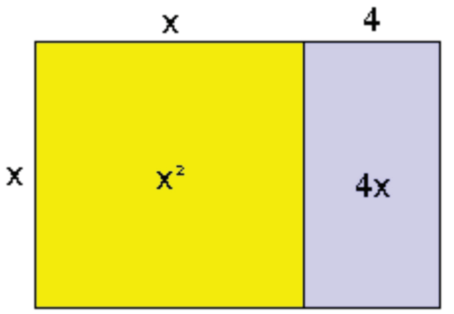
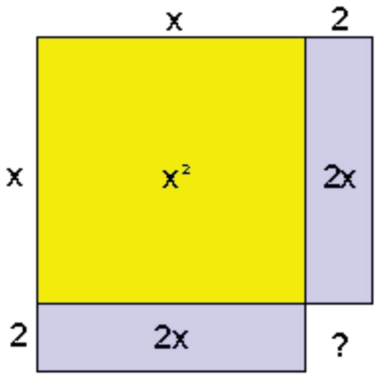
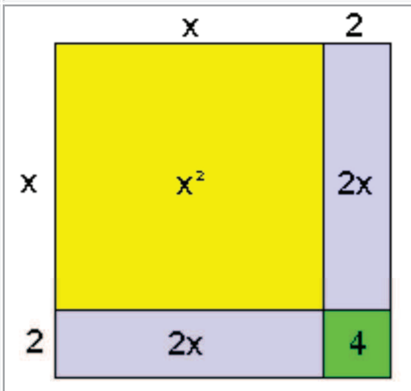
kwadraatafsplitsen

Stel je voor dat ik van een rechthoek met zijden x en $x + 4$ een vierkant wil maken.	
Ik verdeel daarvoor het stuk van $4x$ is twee stukken van $2x$ en leg ze netjes aan weerzijden van het vierkant x^2. Dan heb ik al bijna een vierkant met zijde $x + 2$.	
Maar 't klopt niet helemaal. Eigenlijk kom ik een stukje van 4 tekort. Maar bijna goed...:-)	

Eigenlijk heb ik geprobeerd om $x^2 + 4x$ te schrijven als een **kwadraat**. Dat ging 'bijna' goed, maar niet helemaal. Als je 't schrijft als formules dan krijg je zoiets als:

- ✔ $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$

Die 4 is dan dat stukje dat ik tekort kwam.

- ✔ Ga na dat $(x + 2)^2 - 4$ gelijk is aan $x^2 + 4x$

Kwadraatafsplitsen

Zoiets kan je ook doen voor bijvoorbeeld $x^2 + 6x + 5$. Ik maak er $(x + 3)^2 - 9 + 5$ van. Die 9 komt van 3^2, zodat je kunt schrijven:

- ✔ $x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4$

We zeggen dan dat we een **kwadraat hebben afgesplitst**.

1. voorbeelden

Je ziet hier een aantal voorbeelden van **kwadraatafsplitsen**:

$$x^2 - 8x + 2 = (x - 4)^2 - 14$$
$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$
$$x^2 - 12x = (x - 6)^2 - 36$$

Ga na dat het klopt!

Welke antwoorden zijn juist?

$x^2 + 10x - 20$ geeft:

- [ ] $(x + 5)^2 - 5$
- [ ] $(x + 5)^2 - 25$
- [ ] $(x + 5)^2 - 45$

$x^2 - 2x + 2$ geeft:

- [ ] $(x - 1)^2$
- [ ] $(x - 1)^2 - 1$
- [ ] $(x - 1)^2 + 1$
- [ ] $(x - 1)^2 + 3$

$x^2 + 3x + 4$ geeft:

- [ ] $(x - 2)^2$
- [ ] $(x - 1\frac{1}{2})^2 + 1\frac{3}{4}$
- [ ] $(x - 1\frac{1}{2})^2 + 2\frac{1}{4}$
- [ ] $(x - 1\frac{1}{2})^2 + 2\frac{3}{4}$

Moeilijker

Om bij $ax^2 + bx + c$ een kwadraat af te spliten als $a = 1$ en $b\, is\, even$ gaat makkelijk. 't Is iets lastiger als b oneven is. Je zag hierboven daar al een voorbeeld van. In principe gaat het op dezelfde manier als bij b is even.

