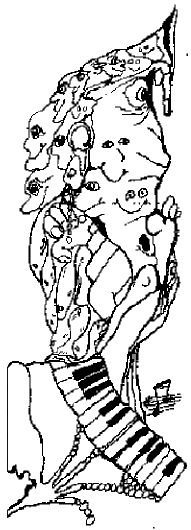


Willem van Ravenstein

Lesbrief Hypergeometrische verdeling

If I am given a formula, and I am ignorant of its meaning, it cannot teach me anything, but if I already know it what does the formula teach me?
St. Augustine (354-430)

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1 - Laplace

Formule

$$P(\text{gebeurtenis A}) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}} \qquad \text{(Laplace)}$$

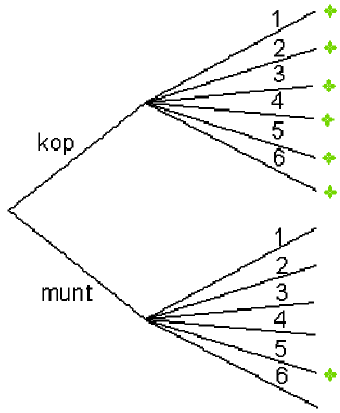
Voorbeeld 1

Je gooit met 3 munten. Wat is de kans op 3 keer kop?

- $P(\text{3 keer kop}) = \dfrac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}} = \dfrac{1}{8}$

Voorbeeld 2

Je gooit met een munt en een dobbelsteen. Wat is de kans dat je kop of een vijf gooit?



- $P(\text{kop of vijf}) = \dfrac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}} = \dfrac{7}{12}$

Eén opgave, drie uitwerkingen

In een vaas zitten 8 witte, 4 blauwe en 2 rode ballen. We trekken steeds drie ballen uit de vaas zonder terugleggen.

- Bereken op 3 verschillende manieren de kans op 3 verschillend gekleurde ballen.

Uitwerking 1 Laplace

- Het aantal gunstige uitkomsten is $6 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2 = 384$
  Het aantal mogelijke uitkomsten is $14 \cdot 13 \cdot 12 = 2184$

  $P(\text{3 verschillende kleuren}) = \dfrac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}} = \dfrac{384}{2184} = \dfrac{16}{91}$.

Uitwerking 2 met kansen

- $P(\text{3 verschillende kleuren}) = \underbrace{6}_{\substack{\text{aantal}\\ \text{verschillende}\\ \text{volgordes}\\ \text{van}\\ 3\\ \text{verschillende}\\ \text{kleuren}}} \cdot \underbrace{\frac{8}{14}\cdot\frac{4}{13}\cdot\frac{2}{12}}_{\substack{\text{kans}\\ \text{op}\\ \text{wit–blauw–rood}\\ \text{precies}\\ \text{in}\\ \text{die}\\ \text{volgorde}}} = \dfrac{16}{91}$

Uitwerking 3 hypergeometrische verdeling

- $P(\text{3 verschillende kleuren}) = \dfrac{\binom{8}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{14}{3}} = \dfrac{16}{91}$

Opgave

- Bereken op 3 verschillende manieren de kans op 2 witte ballen.

Hoofdstuk 2 - de hypergeometrische verdeling

De verschillende uitwerkingen van hoofdstuk zijn (in wezen) natuurlijk hetzelfde. Uitwerking 1 is waarschijnlijk het meest transparant en ’t breedst inzetbaar. Het is niet zo verwonderlijk dat schoolboeken veel aandacht besteden aan telproblemen. De telproblemen maken deze methode dan ook meteen weer lastig voor leerlingen.

Bij uitwerking 2 speelt Laplace ook een rol. De kans dat de eerste knikker ‘wit’ is, de kans dat de tweede knikker ