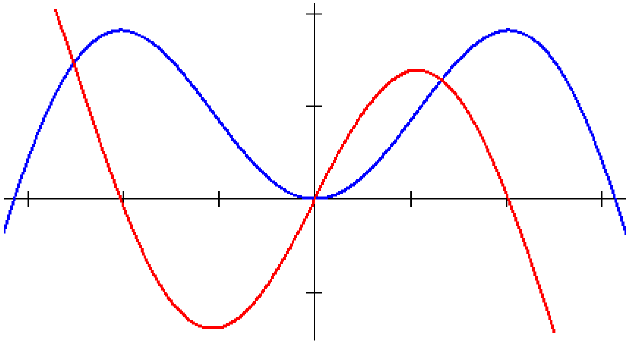
Hoofdstuk 7 – de afgeleide

eXperiment
taakgerichte
instructie

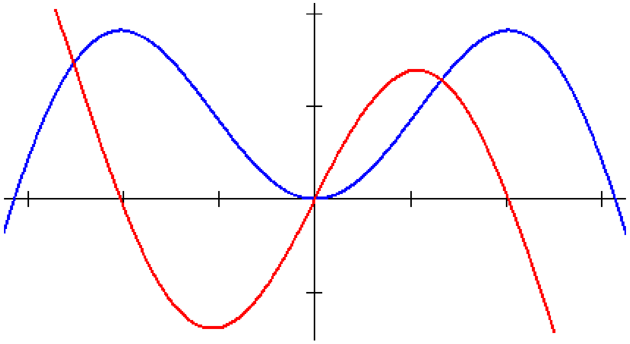
De afgeleide functie

- Raaklijnen en toppen
- Optimaliseren
- De productregel
- De afgeleide van machtsfuncties
- De kettingregel



Notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$				
$f'(x)$	y'	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{d}{dx}f(x)$

Vandaag...



- **Raaklijnen en toppen**
- **Optimaliseren**
- De productregel
- De afgeleide van machtsfuncties
- De kettingregel

Notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$				
$f'(x)$	y'	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{d}{dx}f(x)$

Raaklijnen en toppen

Formule van de raaklijn

Bij een gegeven functie f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in A gelijk aan $f'(x_A)$

Bepaal de afgeleide, vul de x-coördinaat van A in en je hebt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan f in het punt A gevonden.

Raaklijnen en toppen

Raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt

Als je van een raaklijn
de richtingscoëfficient weet (zeg 'a')
dan kan je de coördinaten van het
raakpunt A vinden met:

$$f'(x_A) = a$$

y_A kan je vinden met $f(x_A)$

Uiteraard kunnen er meer raakpunten
zijn.

Raaklijnen en toppen

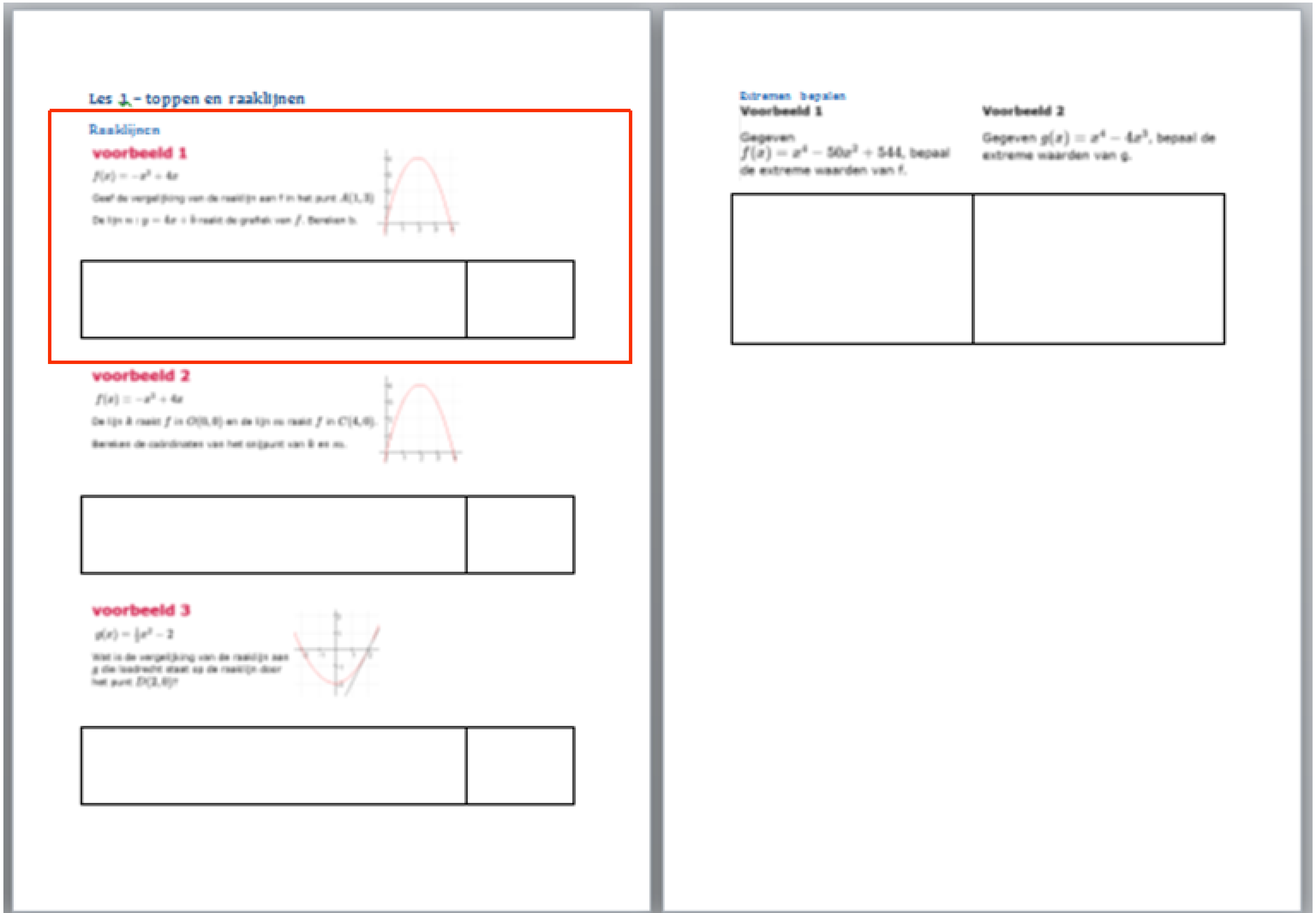
Extreme waarden

Bij extreme waarden loopt de **raaklijn horizontaal**. Dat betekent dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijk **nul** is.

Anders geformuleerd:

Als $f'(x) = 0$ heb je (mogelijkerwijs) te maken met een extreem.

Maken!



Les 1 - toppen en raaklijnen

Raaklijnen

voorbeeld 1

$f(x) = -x^2 + 4x$

voorbeeld 2

$f(x) = -x^2 + 4x$

voorbeeld 3

Extremen bepalen

Voorbeeld 1

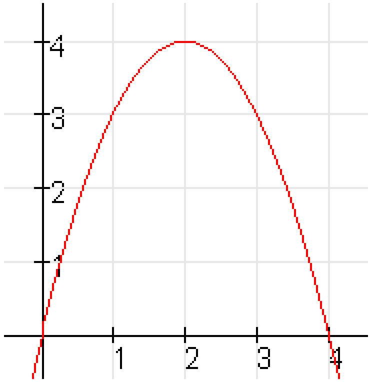
Gegeven $f(x) = x^4 - 50x^2 + 544$, bepaal de extreme waarden van f.

Voorbeeld 2

Gegeven $g(x) = x^4 - 4x^3$, bepaal de extreme waarden van g.

voorbeeld 1

$f(x) = -x^2 + 4x$



Geef de vergelijking van de raaklijn aan f in het punt $A(1,3)$

De lijn n : $y = 4x + b$ raakt de grafiek van f. Bereken b.

Bepaal de afgeleide:

$f'(x) = -2x + 4$

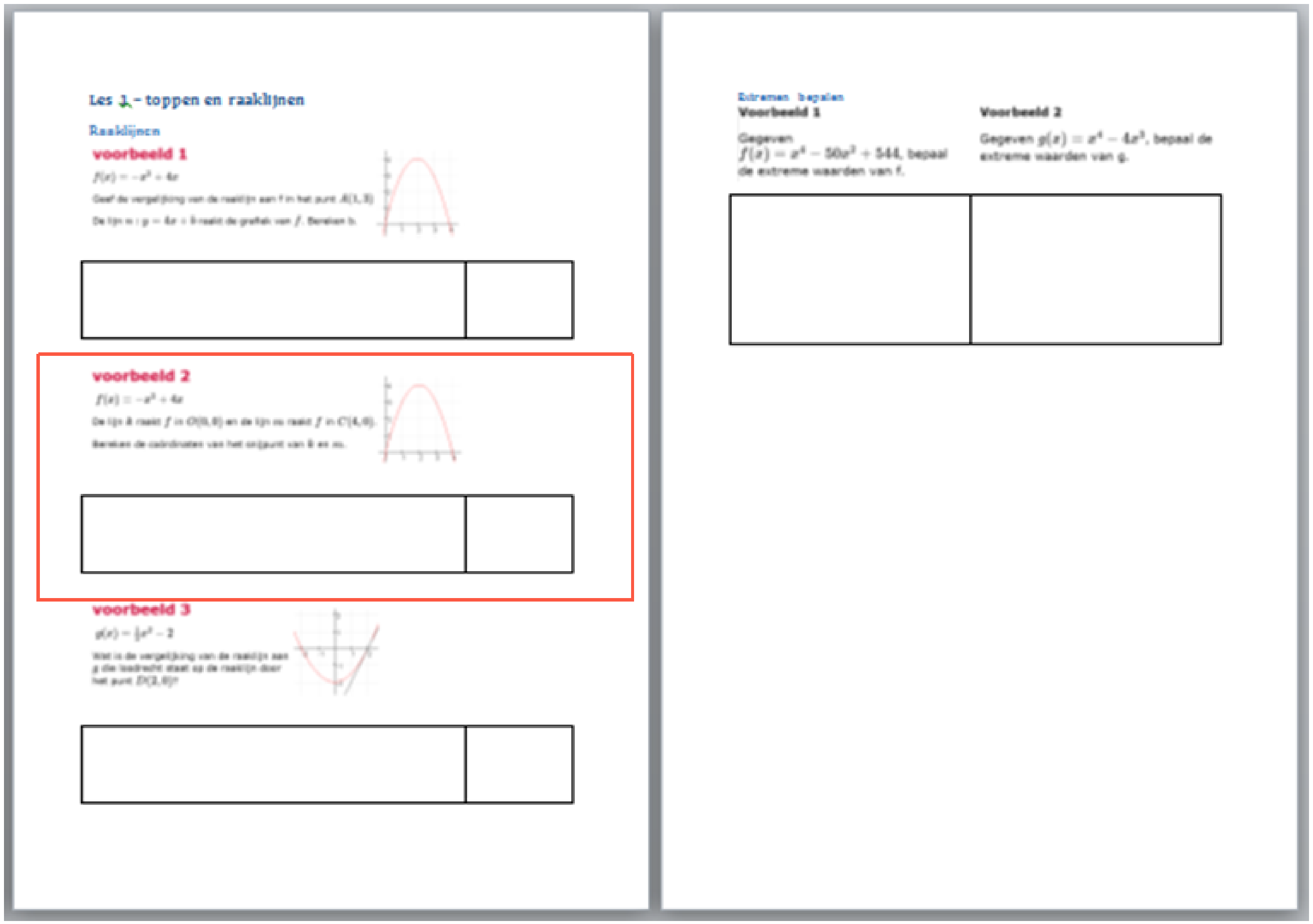
Bereken f'(1)=2. De raaklijk wordt y=2x+b. Vul A(1,3) in en je vindt b=1.

y=2x+1

$f'(x)$=4
-2x+4=4
-2x=0
x=0

De raaklijn is: **y=4x**

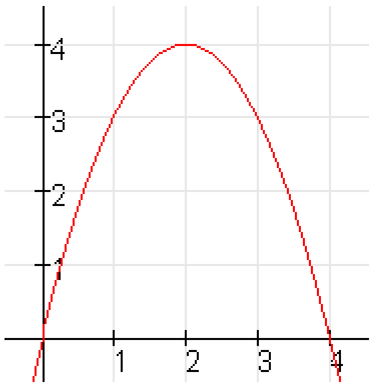
Maken!



Les 1 - toppen en raaklijnen
Raaklijnen
voorbeeld 1
$f(x) = -x^2 + 4x$
voorbeeld 2
$f(x) = -x^2 + 4x$
voorbeeld 3
Extremen bepalen
Voorbeeld 1
Gegeven $f(x) = x^4 - 50x^2 + 544$, bepaal de extreme waarden van f.
Voorbeeld 2
Gegeven $g(x) = x^4 - 4x^3$, bepaal de extreme waarden van g.

voorbeeld 2

$f(x) = -x^2 + 4x$



De lijn k raakt f in $O(0,0)$ en de lijn m raakt f in $C(4,0)$.

Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en m.

Bepaal de afgeleide:

$f'(x) = -2x + 4$

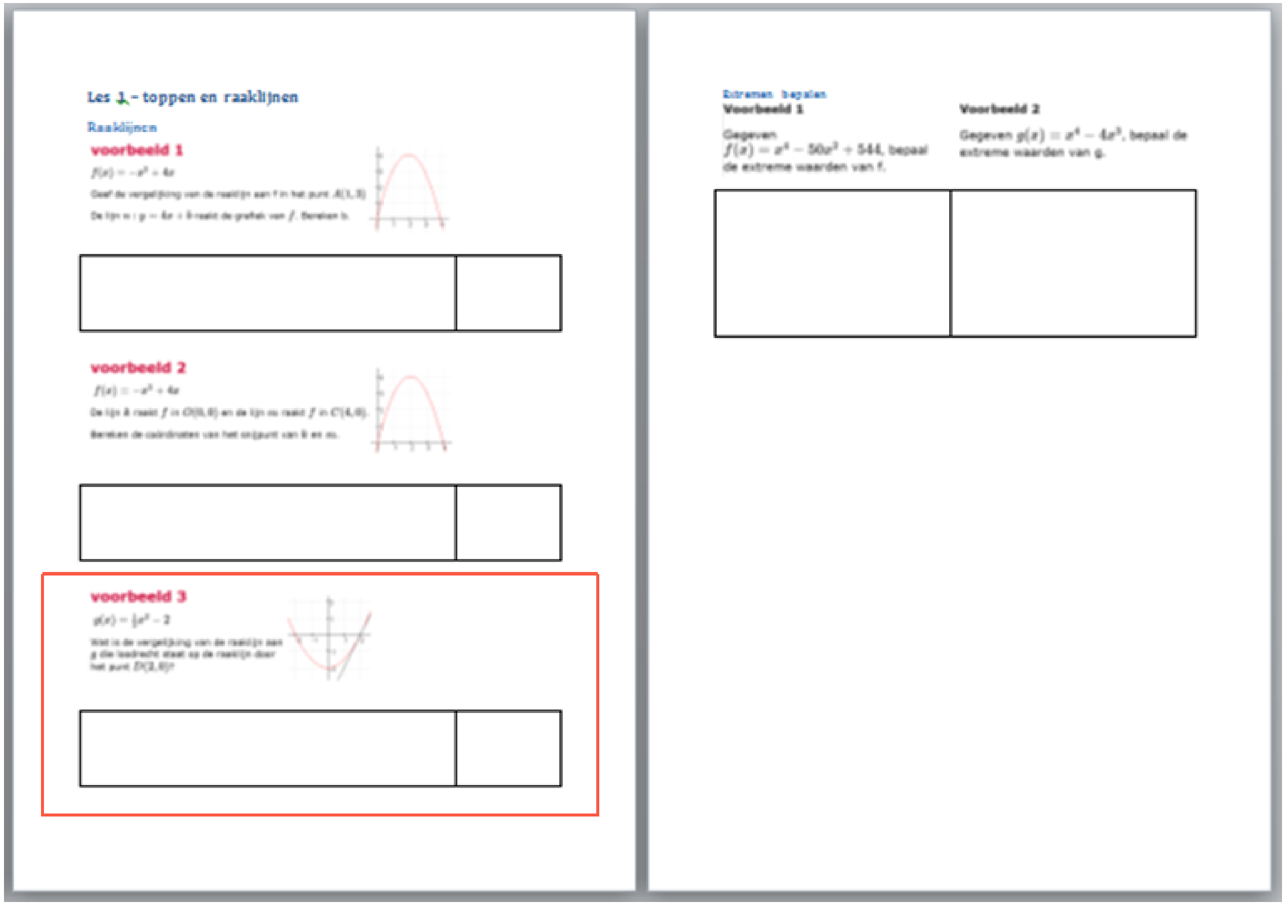
k:y=4x en m:y=-4x+16

Om het snijpunt van k en m uit te rekenen los je de vergelijking $4x = -4x + 16$ op:

x=2
y=8

Het snijpunt is (2,8)

Maken!



Les 1 - toppen en raaklijnen

Raaklijnen

voorbeeld 1

$f(x) = -x^2 + 4x$

Geef de vergelijking van de raaklijn aan f in het punt $A(1,3)$

De lijn $m : y = 4x + b$ raakt de grafiek van f. Bereken b.

voorbeeld 2

$f(x) = -x^2 + 4x$

De lijn k raakt f in $O(0,0)$ en de lijn m raakt f in $C(4,0)$.

Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en m.

voorbeeld 3

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

Wat is de vergelijking van de raaklijn aan g die loodrecht staat op de raaklijn door het punt $D(2,0)$?

Extremen bepalen

Voorbeeld 1

Gegeven $f(x) = x^4 - 50x^2 + 544$, bepaal de extreme waarden van f.

Voorbeeld 2

Gegeven $g(x) = x^4 - 4x^3$, bepaal de extreme waarden van g.

voorbeeld 3

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

Wat is de vergelijking van de raaklijn aan g die loodrecht staat op de raaklijn door het punt $D(2,0)$?

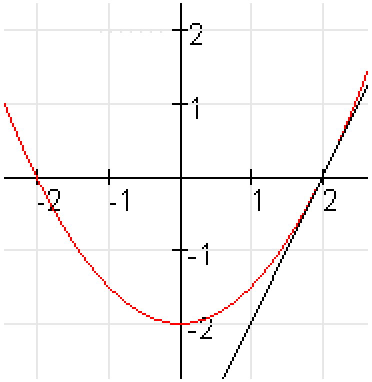
Bepaal de afgeleide:

g'(x) = x

g'(2)=2

De lijn loodrecht op de raaklijn in (2,0) heeft als richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$.

