

## kwadratische vergelijkingen

In deze paragraaf: 'exact berekenen van oplossingen', 'typen kwadratische vergelijkingen' en 'de abc-formule en de discriminant'.

## de abc-formule

Voor een **tweedegraads vergelijking** van de vorm:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kun je een **formule** afleiden waarmee je de oplossingen van zo'n vergelijking kunt uitrekenen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Het  $\pm$  teken betekent hier **niet** ongeveer, maar plus of min. Je krijgt op deze manier dus 2 antwoorden één met **plus** en één met **min**.

In de formule speelt  $D = b^2 - 4ac$  een belangrijke rol.

We noemen D de **discriminant**. In het algemeen is het handig om eerst de discriminant uit te rekenen en daarna pas de rest.

Je kunt 3 gevallen onderscheiden:

1.  $D > 0$ : er zijn 2 oplossingen.
2.  $D = 0$ : er is precies 1 oplossing.
3.  $D < 0$ : er zijn geen (reële) oplossingen.

## verschillende typen kwadratische vergelijkingen

Elke tweedegraadsvergelijking is te schrijven als:

$$ax^2+bx+c=0, \text{ met } a \neq 0$$

Als je naar de verschillende waarden van a, b en c kijkt kan je verschillende 'soorten' tweedegraadsvergelijkingen onderscheiden. Een aantal daarvan zijn **eenvoudig** op te lossen... Hieronder kan je daar een aantal voorbeelden van vinden.

### Als b=0

Als b=0, dus als er geen term met 'x' in de vergelijking voorkomt, kan je de vergelijking oplossen op onderstaande manier:

|                                         |                                                           |                                                         |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $x^2-4=0$<br>$x^2=4$<br>$x=-2$ of $x=2$ | $4x^2=20$<br>$x^2=5$<br>$x = -\sqrt{5}$ of $x = \sqrt{5}$ | $9x^2+1=0$<br>$9x^2=-1$<br>$x^2=-1/9$<br>geen oplossing |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|

### Als c=0

Als c=0 dan heb je een term met  $x^2$  en x, maar geen 'los' getal. Oplossen gaat dan zo:

|                                                                |                                                                          |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $x^2+x=0$<br>$x(x+1)=0$<br>$x=0$ of $x+1=0$<br>$x=0$ of $x=-1$ | $5x^2=25x$<br>$5x^2-25x=0$<br>$x^2-5x=0$<br>$x(x-5)=0$<br>$x=0$ of $x=5$ |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|

### Als je al een eind op weg bent...

Soms kom je vergelijkingen tegen van deze vorm:

$$(\dots)(\dots)=0$$

In dat geval gebruik je dezelfde aanpak als bij #ontbinden in factoren. Het linkerlid is immers al ontbonden in factoren... dus kan je meteen verder.

|                                                                                                          |                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| <b>Voorbeeld 1</b><br>$(3x-2)(4x+8)=0$<br>$3x-2=0$ of $4x+8=0$<br>$3x=2$ of $4x=-8$<br>$x=2/3$ of $x=-2$ | <b>Voorbeeld 2</b><br>$5(3x-6)^2=0$<br>$3x-6=0$<br>$3x=6$<br>$x=2$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|

Denk eraan: dit werkt alleen als er staat **(...)(...)=0**. Als er iets anders staat dan nul dan moet je even uitkijken. Meestal moet je links en rechts de haakjes wegwerken, de vergelijking op nul herleiden en dan weer verder kijken...

|                                                                                                                            |                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Voorbeeld 3</b><br>$(x-4)(x+2)=4x$<br>$x^2-2x-8=4x$<br>$x^2-6x-8=0$<br>Ontbinden lukt niet? Gebruik dan de ABC-formule! | <b>Voorbeeld 4</b><br>$3(2x-3)^2=27$<br>$(2x-3)^2=9$<br>$2x-3=-3$ of $2x-3=3$<br>$2x=0$ of $2x=6$<br>$x=0$ of $x=3$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## ontbinden in factoren

Bij het oplossen van tweedegraads (of hogere graads) vergelijkingen gebruik je vaak een belangrijke eigenschap van vermenigvuldigen.