✔ $x^2 - 5x + 2 = (x - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + 2 = (x - 2\frac{1}{2})^2 - 4\frac{1}{4}$

Als $a \neq 1$ dan is het nog iets lastiger:

✔ $2x^2 - 4x + 5 = 2\,(x - 1)^2 + 3$

2. de topformule

Je kunt $y = 2x^2 - 4x + 5$ schrijven als $y = 2(x-1)^2 + 3$:

$$y = 2x^2 - 4x + 5$$
$$y = 2(x^2 - 2x)^2 + 5$$
$$y = 2\left((x-1)^2 - 1\right) + 5$$
$$y = 2(x-1)^2 - 2 + 5$$
$$y = 2(x-1)^2 + 3$$

Je hebt dan een kwadraat afgesplitst. Het voordeel daarvan is dat je nu **direct** kan zien wat de **top** is van de parabool. De top is $(1, 3)$.

Topformule

De grafiek van $y = a(x-p)^2 + q$ heeft als top (p, q).

Voorbeelden

Geef de coördinaten van **de top** van deze parabolen:

a. $y = x^2 - 4x - 5$
b. $y = x^2 + 8x + 10$
c. $y = x^2 + 6x + 12$

Uitgewerkt

a. $y = (x-2)^2 - 9$. De top is $(2, -9)$
b. $y = (x+4)^2 - 6$. De top is $(-4, -6)$
c. $y = (x+3)^2 + 3$. De top is $(-3, 3)$

Geef de coördinaten van de top

a. $y = 2(x-4)^2 + 4$	a. (,)
b. $y = -(x+3)^2 - 11$	b. (,)
c. $y = -\frac{2}{3}(x + 1\frac{1}{2})^2 + 2\frac{3}{4}$	c. (,)
d. $y = x^2 + 3$	d. (,)
e. $y = (x+7)^2$	e. (,)

3. vergelijkingen oplossen

Je kunt kwadraatafsplitsen gebruiken om tweedegraads-vergelijkingen op te lossen. **Voorbeeld 1** $x^2 + 4x - 12 = 0$ $(x+2)^2 - 4 - 12 = 0$ $(x+2)^2 - 16 = 0$ $(x+2)^2 = 16$ $x + 2 = -4 \vee x + 2 = 4$ $x = -6 \vee x = 2$	Als de wortel niet 'leuk' uitkomt kan je de vergelijking nog steeds oplossen met kwadraatafspliten. **Voorbeeld 2** $x^2 + 4x - 2 = 0$ $(x+2)^2 - 6 = 0$ $(x+2)^2 = 6$ $x + 2 = -\sqrt{6} \vee x + 2 = \sqrt{6}$ $x = -2 - \sqrt{6} \vee x = -2 + \sqrt{6}$

Opdracht A

Los op met kwadraatafsplitsen:

$x^2 + 4x = 0$ $x^2 - 4x = 0$ $x^2 + 8x + 4 = 0$ $x^2 + 2x = 31$ $x^2 - 27 = 2x$	$x^2 + 7x + 12\frac{1}{4} = 0$ $x^2 = x$ $x^2 = 5x + 4$ $2x^2 + 4x = 3$ $(x+1)(x+5) = 2x + 13$

Methoden om tweedegraadsvergelijkingen op te lossen

Je kent inmiddels een aantal verschillende manieren om tweedegraadsvergelijkingen op te lossen:

- ✔ Worteltrekken
- ✔ Op nul herleiden en ontbinden in factoren
  - ✔ x buiten haakjes halen
  - ✔ product-som-methode
- ✔ kwadraatafsplitsen
- ✔ abc-formule

Opdracht B

Los onderstaande vergelijkingen op de 'handigste manier' op. Gebruik **NIET** de abc-formule:

$x^2 - 2 = 0$
$2x^2 - 4x = 0$
$x^2 - 4x - 12 = 0$
$x^2 - 4x - 11 = 0$
$(3x-2)(x-3) = 0$
$4x^2 - 8x = 5$

4. de ABC-formule

De algemene formule voor een tweedegraadsvergelijking is $ax^2 + bx + c = 0$. Je bent dat vast al een keer tegengekomen bij de abc-formule. De abc-formule geeft je dan de (mogelijke) oplossing van zo'n vergelijking.

