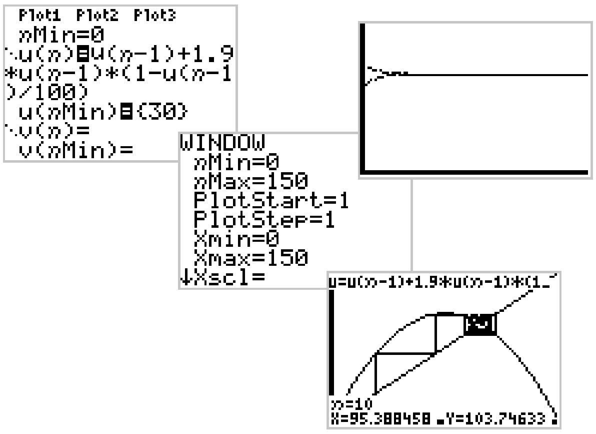
We kijken naar de volgende recursieve rij:

$$u_1 = 30$$

$$u_{n+1} = u_n + 1{,}9 \cdot u_n \left(1 - \frac{u_n}{100}\right)$$

$$x = x + 1{,}9 \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

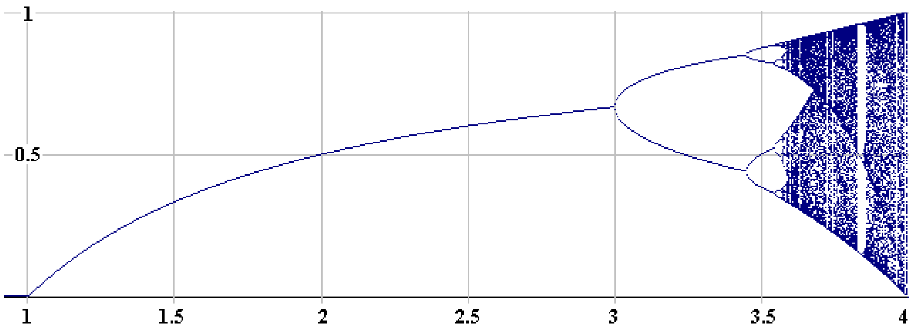
Zet de formule in je GR:




a. Laat zien dat U=100 een oplossing is van $x = x + 1{,}9 \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$.
b. Er is sprake van oscillerende convergentie. Hoe weet je dat?
c. Neem in plaats van 1,9 in de formule 2,9. Is er nu ook sprak van convergentie? Zo nee, toon dat aan!
d. Zet de GR weer op **Time** en plot de grafiek. Hoe kun je hier zien dat het proces niet convergeert?
e. Kies bij **Window** voor **nMax**=1500 en **Xmax**=1500 en plot de grafiek. Wat valt je op?
f. Neem in plaats van 2,9 in de formule 2,1 en plot de grafiek. Wat valt je op?
g. Neem in plaats van 2,1 in de formule 2,5 en plot de grafiek. Wat valt je op?
h. En als je 2,6 neemt?
i. Neem 2,59?
j. Of 2,57? Of 2,56?
k. Nou vooruit, nog eentje dan. Neem 3.
l. Kun je ook getallen nemen groter dan 3?

### Bifurcatiediagram

Als je in een grafiek op de horizontale as de parameter van opdracht 5 zou nemen en op de verticale as de 'oplossingen' dan krijg je een (vergelijkbaar) plaatje als hieronder:




- Excelpracticum Populatiegroei en Chaos

### De logistieke afbeelding

We definiëren de logistieke vergelijking als volgt:

$$f_A(x_n) = x_{n+1} = A \cdot x_n(1 - x_n) \text{ met } 0 \le x \le 1$$

Je kunt $x_n$ beschouwen als de **populatie** als fractie van de maximaal mogelijke populatie.
Neem aan dat p een vast punt is zodat $f_A(p) = p$.

### Opdracht 6

a. Leg uit dat geldt: $p = A \cdot p(1-p)$

b. Laat zien dat de vergelijking bij a. deze oplossingen heeft: $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = \dfrac{A-1}{A} \end{cases}$

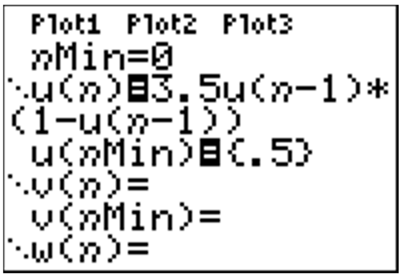
### Vaste punten en stabiliteit

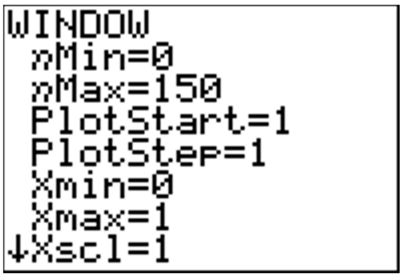
- Een vast punt p is **aantrekkend** als $\left|f_A'(p)\right| < 1$ en **afstotend** als $\left|f_A'(p)\right| > 1$.
- $f_A'(p_1) = A$
  $f_A'(p_2) = 2 - A$
- Als 0<A<1: $p_1$ is aantrekkend en $p_2$ is afstotend.
  Als 1<A<3: $p_1$ is afstotend en $p_2$ is aantrekkend.
  Als A>3: $p_1$ en $p_2$ zijn beide afstotend.

We zien dat voor A tussen 0 en 3 we steeds 1 aantrekkend punt hebben, dus de populatie zal, wat ook de beginwaarde is, steeds naar het aantrekkend vast punt groeien in aantal. Als A>3 dan gebeurt er iets fundamenteel anders.

