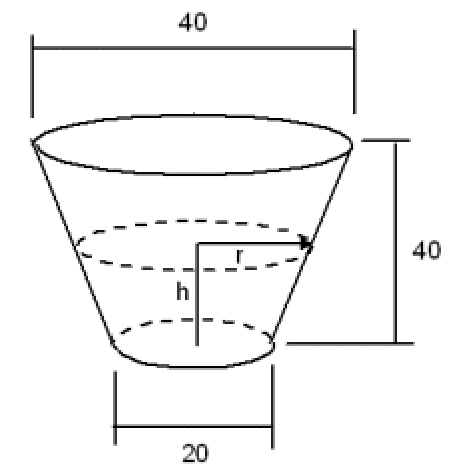
Lesbrief Analyse 1-3

Inhoud van ruimtelijke figuren
Inhoud van omwentelingslichamen
Lengte van een kromme
Differentiaalvergelijkingen
Richtingsvelden
Standaardtypen differentiaalvergelijkingen
Losse eindjes, tips & truuks

Willem van Ravenstein

2. Inhoud van ruimtelijke figuren

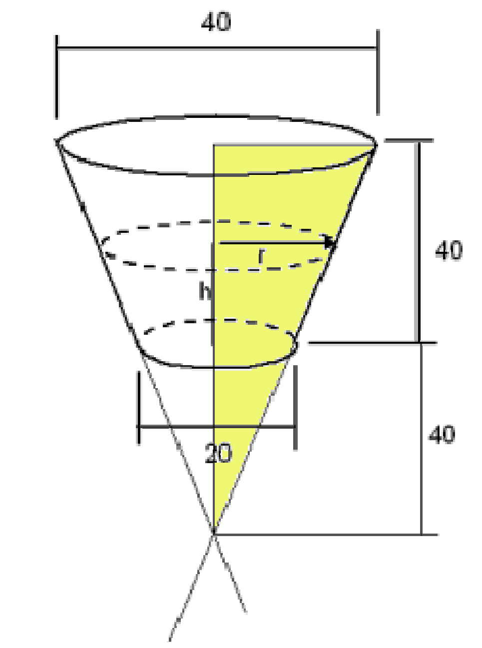
Hieronder zie je een plaatje van een emmer. De afmetingen staan in de tekening.



✔ Wat is de inhoud van deze emmer?

Uitwerking

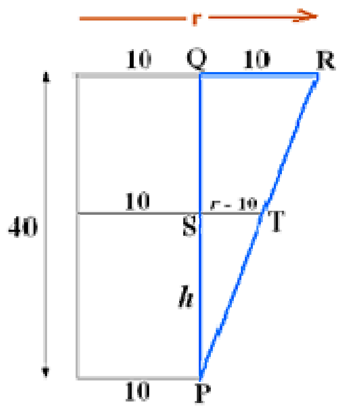
Je kunt de inhoud uitrekenen door gebruik te maken van de formule voor de inhoud van de kegels. Daarvoor is het handig om de **hele kegel** te tekenen en de afmetingen vast te stellen. De inhoud is dan zoiets als 'de inhoud van de grote kegel min de inhoud van de kleine kegel'.

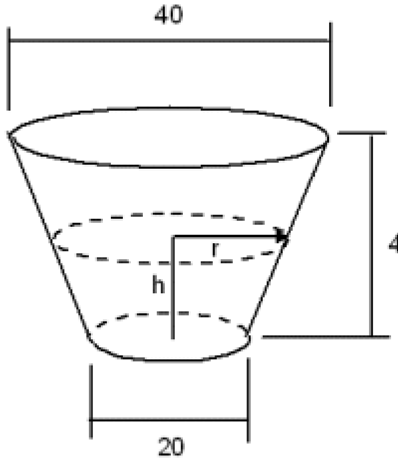


$$\text{Inhoud kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$\text{Inhoud emmer} = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 80 - \frac{1}{2}\pi \cdot 10^2 \cdot 40 \approx 29,3 \text{ liter}$$

Maar neem eens aan dat je die formule voor de inhoud van een kegel niet kent. Je kunt de inhoud uitrekenen met behulp van **integraalrekening**.





Dus $\frac{10}{40} = \frac{r-10}{h} \Rightarrow r = \frac{1}{4}h + 10$

Oppervlakte $= \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{4}h + 10\right)^2$

Inhoud $= \int_0^{40} \pi\left(\frac{1}{4}h + 10\right)^2 dh$

En dan...

$$\int_0^{40} \pi\left(10 + \frac{1}{4}h\right)^2 dh =$$

$$\int_0^{40} 100\pi + 5\pi h + \frac{1}{16}\pi h^2 dh =$$

$$\left[100\pi h + 2\frac{1}{2}\pi h^2 + \frac{1}{48}\pi h^3\right]_0^{40} =$$

$$100\pi \cdot 40 + 2\frac{1}{2}\pi(40)^2 + \frac{1}{48}\pi(40)^3 \approx 29\,322\,\text{cm}^3 \approx 29{,}3 \text{ liter}$$

3. Inhoud van omwentelingslichamen

Op de formulekaart staat:

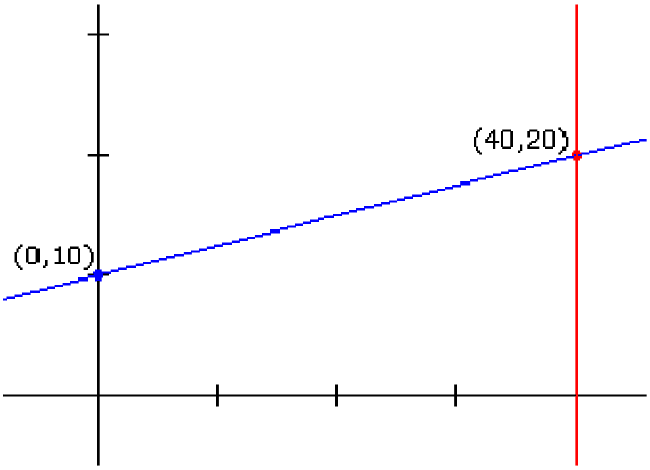
Inhoud van een omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van de functie f op het interval $[a,b]$ om de x-as te wentelen: $I = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$

Voorbeeld 1

De inhoud van de emmer van **2. Inhoud van ruimtelijke figuren** kan je ook berekenen als je de emmer beschouwt als een omwentelingslichaam. Je moet dan wel even het functievoorschrift verzinnen:

Een eerstegraads functie door (0,10) en (40,20), dus...

$y={}^{1}/_{4}x+10$



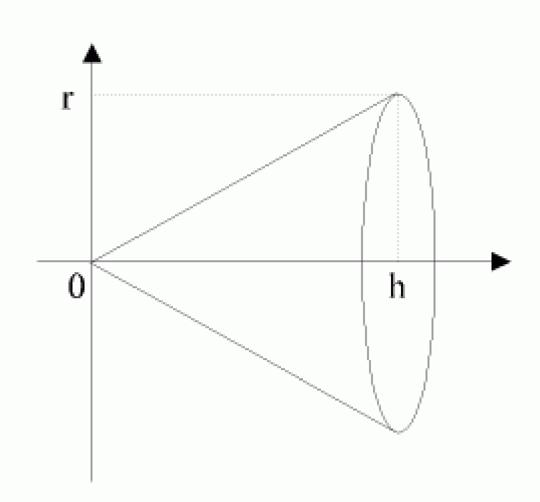
Zodat de inhoud gelijk is aan:

$$\pi \int_0^{40} \left(\frac{1}{4} x + 10 \right)^2 dx = \ldots$$

...en dat is wel een stuk handiger!

Voorbeeld 2

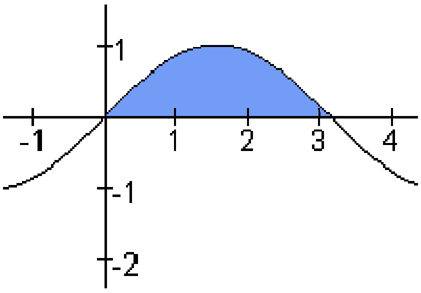
Je kan elke kegel met een hoogte h en straal r beschouwen als een omwentelingslichaam om de x-as van een eerstegraads functie f door O(0,0). Het functievoorschrift van deze functie is y=ax met als f(h)=r, zodat a=$^r/_h$.



$$\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx = \pi\int_0^h\frac{r^2}{h^2}x^2dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}\pi r^2h$$

Voorbeeld 3

Gegeven is f(x)=sin(x).



Het gebied ingesloten door de grafiek van f en de lijnen x = 0 en x = π wordt gewenteld om de x-as.

- ✔ Benader op 2 decimalen de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

Uitwerking

$$I = \pi\int_a^b(f(x))^2 = \pi\int_0^{\pi}(\sin(x))^2\,dx = \pi\int_0^{\pi}\sin^2(x)\,dx \approx 4{,}93$$

Exact berekenen?

$$\pi\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = ?$$

We hebben nog:

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos(2x)$$

Zodat:

$$\pi\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx =$$

$$\pi\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos(2x)\right)dx =$$

$$\pi\cdot\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\sin(2x)\right]_0^\pi =$$

$$\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\cdot\sin(2\pi) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot 0)\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\pi^2\ (\approx 4{,}93)$$

4. Lengte van een kromme

Op de formulekaart:

Lengte van de grafiek van f op het interval $[a,b]$: $L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Voorbeeld 1

Gegeven: f(x)=x op [0,3].

- ✔ Gevraagd de lengte van de grafiek.

Dat gaat als volgt:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+(1)^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{2}\,dx = \left[\sqrt{2}\cdot x\right]_0^3 = 3\sqrt{2}$$

Voorbeeld 2
Gegeven: g(x)=√x op [1,4].

- ✔ Benader de lengte van de grafiek...

Oplossing:

$$L = \int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx \approx 3{,}2$$

Voorbeeld 3

Gegeven: h(x)=x√x op [0,4]

Bereken exact de lengte van de grafiek van h

Dat wordt dan:

$$f(x) = x\sqrt{x} = x^{1\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\int_0^4 \sqrt{1+\left(1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$\int_0^4 \sqrt{1+2\frac{1}{4}x}\,dx =$$

$$\left[\frac{\left(1+2\frac{1}{4}x\right)^{1\frac{1}{2}}}{2\frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{2}}\right]_0^4 =$$

$$\left[\frac{8}{27}\left(1+2\frac{1}{4}x\right)^{1\frac{1}{2}}\right]_0^4 =$$

$$\frac{8}{27}\left(1+2\frac{1}{4}\cdot 4\right)^{1\frac{1}{2}} - \frac{8}{27}\left(1+2\frac{1}{4}\cdot 0\right)^{1\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{8}{27}(1+9)^{1\frac{1}{2}} - \frac{8}{27} =$$

$$\frac{8}{27}\cdot 10^{1\frac{1}{2}} - \frac{8}{27} =$$

$$\frac{8}{27}\cdot 10\sqrt{10} - \frac{8}{27} =$$

$$2\frac{26}{27}\sqrt{10} - \frac{8}{27}$$

5. Differentiaalvergelijkingen

Een differentiaalvergelijking geeft de relatie weer tussen een functie y en de afgeleide y'. Er zijn ook differentiaalvergelijkingen met hogere orde afgeleiden.

Voorbeeld 1

Gegeven de differentiaalvergelijking:

y'=y

- ✔ Los op!

We zijn dus op zoek naar een functie y waarvan de afgeleide y' hetzelfde is als de functie zelf. Die functie ken je waarschijnlijk wel. $y=e^x$ heeft als afgeleide $y'=e^x$. Invullen geeft:

- ✔ $e^x=e^x$

..en dat klopt... dus is $y=e^x$ een oplossing voor de differentiaalvergelijking.

Voorbeeld 2

Gegeven is de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dN}{dt} = 3 \cdot N(t)$$

We zijn dus op zoek naar een functie waarvoor geldt dat $y'=3 \cdot y$

Neem $N(t) = 3t \rightarrow \frac{dN}{dt} = 3$

Is $3 = 3 \cdot 3t$? Ik dacht het niet...

Neem $N(t) = 3t^2 \rightarrow \frac{dN}{dt} = 6t$

Is $6t = 3 \cdot 3t^2$? Nee... toch niet...

Neem $N(t) = 3^t \rightarrow \frac{dN}{dt} = 3^t \cdot \ln(3)$

Is $3^t \cdot \ln(3) = 3 \cdot 3^t$? Nee, maar 't scheelt niet veel...

Neem $N(t) = g^t \rightarrow \frac{dN}{dt} = g^t \cdot \ln(g)$

Is $g^t \cdot \ln(g) = 3 \cdot g^t$? Nou... als $\ln(g) = 3$ dan wel!

$g = e^3 \rightarrow N(t) = \left(e^3\right)^t = e^{3t}$

De functie $N(t) = e^{3t}$ noem je een oplossing van de differentiaalvergelijking.

1. Exponentiële groei

Bij exponentiele groei hoort de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dN}{dt} = c \cdot N(t)$$

We schrijven ook wel:

$N'(t) = cN(t)$

...of nog korter: $N' = cN$

Oplossing: $N(t) = pe^{ct}$

Dat zijn meerdere oplossingen!

Soms wordt er een randvoorwaarde gegeven,
dan is maar 1 oplossing!
(bereken de waarde van p)

Bij exponentiële groei is **de groeisnelheid evenredig** met de aanwezige **hoeveelheid**.

Voorbeeld 1

Gegeven: $\frac{dy}{dt} = -0{,}6y$

Oplosingen: $y = pe^{-0{,}6t}$ | bijvoorbeeld: $y = e^{-0{,}6t}$, $y = -2 \cdot e^{-0{,}6t}$, $y = \sqrt{2} \cdot e^{-0{,}6t}$

Randvoorwaarde: $y(0) = 85$

Dan: $y = pe^{-0{,}6t} \rightarrow 85 = pe^{-0{,}6 \cdot 0} \rightarrow 85 = pe^{0} \rightarrow p = 85$

Oplossing is $y = 85 \cdot e^{-0{,}6t}$

..en dat laatste kon je natuurlijk wel zien aankomen als je formule voor exponentiële groei kent:

$\mathbf{N(t)=b \cdot g^t}$ met:
- b: beginwaarde
- g:groeifactor per tijdseenheid
- t:tijd

Wat is bij dit voorbeeld eigenlijk de groeifactor?

Voorbeeld 2

In een duingebied is op t=0 het aantal konijnen vastgesteld op 200. Het aantal konijnen neemt elke maand met 5% toe.

Geef de groeifactor per maand
Geef de bijbehorende formule N(t)=...
Geef de bijbehorende differentiaalvergelijking

Uitwerking

De groeifactor is 1,05 (per maand).
De formule: $N(t)=200\cdot 1{,}05^t$
De differentiaalvergelijking: $N'(t)=c\cdot N(t)$ met $g=e^c$.
$e^c=1{,}05$
$c=\ln(1{,}05) \approx 0{,}0488$
De bijbehorende differentiaalvergelijking is $N'(t)=0{,}0488\cdot N(t)$

2. Begrensde groei

Bij begrensde groei is **de groeisnelheid evenredig** met **het verschil tussen de hoeveelheid en een bovengrens K**. Bij begrensde groei hoort de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dt} = c\cdot\left(K-y\right) \text{ met } c>0$$

De oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn van deze vorm:

$$y = K + a\cdot e^{-ct}$$

De waarde van a hangt af van de randvoorwaarde.
Als gegeven is dat y(0)=... dan is a=y(0)-K

Voorbeeld
Gegeven is de volgende differentiaal vergelijking:

$$\frac{dy}{dt} = 45 - 15y \text{ met } y(0) = -10$$

Geef de oplossing van deze differentiaalvergelijking.

Uitwerking

$$\frac{dy}{dt} = 45 - 15y = 15\cdot(3-y)$$

$$\begin{cases} y = 3 + a\cdot e^{-15t} \\ y(0) = -10 \end{cases} \Rightarrow -10 = 3 + a\cdot e^{-15\cdot 0} \Rightarrow a = -13$$

$$\text{Oplossing}: y = 3 - 13\cdot e^{-15t}$$

✔

3. Logistische groei

Bij **logistische groei** is de groeisnelheid afhankelijk van de **aanwezige hoeveelheid** als ook van **een remfactor**. Bij logistische groei hoort de differentiaal vergelijking:

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (G - y)$$

De oplossingen van deze differentiaalvergelijking hebben dan deze vorm:

$$y(t) = \frac{G}{1 + a \cdot e^{-cGt}}$$

G is de grenswaarde en de waarde van a hangt af van G en de randvoorwaaarde(n).

$$a = \frac{G - y(0)}{y(0)}$$

Voorbeeld 1

Gegeven de volgende differentiaalvergelijking met randvoorwaarde:

$$\frac{dy}{dt} = 6y(4 - y) \text{ met } y(0) = 2$$

- ✔ Geef de oplossing.

Uitwerking

$$\frac{dy}{dt} = 6y(4 - y) \text{ met } y(0) = 2$$

$$c = 6 \text{ en } G = 4$$

$$a = \frac{G - y(0)}{y(0)} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$y(t) = \frac{G}{1 + a \cdot e^{-cGt}} = \frac{4}{1 + e^{-24t}}$$

Voorbeeld 2

Gegeven de volgende differentiaalvergelijking met randvoorwaarde:

$$\frac{dy}{dt} = 2{,}5y - 0{,}05y^2 \text{ met } y(2) = 10$$

- ✔ Geef de oplossing.

Uitwerking

$$\frac{dy}{dt} = 2,5y - 0,05y^2 \text{ met } y(2) = 10$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,05y\left(50 - y\right)$$

$$c = 0,05 \text{ en } G = 50$$

$$\begin{cases} y(t) = \dfrac{50}{1 + a \cdot e^{-2,5t}} \\ y(2) = 10 \end{cases} \Rightarrow \frac{50}{1 + a \cdot e^{-2,5 \cdot 2}} = 10 \Rightarrow 1 + a \cdot e^{-5} = 5 \Rightarrow a \cdot e^{-5} = \mathbf{4}$$

$$a \approx 594$$

$$y(t) = \frac{50}{1 + 594 \cdot e^{-2,5t}}$$

Voorbeeld 3

Gegeven de volgende differentiaalvergelijking met randvoorwaarde:

$$\frac{dy}{dt} = 15y\left(1 - \frac{y}{40}\right) \text{ met } y(0) = 5$$

Geef de oplossing.

Uitwerking

$$\frac{dy}{dt} = 15y\left(1 - \frac{y}{40}\right) \text{ met } y(0) = 5$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{15}{40}y\left(40 - y\right)$$

$$c = \frac{3}{8} \text{ en } G = 40$$

$$a = \frac{40 - 5}{5} = 7$$

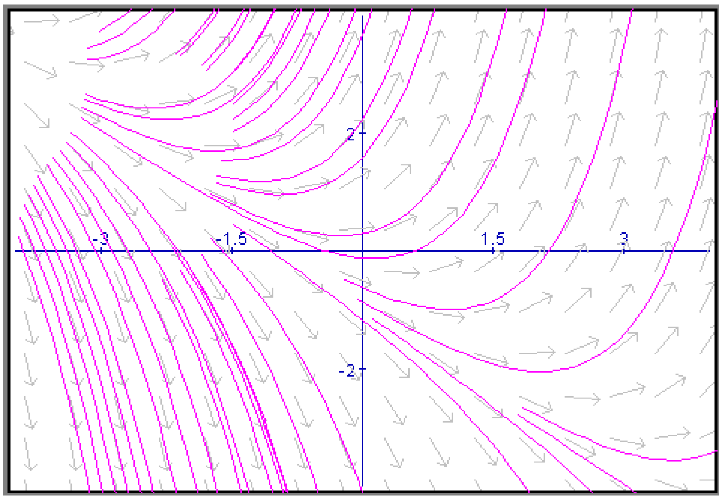
$$y(t) = \frac{40}{1 + 7e^{-15t}}$$

6. Richtingsvelden

Met behulp van een richtingsveld kun je een differentiaalvergelijking grafisch weergeven. Je kan dan functiewaarden benaderen en een globaal beeld van de grafieken van de oplossingen krijgen.

Voorbeeld 1

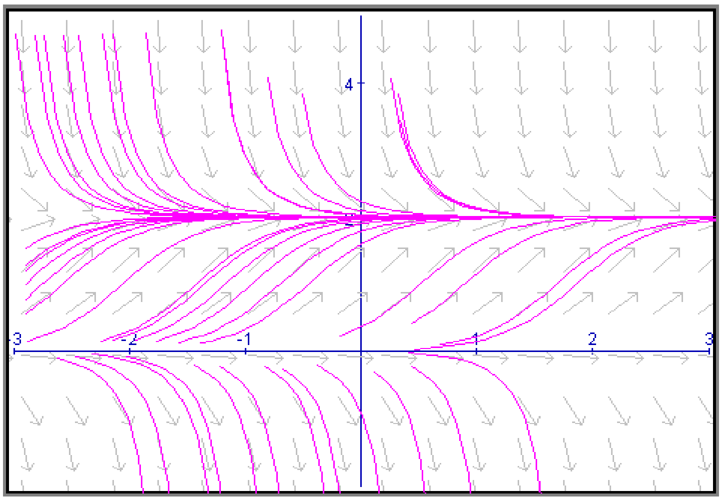
Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = t + y$. Zoals je ziet hangt de afgeleide niet alleen af van y maar ook van t. Hieronder zie je het richtingsveld door te klikken op een punt kan je de grafiek van de oplossing door dat punten laten tekenen.



Teken een aantal van deze oplossingen.

a. Van een aantal oplossingen ligt het laagste punt op een lijn. Welke lijn is dat? Hoe kan je dan verklaren?
b. Als je start in het punt (-4,3) dan krijg je een rechte lijn. Welke lijn is dat? En hoe kan je dat verklaren?

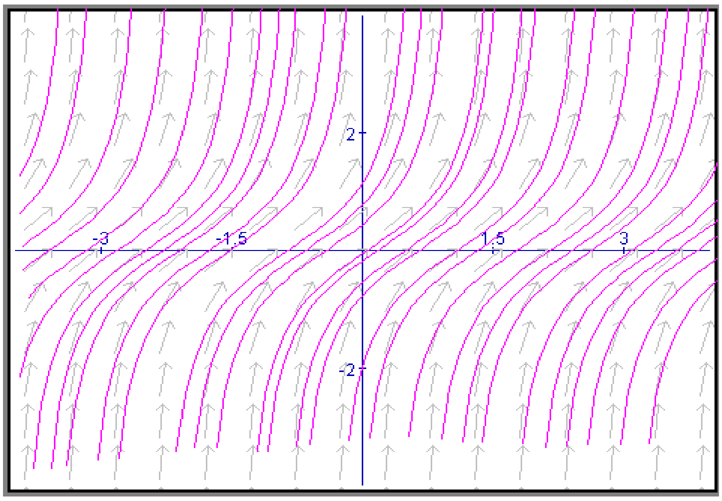
Voorbeeld 2



a. Geef de asymptoten van de oplossingen

b. Laat door invullen in de differentiaalvergelijking zien dat deze asymptoten zelf ook een oplossing zijn.
c. Wat gebeurt er wanneer de randvoorwaarde een punt is vlak boven of onder de lijn y=0?

Voorbeeld 3



a. Plot een aantal oplossingen.
b. Laat door invullen zien dat y=tan(x) de oplossing is door (0,0).
c. Wat is het functievoorschrift van de oplossing door (2,0)?

7. Standaardtypen differentiaalvergelijkingen

Als je de formule voor de logistische groei gebruikt zoals deze op de formulekaart staat dan kan je het volgende overzicht van de 3 standaartypen differentiaalvergelijkingen weergeven zoals in onderstaand schema.

exponentiele groei $\frac{dy}{dt} = c \cdot y$ $\downarrow$ begrensde groei $\frac{dy}{dt} = c \cdot (K - y)$ $\downarrow$ logistische groei $\frac{dy}{dt} = c \cdot y\,(G - y)$	exponentiele groei $\frac{dy}{dt} = c \cdot y \xrightarrow{\text{oplossing}} y = a \cdot e^{ct}$ $\downarrow$ begrensde groei $\frac{dy}{dt} = c \cdot (K - y) \xrightarrow{\text{oplossing}} y = K + a \cdot e^{-ct}$ $\downarrow$ logistische groei $\frac{dy}{dt} = c \cdot y\,(G - y) \xrightarrow{\text{oplossing}} y = \frac{G}{1 + a \cdot e^{-cGt}}$

Je zou op deze manier logistische groei op kunnen vatten als een 'combinatie' van exponentiele (in het begin) en begrensde groei (aan het eind).

Hieronder zie je een aantal 'typische' opgaven omtrent deze standaard differentiaalvergelijkingen.

Uitwerkingen staan in de bijlage.

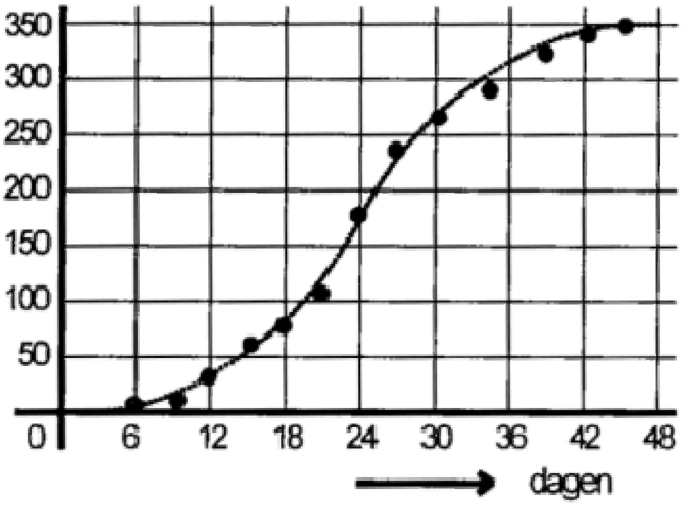
1. Forellenvijver

Een forellenkwekerij heeft een vijver laten aanleggen waarin plaats is voor maximaal 4800 forellen. Met zet 800 forellen uit die na 3 maanden in aantal toegenomen zijn tot 1200. Er wordt verondersteld dat de groei logistisch zal zijn.

a. Geef de formule voor aantal forellen y na t maanden.
b. Na hoeveel maanden is snelheid waarmee het aantal forellen toeneemt het grootst?

Moderne wiskunde - vwo bovenbouw - wiskunde B1 deel 5 - A6 - Tussentoets

2. Fruitvliegjes



Het aantal fruitvliegjes dat in een laboratorium wordt gekweekt, wordt iedere dag geteld. De resultaten zijn weergegeven in de grafiek hiernaast.

Op t=0 zijn er vijf fruitvliegjes. Voor het aantal fruitvliegjes N na t dagen geldt de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dN}{dt} = kN(1 - \frac{N}{350})$$

a. Los de differentiaalvergelijking op. Je hoeft nog geen waarde voor k in te vullen, dus nog niets af te lezen uit de grafiek.
b. Het buigpunt ligt ligt bij t=24. Het aantal vliegjes is daar 175. Bereken k in 4 decimalen nauwkeurig.
c. Bereken de groeisnelheid van de fruitvliegjes bij t=24 in 4 decimalen nauwkeurig.
d. Laat zien dat de lijnen N=0 en N=350 oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking.

Proeftoets opgave 5

3. Gebraden kip

Men neemt een kip uit de koelkast die een constante temperatuur heeft van 6°C en men wil deze braden in een oven aan 200°C. Na 20 minuten is de temperatuur van de kip al tot 160° opgelopen. Schrijf de temperatuur T in °C van de kip in functie van de tijd (t).

4. Kakkerlakken

Een populatie kakkerlakken in een keuken groeit op basis van een logistisch groeimodel. Oorspronkelijk zijn er 10 kakkerlakken en de maximale capaciteit is 10000. De groeisnelheid (mate van toename) is het grootst na 15 dagen. Bereken het aantal kakkerlakken in de keuken na 10 dagen?

5. Afkoeling

Een kop koffie uit de koffiemachine heeft een temperatuur van 64 °C. De temperatuurdaling is evenredig met het temperatuurverschil met de kamer. De kamer heeft een temperatuur van 18 °C. Na 5 minuten is de temperatuur van koffie gedaald tot 24°C.

a. Schrijf de temperatuur T in °C van de koffie als functie van t in minuten.
b. Bereken na hoeveel minuten de temperatuur is gedaald tot 19 °C.

6. Polonium 214

Het element Polonium^{214} vervalt heel snel. De halveringstijd is $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ seconde. Het proces van radioactief verval wordt beschreven met de differentiaalvergelijking:

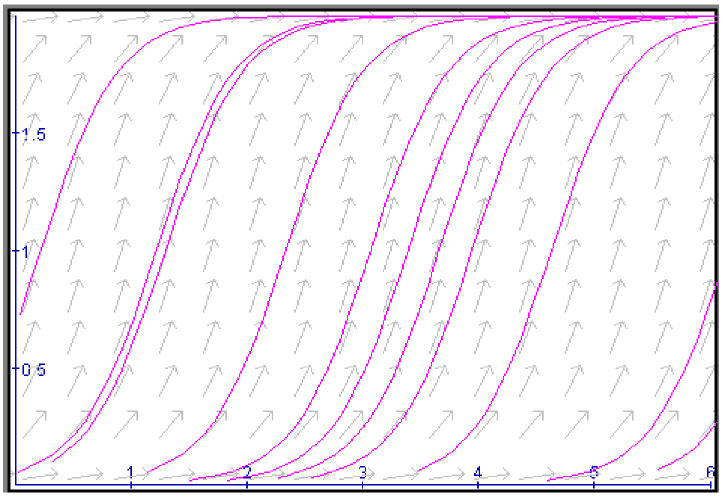
$$\frac{dy}{dt} = -0{,}4330 \cdot y$$

Hierbij is y de hoeveelheid aanwezig Polonium en t de tijd in tienden van milliseconden.

Geef de oplossing als y(1)=2.
Hoelang duurt het voordat een hoeveelheid Polonium tot 10% van de oorspronkelijke hoeveelheid vervallen is?

1. Maximale groei bij logistische groei

We kijken naar het richtingsveld bij een voorbeeld van logistische groei:



De vraag is nu: waar is de **toename maximaal**?

Als je een aantal oplossingen tekent dan lijkt op punten waarvoor geldt y=1 de toename maximaal te zijn. Dat klopt ook... dus precies midden tussen de asymptoten zullen we maar zeggen.

Als je de differentiaalvergelijking opvat als een functie (en waarom niet?) dan kan je daarvan het maximum wel bepalen!

$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{2}\right)$$

$$f(y) = 3y\left(1 - \frac{y}{2}\right) = 3y - 1\frac{1}{2}y^2$$

$$\begin{cases} f'(y) = 3 - 3y \\ f'(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 1$$

En inderdaad... een maximum bij y=1.

Dat betekent (in de praktijk) dat bij logistische groei bij een grenswaarde van N de maximale groei op $^1/_2$N ligt. Dan kan soms wel eens handig zijn te weten.

Voorbeeld

Bij een griepgolf neemt het aantal geinfecteerden logistisch toe. Bij het begin van de griep zijn er 50.000 mensen besmet. De verwachting is dat maximaal 1,5 miljoen mensen griep zullen krijgen. Na 3 weken is de toename van het aantal griepgevallen maximaal.

Geef de formule voor het aantal griepgevallen na t weken.

Uitwerking

$$y(0) = 50.000$$

$$G = 1.500.000$$

$$a = \frac{1.500.000 - 50.000}{50.000} = 29$$

$$\begin{cases} y(3) = 750.000 \\ y(t) = \dfrac{1.500.000}{1 + 29 \cdot e^{-c \cdot 1.500.000 \cdot t}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1.500.000}{1 + 29 \cdot e^{-c \cdot 1.500.000 \cdot 3}} = 750.000$$

$$1 + 29 \cdot e^{-c \cdot 4.500.000} = 2$$

$$29 \cdot e^{-c \cdot 4.500.000} = 1$$

$$e^{-c \cdot 4.500.000} = \frac{1}{29}$$

$$-c \cdot 4.500.000 = \ln\left(\frac{1}{29}\right)$$

$$c \approx 7,4827 \cdot 10^{-7}$$

$$y(t) = \frac{1.500.000}{1 + 29 \cdot e^{-1,122 \cdot t}}$$

2. Formule voor logistische groei in het boek

Op de formulekaart staat een andere formule dan in het boek voor hetzelfde groeimodel. 't Is wel een beetje onhandig dat het boek een andere formule gebruikt dan de formule op de formulekaart, dus laten we beide doen en zien dat het hetzelfde is... hebben we toch weer iets geleerd...

Formule uit het boek

De differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right) \text{ met } M > 0$$

Met als oplossing:

$$y = \frac{M}{1 + a \cdot e^{-ct}}$$

Bij gegeven randvoorwaarde:

$$a = \frac{M}{y(0)} - 1$$

Voorbeeld

Een forellenkwekerij heeft een vijver laten aanleggen waarin plaats is voor maximaal 4800 forellen. Met zet 800 forellen uit die na 3 maanden in aantal toegenomen zijn tot 1200. Er wordt verondersteld dat de groei logistisch zal zijn.

a. Bereken met de randvoorwaarden eerst de waarde van M en a.
   Bereken de waarde van c.
b. Na hoeveel maanden is snelheid waarmee het aantal forellen toeneemt het grootst?

Moderne wiskunde - vwo bovenbouw - wiskunde B1 deel 5 - A6 - Tussentoets

Uitwerking

a.	b.
Gegeven: $\begin{cases} M = 4800 \\ y(0) = 800 \\ y(3) = 1200 \end{cases}$ $a = \dfrac{4800}{800} - 1 = 5$ Invullen: $1200 = \dfrac{4800}{1 + 5 \cdot e^{-c \cdot 3}}$ $1 + 5 \cdot e^{-3c} = \dfrac{4800}{1200}$ $5 \cdot e^{-3c} = 3$ $e^{-3c} = \dfrac{3}{5}$ $-3c = \ln\left(\dfrac{3}{5}\right)$ $c = -\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \approx 0{,}17$ Formule: $y = \dfrac{4800}{1 + 5 \cdot e^{-0{,}17 \cdot t}}$	$2400 = \dfrac{4800}{1 + 5 \cdot e^{-0{,}17 \cdot t}}$ $1 + 5 \cdot e^{-0{,}17 \cdot t} = 2$ $5 \cdot e^{-0{,}17 \cdot t} = 1$ $e^{-0{,}17 \cdot t} = \dfrac{1}{5}$ $-0{,}17t = \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$ $t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)}{-0{,}17} \approx 9{,}5$ Na ongeveer 9,5 maand.

Formule op de formulekaart

Op de formulekaart staat deze formule:

De differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (G - y) \text{ met grenswaarde } G > 0$$

Met als oplossing:

$$y(t) = \frac{G}{1 + a \cdot e^{-cGt}}$$

Bij gegeven randvoorwaarde:

$$a = \frac{G - y(0)}{y(0)}$$

We doen bovenstaande opgave nog een keer met deze formule.

a.

Gegeven:

$$\begin{cases} G = 4800 \\ y(0) = 800 \\ y(3) = 1200 \end{cases}$$

$$a = \frac{4800 - 800}{800} = 5$$

Invullen:

$$1200 = \frac{4800}{1 + 5 \cdot e^{-c \cdot 4800 \cdot 3}}$$

$$1 + 5 \cdot e^{-14400 \cdot c} = \frac{4800}{1200}$$

$$5 \cdot e^{-14400 \cdot c} = 3$$

$$e^{-14400 \cdot c} = \frac{3}{5}$$

$$-14400 \cdot c = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$c = \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{-14400} \approx 0{,}000036$$

Formule:

$$y = \frac{4800}{1 + 5 \cdot e^{-0{,}17 \cdot t}}$$

...en zoals je ziet geeft dit dezelfde 'oplossing' als boven. De andere vraag is dan verder hetzelfde.