Inmiddels heb je ook geleerd hoe je een tweedegraadsvergelijking op kan lossen met kwadraatafsplitsen. De vraag is nu hoe je met kwadraatafsplitsen de algemene vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ kan oplossen.

Oplossen met kwadraatafsplitsen

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$
$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \vee x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \vee x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Opgelost...:-)

Opdracht 1

Schrijf $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ als één breuk.

Opdracht 2

De abc-formule:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Laat zien dat

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

hetzelfde is als de abc-formule.

5. oefeningen

Opgave 1

Los **exact** op **zonder** abc-formule:

a. $3x^2 = 5x$
b. $(3x+3)(2x-5) = 0$
c. $(3x-1)^2 = 16$
d. $(x+2)^2 + (x+3)^2 = 1$
e. $8x^2 + 2x - 3 = 0$
f. $12x^2 = 144$

Opgave 2

Geef van onderstaand parabolen de coördinaten van de top:

a. $f(x) = x^2 + 2x - 1$
b. $g(x) = -2x^2 + 6$
c. $h(x) = 3x^2 - 30x + 50$
d. $k(x) = -4x^2 - 16x - 28$

Opgave 3

Los **exact** op:

a. $x^2 + 4x = -10$
b. $2(x^2 + 3) = 2$
c. $4x^2 - 4x + 1 = 25$
d. $(2x+2)^2 = (3x-3)^2$

Welke antwoorden zijn juist?

$x^2 + 10x - 20$ geeft:

- [ ] $(x+5)^2 - 5$
- [ ] $(x+5)^2 - 25$
- [x] $(x+5)^2 - 45$

$x^2 - 2x + 2$ geeft:

- [ ] $(x-1)^2$
- [ ] $(x-1)^2 - 1$
- [x] $(x-1)^2 + 1$
- [ ] $(x-1)^2 + 3$

$x^2 + 3x + 4$ geeft:

- [ ] $(x-2)^2$
- [x] $(x-1\frac{1}{2})^2 + 1\frac{3}{4}$
- [ ] $(x-1\frac{1}{2})^2 + 2\frac{1}{4}$
- [ ] $(x-1\frac{1}{2})^2 + 2\frac{3}{4}$

Geef de coördinaten van de top

a. $y = 2(x-4)^2 + 4$ b. $y = -(x+3)^2 - 11$ c. $y = -\frac{2}{3}(x+1\frac{1}{2})^2 + 2\frac{3}{4}$ d. $y = x^2 + 3$ e. $y = (x+7)^2$	a. $(4, 4)$ b. $(-3, -11)$ c. $(-1\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4})$ d. $(0, 3)$ e. $(-7, 0)$

Uitwerkingen ABC-formule

Opdracht 1

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Opdracht 2

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} =$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} =$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Uitwerkingen opdracht A