## Opdracht 7

Voer in je GR de volgende formule en instellingen in:





a. Bereken $p_1$ en $p_2$.

b. Laat zien dat $f_A(p_1) = p_1$ en $f_A(p_2) = p_2$.

c. Zoek met **Trace** en **Calc/value** naar de waarde van $q_1$ en $q_2$.

d. Zijn $p_1$ en $p_1$ gelijk aan $q_1$ en $q_2$?

e. Laat zien dat $f_A(q_1) = q_2$ en $f_A(q_2) = q_1$.

f. Ga na dat $f_A(f_A(q_1)) = q_1$ en $f_A(f_A(q_2)) = q_2$.

g. Neem $g_A(x) = f_A(f_A(x))$ en leg uit dat voor een vast punt $x$ geldt: $g_A(x) = x$.

h. Laat zien dat: $g_A = A^2x(1-x)\left(Ax^2 - Ax + 1\right)$

i. We willen weten voor welke waarden van x geldt: $g_A(x) = x$. Leg dat uit.

j. Dit is een vierdegraads vergelijking met (in principe) vier verschillende oplossingen.
Je weet A=3,5. Los de vergelijking op. Komen je oplossingen overeen met de antwoorden van a. en c.?

## Meer algemeen

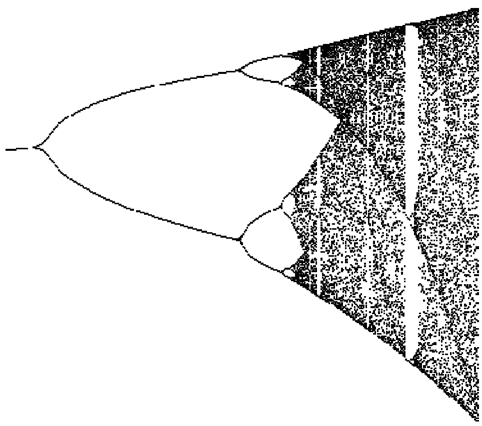
Voor $x_{n+1} = A \cdot x_n(1 - x_n)$ en $A > 3$ geldt:

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = \frac{A-1}{A}$$

$$q_1 = \frac{A+1-\sqrt{(A+1)(A-3)}}{2A}$$

$$q_2 = \frac{A+1+\sqrt{(A+1)(A-3)}}{2A}$$



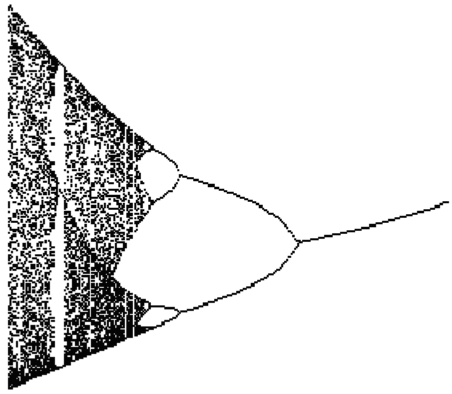
## Opdracht 8

We moeten nog laten dat $q_1$ en $q_2$ uit opdracht 7 aantrekkende punten zijn. Dit kan je doen door te kijken naar de afgeleide van $g_A$ en dan de gevonden waarden voor $q_1$ en $q_2$ in te vullen. De absolute waarde van de afgeleide zou kleiner dan 1 moeten zijn.

- Toon aan: $\left|g'_A(q_1)\right| < 1$ en $\left|g'_A(q_2)\right| < 1$

## Opdracht 9

Gegeven is de kwadratische afbeelding $Q_C = x^2 + C$.
Je ziet hiernaast het bijbehorende bifurcatiediagram.



De vaste punten zijn de punten x waarvoor geldt: $Q_C(x) = x$ dus:

$x^2 - x + C = 0$

a. Los de vergelijking op.
b. Bepaal C voor deze gevallen:
   i. **geen** vaste punten
   ii. precies één vast punt
   iii. twee vaste punten
c. Er zijn bij bepaalde waarden voor C twee vaste punten $p_1$ en $p_2$. Bereken de afgeleide $Q'_C$ voor $p_1$ en $p_2$
   Voor welke waarden voor C zijn $p_1$ en $p_2$ afstotend/aantrekkend?

## Opdracht 10

Gegeven is de afbeelding $Q_C = \frac{1}{x} + C$.

De vaste punten zijn de punten waarvoor geldt: $Q_C(x) = x$ dus: $\frac{1}{x} + C = x$

a. Los de vergelijking op.
b. Is er een waarde van C waarbij je te maken hebt met precies één vast punt? (leg uit)
c. Als je te maken hebt met twee vaste punten, laat dan zien dat $p_1$ en $p_2$ niet tegelijk aantrekkend kunnen zijn.

## Opdracht 11

We kijken naar $u(n) = u(n-1)(4 - u(n-1))$ en tekenen de webgrafiek. Gebruik **trace** om het proces te bekijken. Kies $0 \le x \le 5$ en $0 \le y \le 5$.

a. Neem als $u(nMin)$ de waarde 1, 2 en 3 en leg uit wat er gebeurt.
b. Neem als $u(nMin)$ nu 0,2. Convergeert het proces?
c. Zijn er vaste punten? Zo ja, zijn die aantrekkend of afstotend? Zo nee, leg uit waarom!

We kiezen nu $u(n) = a \cdot u(n-1)(4 - u(n-1))$ met a als parameter. Eén van de vaste punten is x=0.

d. Voor welke waarden van a is het andere punt aantrekkend?
e. Kunnen de twee vaste punten tegelijkertijd aantrekkend zijn? (leg uit!)