f'(x)=$-\frac{1}{2}$ geeft x=$-\frac{1}{2}$
y=$-1\frac{3}{8}$

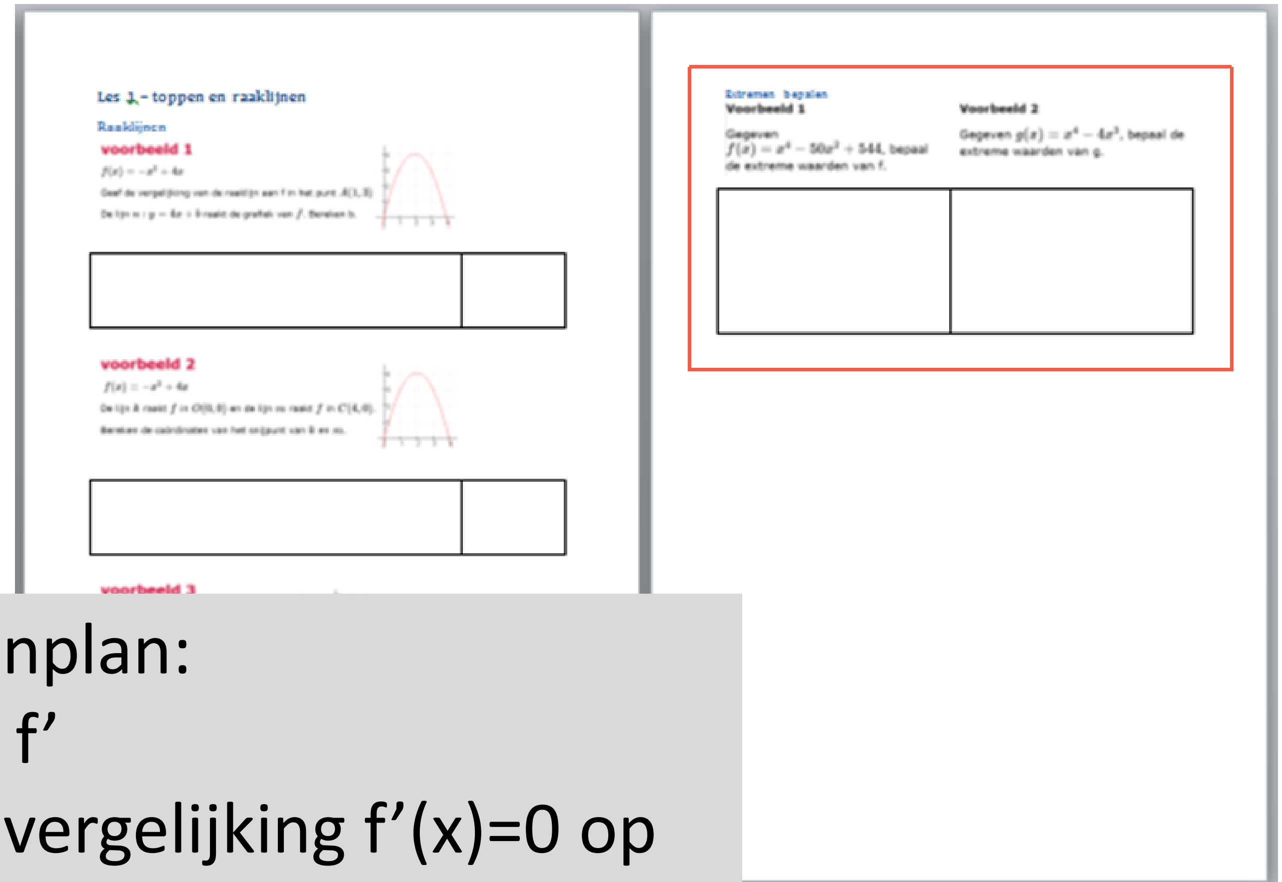


Invullen in y=$-\frac{1}{2}$+b geeft:

b=-2$\frac{1}{8}$

y=$-\frac{1}{2}$x-2$\frac{1}{8}$

Maken!



Stappenplan:

Bepaal f’

Los de vergelijking f’(x)=0 op

Maak een schets

Geef de maxima en/of minima

Voorbeeld 1

Gegeven $f(x) = x^4 - 50x^2 + 544$, bepaal de extreme waarden van f.

Bepaal f':