Grote lijn

Bekeken vanuit 'de grote lijn' is de formule op de formulekaart eigenlijk veel mooier! Kijk maar:

exponentiele groei

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y$$

$$\downarrow$$

begrensde groei

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot (K - y)$$

$$\downarrow$$

logistische groei

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y\,(G - y)$$

exponentiele groei

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \xrightarrow{\text{oplossing}} y = a \cdot e^{ct}$$

$$\downarrow$$

begrensde groei

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot (K - y) \xrightarrow{\text{oplossing}} y = K + a \cdot e^{-ct}$$

$$\downarrow$$

logistische groei

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y\,(G - y) \xrightarrow{\text{oplossing}} y = \frac{G}{1 + a \cdot e^{-cGt}}$$

3. Heel anders maar toch hetzelfde

Bij een experiment met fruitvliegjes in een afgesloten ruimte heeft men vastgesteld dat het aantal fruitvliegjes per m^3 bij benadering beschreven kan worden met de volgende formule:

$$F(t) = \frac{3500}{1 + 34 \cdot 0{,}87^t}$$

Hierin is t de tijd in dagen vanaf de start van het experiment en F het aantal fruitvliegjes per m^3 op tijdstip t.

a. Laat zien dat hier sprake is van logistische groei.
b. Geef de bijbehorende differentiaalvergelijking.
c. Bereken op 1 decimaal nauwkeurig de waarde voor t waar de groei maximaal is.

Uitwerking

a.

$$F(t) = \frac{3500}{1 + 34 \cdot 0{,}87^t} = \frac{3500}{1 + 34 \cdot \left(e^{-c}\right)^t}$$

$$e^{-c} = 0{,}87$$

$$-c = \ln(0{,}87) \approx -0{,}1392\ldots$$

$$c \approx 0{,}139$$

$$F(t) = \frac{3500}{1 + 34 \cdot 0{,}87^t} = \frac{3500}{1 + 34 \cdot e^{-0{,}139t}} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Met } y = \dfrac{M}{1 + a \cdot e^{-ct}} \text{ geldt:} \\ M = 3500 \\ a = 34 \\ c = 0{,}139 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{logistische groei}$$

b.

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right) \text{met } M > 0$$

Invullen:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}139 \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{3500}\right)$$

c.

$$\frac{3500}{1+34\cdot 0{,}87^t}=1750$$

$$1+34\cdot 0{,}87^t=2$$

$$34\cdot 0{,}87^t=1$$

$$0{,}87^t=\frac{1}{34}$$

$$\ln\left(0{,}87^t\right)=\ln\left(\frac{1}{34}\right)$$

$$t=\frac{\ln\left(\frac{1}{34}\right)}{\ln(0{,}87)}\approx 25{,}3$$

4. Samenvatting differentiaalvergelijkingen

Een differentiaalvergelijking beschrijft het verband tussen de afgeleide (eventueel van hogere orde) van een functie en de functie zelf.

exponentiele groei $\frac{dy}{dt}=c\cdot y$ $\downarrow$	exponentiele groei $\frac{dy}{dt}=c\cdot y \xrightarrow{\text{oplossing}} y=a\cdot e^{ct}$ $\downarrow$
begrensde groei $\frac{dy}{dt}=c\cdot(K-y)$ $\downarrow$	begrensde groei $\frac{dy}{dt}=c\cdot(K-y) \xrightarrow{\text{oplossing}} y=K+a\cdot e^{-ct}$ $\downarrow$
logistische groei $\frac{dy}{dt}=c\cdot y(G-y)$	logistische groei $\frac{dy}{dt}=c\cdot y(G-y) \xrightarrow{\text{oplossing}} y=\frac{G}{1+a\cdot e^{-cGt}}$

Met een differentiaal vergelijking kun je in elk punt van een assenstelsel de helling van de grafiek van een oplossing berekenen. Zo'n tekening van lijnelementen vormt dan een richtingsveld.
Grafieken van oplossingen van een differentiaalvergelijking kunnen horizontale asymptoten hebben (horizontale lijnelementen). De asymptoten zijn dan zelf ook oplossingen van de differentiaalvergelijking. Je kan ze vinden door in de differentiaal vergelijking $\frac{dy}{dt}=0$ te nemen.

Bijlage – uitwerkingen standaardopgaven

1. Forellenvijver

a.	b.
Gegeven: $\begin{cases} G = 4800 \\ y(0) = 800 \\ y(3) = 1200 \end{cases}$ $a = \frac{4800 - 800}{800} = 5$ Invullen: $1200 = \frac{4800}{1 + 5 \cdot e^{-c \cdot 4800 \cdot 3}}$ $1 + 5 \cdot e^{-14400 \cdot c} = \frac{4800}{1200}$ $5 \cdot e^{-14400 \cdot c} = 3$ $e^{-14400 \cdot c} = \frac{3}{5}$ $-14400 \cdot c = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$ $c = \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{-14400} \approx 0,000036$ Formule: $y = \frac{4800}{1 + 5 \cdot e^{-0,17 \cdot t}}$	$2400 = \frac{4800}{1 + 5 \cdot e^{-0,17 \cdot t}}$ $1 + 5 \cdot e^{-0,17 \cdot t} = 2$ $5 \cdot e^{-0,17 \cdot t} = 1$ $e^{-0,17 \cdot t} = \frac{1}{5}$ $-0,17t = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ $t = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0,17} \approx 9,5$ Na ongeveer 9,5 maand.