$x^2+4x=0$ $(x+2)^2-4=0$ $(x+2)^2=4$ $x+2=-2 \vee x+2=2$ $x=-4 \vee x=0$	$x^2+7x+12\frac{1}{4}=0$ $(x+3\frac{1}{2})^2=0$ $x+3\frac{1}{2}=0$ $x=-3\frac{1}{2}$
$x^2-4x=0$ $(x-2)^2-4=0$ $(x-2)^2=4$ $x-2=-2 \vee x-2=2$ $x=0 \vee x=4$	$x^2=x$ $x^2-x=0$ $(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=0$ $(x-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ $x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \vee x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $x=0 \vee x=1$
$x^2+8x+4=0$ $(x+4)^2-16+4=0$ $(x+4)^2-12=0$ $(x+4)^2=12$ $x+4=-\sqrt{12} \vee x+4=\sqrt{12}$ $x=-4-\sqrt{12} \vee x=-4+\sqrt{12}$	$x^2=5x+4$ $x^2-5x=4$ $(x-2\frac{1}{2})^2-6\frac{1}{4}=4$ $(x-2\frac{1}{2})^2=10\frac{1}{4}$ $x-2\frac{1}{2}=-\sqrt{10\frac{1}{4}} \vee x-2\frac{1}{2}=\sqrt{10\frac{1}{4}}$ $x=2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{41} \vee x=2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{41}$
$x^2+2x=31$ $(x+1)^2-1=31$ $(x+1)^2=32$ $x+1=-\sqrt{32} \vee x+1=\sqrt{32}$ $x=-1-4\sqrt{2} \vee x=-1+4\sqrt{2}$	$2x^2+4x=3$ $2\left(x^2+2x\right)=3$ $2((x+1)^2-1)=3$ $2(x+1)^2-2=3$ $2(x+1)^2=5$ $(x+1)^2=2\frac{1}{2}$ $x+1=-\sqrt{2\frac{1}{2}} \vee x+1=\sqrt{2\frac{1}{2}}$ $x=-1-\frac{1}{2}\sqrt{10} \vee x=-1+\frac{1}{2}\sqrt{10}$
$x^2-27=2x$ $x^2-2x-27=0$ $(x-1)^2-28=0$ $x=1-2\sqrt{7} \vee x=1+2\sqrt{7}$	$(x+1)(x+5)=2x+13$ $x^2+6x+5=2x+13$ $x^2+4x+5=13$ $(x+2)^2+1=13$ $(x+2)^2=12$ $x=-2-2\sqrt{3} \vee x=-2+2\sqrt{3}$

Uitwerkingen opdracht B

Vergelijkingen als $x^2-2=0$ los je op met worteltrekken: $x^2-2=0$ $x^2=2$ $x=-\sqrt{2} \vee x=\sqrt{2}$	Vergelijkingen als $2x^2-4x=0$ los je op met ontbinden in factoren. Bijvoorbeeld door x buiten haakjes te halen: $2x^2-4x=0$ $2x(x-2)=0$ $2x=0 \vee x-2=0$ $x=0 \vee x=2$
Vergelijkingen als $x^2-4x-12=0$ los je op met ontbinden in factoren. Gebruik de product-som-methode: $x^2-4x-12=0$ $(x-6)(x+2)=0$ $x=6 \vee x=-2$	Vergelijkingen als $x^2-4x-11=0$ kan je niet zomaar oplossen met ontbinden in factoren. Je zou de abc-formule kunnen gebruiken, maar kwadraatafsplitsen is mooier: $x^2-4x-11=0$ $(x-2)^2-4-11=0$ $(x-2)^2-15=0$ $(x-2)^2=15$ $x-2=-\sqrt{15} \vee x-2=\sqrt{15}$ $x=2-\sqrt{15} \vee x=2+\sqrt{15}$
Een vergelijking als $(3x-2)(x-3)=0$ is al ontbonden in factoren. Je bent er al bijna: $(3x-2)(x-3)=0$ $3x-2=0 \vee x-3=0$ $3x=2 \vee x=3$ $x=\frac{2}{3} \vee x=3$	Een vergelijking als $4x^2-8x=5$ kan je oplossen met de abc-formule. Je zou zelfs kunnen ontbinden in factoren, maar kwadraatafsplitsen is handiger: $4x^2-8x=5$ $4(x^2-2x)=5$ $4((x-1)^2-1)=5$ $4(x-1)^2-4=5$ $4(x-1)^2=9$ $2(x-1)=-3 \vee 2(x-1)=3$ $2x-2=-3 \vee 2x-2=3$ $2x=-1 \vee 2x=5$ $x=-\frac{1}{2} \vee x=2\frac{1}{2}$

Antwoorden van de oefeningen

Opgave 1

a. $x = 0 \vee x = 1\frac{2}{3}$
b. $x = 1 \vee x = 2\frac{1}{2}$
c. $x = -1 \vee x = 1\frac{2}{3}$
d. $x = -2 \vee x = -3$
e. $x = -\frac{3}{4} \vee x = \frac{1}{2}$
f. $x = -\sqrt{12} \vee x = \sqrt{12}$

Opgave 2

a. Top$(-1, -2)$
b. Top$(0, 6)$
c. Top$(5, -25)$
d. Top$(-2, -12)$

Opgave 3

a. Geen oplossing
b. Geen oplossing
c. $x = 3 \vee x = -2$
d. $x = 5 \vee x = \frac{1}{5}$