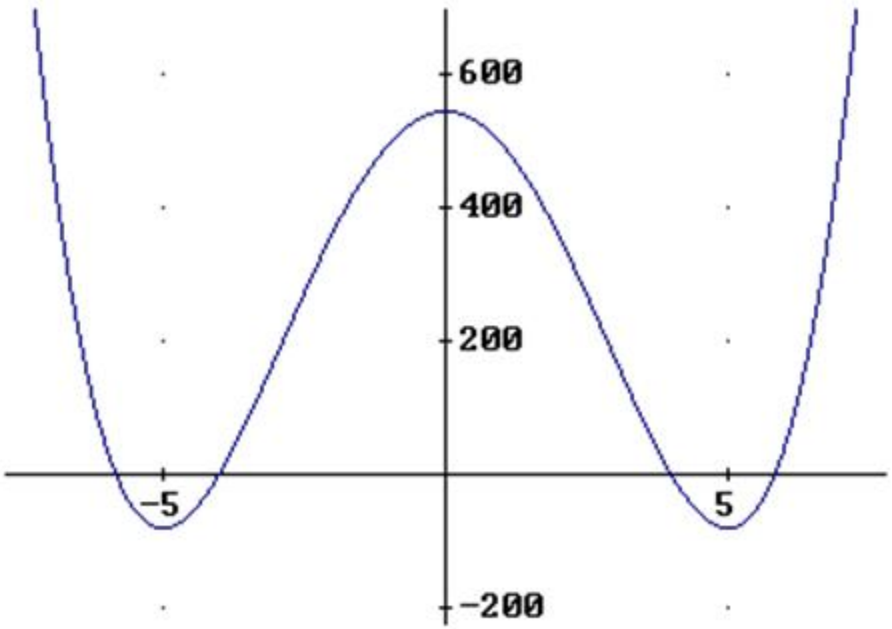
$f'(x) = 4x^3 - 100x$

Los de vergelijking $f'(x) = 0$ op:

$$4x^3 - 100x = 0$$
$$4x\left(x^2 - 25\right) = 0$$
$$4x = 0 \vee x^2 - 25 = 0$$
$$x = 0 \vee x^2 = 25$$
$$x = 0 \vee x = -5 \vee x = 5$$

$$x = 0 \vee x = -5 \vee x = 5$$

Maak een schets:



- Het minimum bij x=-5 is -81.
- Het maximum bij x=0 is 544.
- Het minimum bij x=5 is -81.

NOOT: het maximum is een lokaal maximum.

Voorbeeld 2

Gegeven $g(x) = x^4 - 4x^3$, bepaal de extreme waarden van g.

Bepaal $g'(x)$:

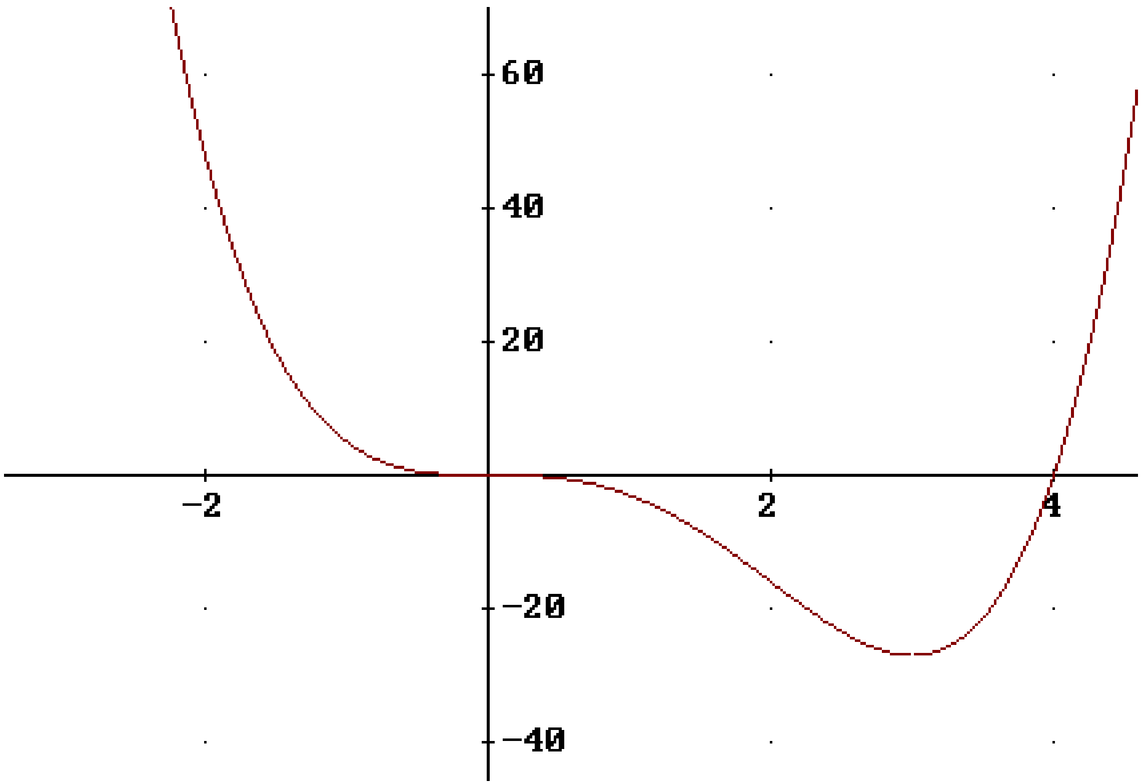
$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

Los de vergelijking $g'(x) = 0$ op:

$$4x^3 - 12x^2 = 0$$
$$4x^2(x-3) = 0$$
$$4x^2 = 0 \lor x - 3 = 0$$
$$x = 0 \lor x = 3$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

Maak een schets:



- Het minimum bij $x = 3$ is $g(3) = -27$.

Bij x=0 is iets anders aan de hand. Dat heet **buigpunt**.