2. Fruitvliegjes

a. $\frac{dN}{dt} = kN\left(1 - \frac{N}{350}\right)$

Algemene oplossing:

$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$ met $M > 0 \rightarrow y = \frac{M}{1 + a \cdot e^{-ct}}$

$a = \frac{M}{y(0)} - 1$

In dit geval :

$a = \frac{350}{5} - 1 = 69$

$N = \frac{350}{1 + 69 \cdot e^{-kt}}$

b. Invullen (24,175) in $N = \frac{350}{1 + 69 \cdot e^{-kt}}$

$175 = \frac{350}{1 + 69 \cdot e^{-k \cdot 24}}$

$1 + 69 \cdot e^{-24k} = 2$

$69 \cdot e^{-24k} = 1$

$e^{-24k} = \frac{1}{69}$

$-24k = \ln(1) - \ln(69) = -\ln(69)$

$k = \frac{-\ln(69)}{-24} = \frac{\ln(69)}{24} \approx 0{,}1764$

c. $N(24) = 175$

Invullen in : $\frac{dN}{dt} = 0{,}1764 \cdot N\left(1 - \frac{N}{350}\right)$

$\frac{dN}{dt} = 0{,}1764 \cdot 175\left(1 - \frac{175}{350}\right) \approx 15{,}4368$

d. $\frac{dN}{dt} = kN\left(1 - \frac{N}{350}\right)$

$N = 0$ geeft $\frac{dN}{dt} = k \cdot 0\left(1 - \frac{0}{350}\right) = 0 \rightarrow$ Klopt!

$N = 350$ geeft $\frac{dN}{dt} = k \cdot 350\left(1 - \frac{350}{350}\right) = 0 \rightarrow$ Klopt!

3. Gebraden kip

Dit is een typisch geval van **begrensde groei**. De groeisnelheid is evenredig met het verschil tussen T en de bovengrens T=200. Dat betekent dat je de volgende differentiaalvergelijking kan opstellen:

$$\frac{dT}{dt} = c \cdot (200 - T), \text{ met t in minuten}$$

Deze differentiaalvergelijking heeft als algemene oplossing:

$T = 200 + a \cdot e^{-ct}$

Randvoorwaarden:

$y(0) = 6$

$y(20) = 160$

Invullen van de randvoorwaarden leveren de waarden van a en c:

Stap 1

$6 = 200 + a \cdot e^{-c \cdot 0}$

$6 = 200 + a \cdot 1$

$a = -194$

Stap 2

$160 = 200 - 194 \cdot e^{-c \cdot 20}$

$-194 \cdot e^{-20c} = -40$

$e^{-20c} = \frac{40}{194}$

$-20c = \ln\left(\frac{40}{194}\right)$

$$c = -\frac{\ln\left(\frac{40}{194}\right)}{20} = \frac{\ln\left(\frac{97}{20}\right)}{20} \approx 0{,}0789$$

En dat levert dan de oplossing:

$T = 200 - 194 \cdot e^{-0{,}0789 \cdot t}$

4. Kakkerlakken

De differentiaalvergelijking:

$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (G - y)$ met grenswaarde $G > 0$

Met als oplossing:

$$y(t) = \frac{G}{1 + a \cdot e^{-cGt}}$$

Bij gegeven randvoorwaarde:

$$a = \frac{G - y(0)}{y(0)}$$

Gegeven :

$$\begin{cases} G = 10.000 \\ y(0) = 10 \\ y(15) = 5.000 \end{cases}$$

$$a = \frac{G - y(0)}{y(0)} = \frac{10.000 - 10}{10} = 999$$

$$\begin{cases} y(t) = \dfrac{10.000}{1 + 999 \cdot e^{-c \cdot 10000 \cdot t}} \\ y(15) = 5.000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{10.000}{1 + 999 \cdot e^{-c \cdot 150.000}} = 5000$$

$$1 + 999 \cdot e^{-c \cdot 150.000} = 2$$

$$999 \cdot e^{-c \cdot 150.000} = 1$$

$$e^{-c \cdot 150.000} = \frac{1}{999}$$

$$-c \cdot 150.000 = \ln\left(\frac{1}{999}\right)$$

$$c = \frac{\ln\left(\frac{1}{999}\right)}{-150.000} \approx 0{,}00004605$$

$$y(t) = \frac{10.000}{1 + 999 \cdot e^{-0.4605 \cdot t}}$$

$$y(10) \approx 910$$

5. Afkoeling

't Is een typisch voorbeeld van begrensde groei. Afname (dT/dt) is evenredig met het temperatuurverschil (18-T) met de evenredigheidsconstante c.

a.

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot (K - y) \xrightarrow{\text{oplossing}} y(t) = K + (y(0) - K) \cdot e^{-ct}$$

$$\frac{dT}{dt} = c \cdot (18 - T) \xrightarrow{\text{oplossing}} T = 18 + (64 - 18) \cdot e^{-ct}$$

of...

$$T = 18 + 46 \cdot e^{-ct}$$

Invullen (5,24)

$$24 = 18 + 46 \cdot e^{-c \cdot 5}$$

$$6 = 46 \cdot e^{-5c}$$

$$e^{-5c} = \frac{3}{23}$$

$$-5c = \ln(3) - \ln(23)$$

$$c = \frac{1}{5}(\ln(23) - \ln(3)) \approx 0{,}4074$$

$$T = 18 + 46 \cdot e^{-0{,}4074 \cdot t}$$

b.

$T = 18 + 46 \cdot e^{-0,4074 \cdot t}$

Invullen:

$19 = 18 + 46 \cdot e^{-0,4074t}$

$1 = 46 \cdot e^{-0,4074 \cdot t}$

$e^{-0,4074t} = \frac{1}{46}$

$0,4074 \cdot t = \ln(46)$

$t = \frac{\ln(46)}{0,4074} \approx 9,4$

Na 9 en een halve minuut

6. Polonium 214

a.

$\frac{dy}{dt} = -0,4330 \cdot y$

$y(t) = p \cdot e^{-0,4330t}$ met $y(0) = 1$

Geeft:

$2 = p \cdot e^{-0,4330 \cdot 1}$

$p = \frac{2}{e^{-0,4330}} \approx 1,2971$

Oplossing: $y(t) = 1,2971 \cdot e^{-0,4330t}$

b.

$e^{-0,4330t} = 0,1$

$-0,4330t = \ln(0,1)$

$t = \frac{\ln(0,1)}{-0,4330} \approx 5,32$

Na ongeveer 0,53 milliseconden