Als  $a \cdot b = 0$ , dan geldt:  
 $a = 0$  of  $b = 0$

Dat betekent dat als een **product** (het resultaat van een vermenigvuldiging) de waarde nul heeft, minstens één van de **factoren** (de 'dingen' die je met elkaar vermenigvuldigt) nul moet zijn.

Dit kun je gebruiken om vergelijkingen op te lossen.

### Voorbeeld

$$x \cdot (x + 1) = 0$$

Je hebt hier te maken met twee factoren:  $x$  en  $x + 1$ .

Eén van deze twee factoren moet nul zijn, dus:

$$x = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$

Conclusie:  $x = 0$  of  $x = -1$ .

Niet alle vergelijkingen bestaan natuurlijk uit een product, maar vaak kun je er voor zorgen dat er wel een product komt te staan.

### Voorbeeld

$$x^2 + x = 0$$

kun je schrijven als:

$$x \cdot (x + 1) = 0$$

Deze bewerking heet **ontbinden** (in factoren).

Je hebt de vergelijking  $x^2 + x = 0$  herschreven als een product dat de waarde nul heeft. Dit laatste type vergelijkingen kun je oplossen met de 'eigenschap' van producten (zie boven).

Voordat je gaat ontbinden moet je de vergelijking **op nul herleiden**.

### Voorbeeld

$$x^3 = 2x^2$$

$$x^3 - 2x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (x - 2) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

Samengevat:

- ✓ Eerst op nul herleiden
- ✓ Ontbinden in factoren
- ✓ Gebruik "Als  $a \cdot b = 0$ , dan  $a = 0$  of  $b = 0$ "

## Ontbinden in factoren

Bij tweedegraads vergelijkingen zijn er twee soorten van ontbinden in factoren:

- ✓ Een zo groot mogelijke term buiten haakjes halen.
- ✓ Van een drieterm een product van 2 tweetermen maken.

Deze laatste soort staat wel bekend onder de naam **product-som methode**.

### Voorbeeld

$x^2 + 8x + 12$  kun je ontbinden als  $(x + 6)(x + 2)$ .

Controle:

$$(x + 6)(x + 2) = x^2 + 2x + 6x + 12 = x^2 + 8x + 12$$

Klopt!

De vraag is nu: **hoe kun je zo'n ontbinding vinden?**

Laten we eens kijken naar wat voorbeelden:

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

$$(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$$

$$(x + 1)(x - 4) = x^2 - 3x - 4$$

$$(x - 4)(x - 4) = x^2 - 8x + 16$$

$$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$$

Als het goed is vallen er twee dingen op:

- ✓ Het getal voor de **x** aan de rechter kant is de som (optellen dus) van de twee getallen aan de linker kant.
- ✓ Het getal aan de rechter kant is het product (vermenigvuldigen dus) van de twee getallen aan de linker kant.

Schematisch:

$$(x - 4)(x + 6) = x^2 + 2x - 24$$

**optellen**

**vermenigvuldigen**

Nu andersom:

Je wilt een ontbinding vinden voor  $x^2 + 7x + 12$

Op grond van het bovenstaande moet je twee getallen zoeken die opgeteld 7 zijn en vermenigvuldigd 12.

Mogelijke kandidaten (alle mogelijke tweetallen met als product 12):

| <b>Product</b> |
|----------------|
| 1 · 12         |
| 2 · 6          |
| 3 · 4          |
| -1 · -12       |
| -2 · -6        |
| -3 · -4        |

Als je nu ook nog naar de som kijkt, krijg je volgende tabel:

| <b>Product</b> | <b>Som</b> |
|----------------|------------|
| 1 · 12         | 13         |
| 2 · 6          | 8          |
| 3 · 4          | 7          |
| -1 · -12       | -13        |
| -2 · -6        | -8         |
| -3 · -4        | -7         |

Ik zocht twee getallen met product 12 en som 7, dus 3 en 4.

Je kunt  $x^2 + 7x + 12$  dus ontbinden als  $(x + 3)(x + 4)$