Optimaliseren*

LEZEN

- Een tuinder wil voor de uitbreiding van zijn bedrijf een kas laten bouwen met een grondoppervlakte van $1800 m^2$. Deze kas wordt rechthoekig. De tuinder moet echter nog grond (perceel) kopen van de gemeente. Dit perceel moet zo groot zijn dat voor de kas 9 meter ruimte is en aan de achterkant en de zijde 3 meter. De tuinder wil natuurlijk zo min mogelijk m^2 grond kopen om zijn kosten zo laag mogelijk te houden. 1 m^2 kost 95 euro.

- **Bij welke afmeting van het perceel zijn de kosten minimaal? Hoeveel gaat de aankoop van grond de tuinder kosten en wat worden de afmetingen van de kas**?

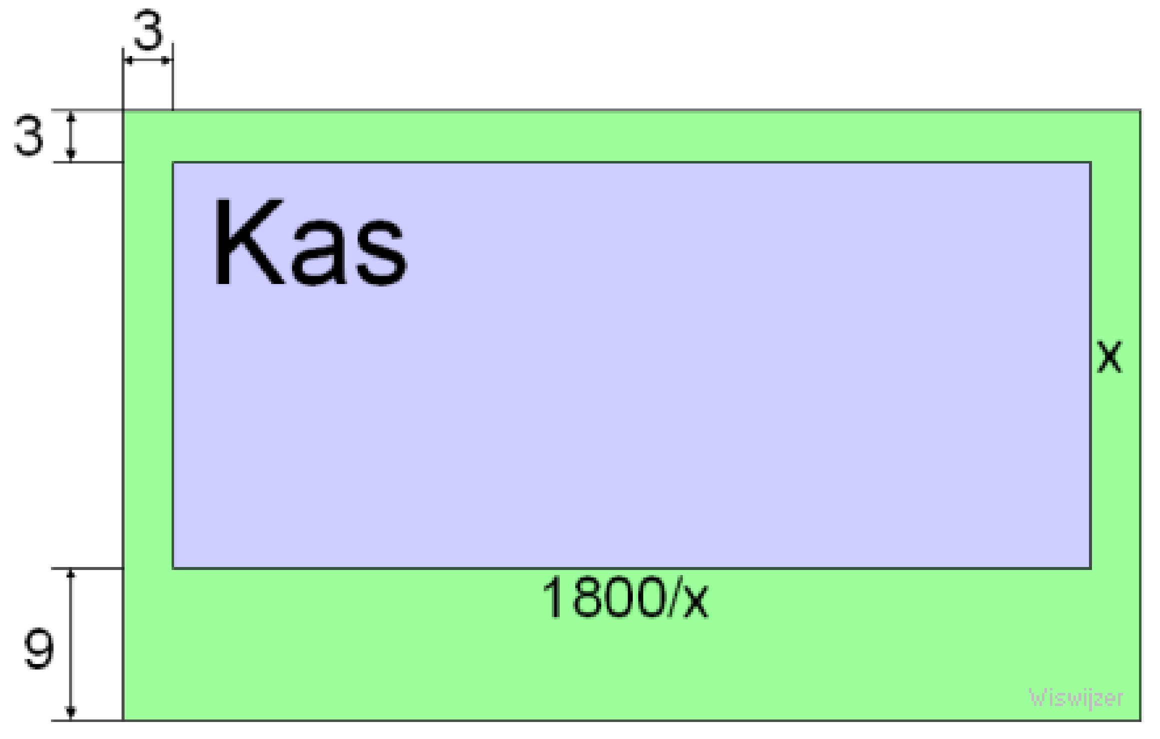
Hoe pak je zoiets aan?

Stap 1

Maak eerst een tekening:

Stap 2

- Vervolgens kun je de oppervlakte van het perceel uitdrukken in 'x' en op zoek gaan naar de kleinste oppervlakte.

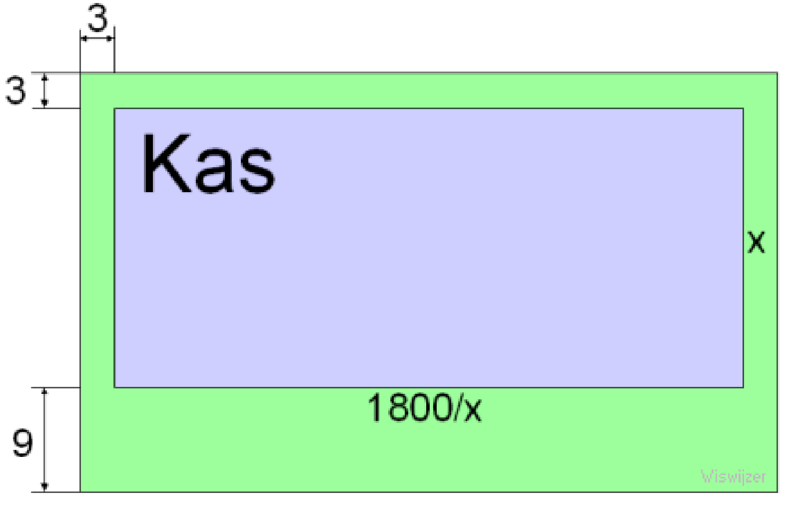


Stap 3

- Maak een formule voor de oppervlakte van het perceel:

$$O_{perceel} = lengte \times breedte$$

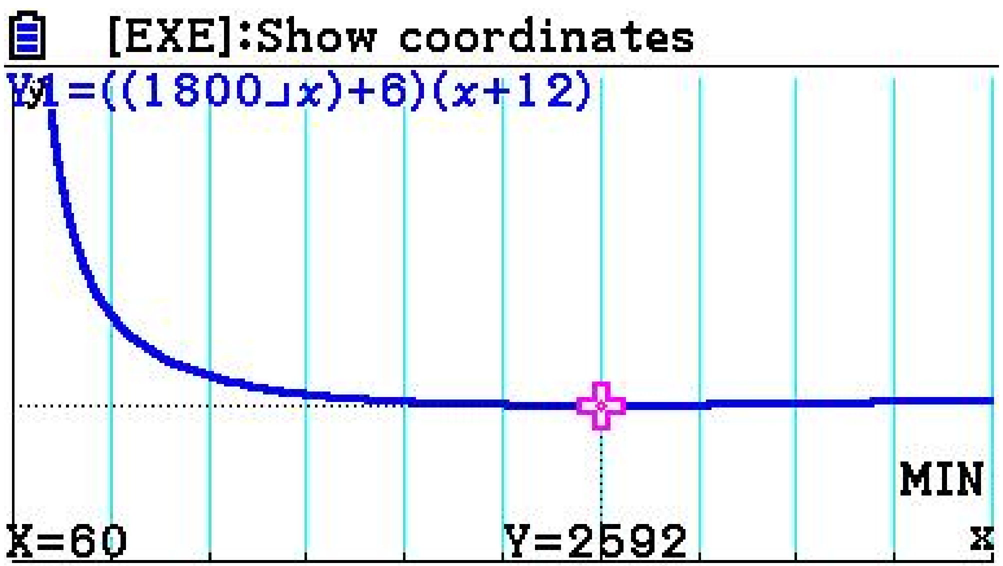
$$O_{perceel} = \left(\frac{1800}{x} + 6\right) \times (x + 12)$$



Stap 4

Met de GR

- Zet het functievoorschrift in je GR. Kies geschikte grenzen en gebruik G-solve en MIN om het minimum vast te stellen.



Conclusie

- Bij x=60 is de oppervlakte van het perceel minimaal.
- De oppervlakte is ongeveer 2592 m^2.
- De kosten zijn dan €246.240.
- De afmetingen van de kas zijn 60 bij 30 meter.

Met de afgeleide?

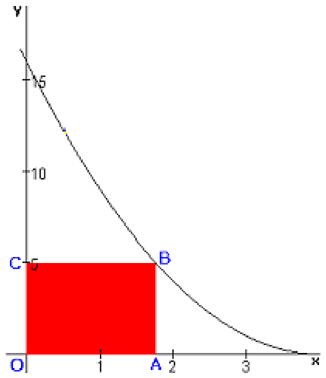
- Je kunt ook de afgeleide van de formule voor de oppervlakte bepalen. De afgeleide op nul stellen en proberen de 'zaak' op te lossen...

$$O_{perceel} = \left(\frac{1800}{x} + 6\right) \times (x + 12)$$

Maken!

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x)=(x-4)^2$. Onder de grafiek tekenen we een rechthoek OABC met O (0,0) en A(p,0) met $0 \leq p \leq 4$. B ligt op de grafiek van f en C ligt op de y-as.

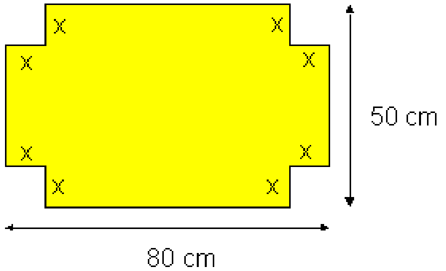


a. Druk de oppervlakte van OABC uit in p.
b. Bereken m.b.v. differentiëren de maximale oppervlakte van OABC.

Voorbeeld 2

Je hebt een rechthoekig stuk karton met afmetingen 80 cm bij 50 cm. Daaruit moet je een doos vouwen (zonder deksel!) met een zo groot mogelijke inhoud.

Je moet uit de vier hoeken van de rechthoek een stukje knippen om de doos te vormen.



Bereken met de afgeleide hoe groot dat stukje moet zijn zodat de doos een maximale inhoud heeft.

Oefeningen

Uit het boek vanaf blz. 88 e.v. hoofdstuk 7

- A5, A9, A10, A15, 17, 18 en A23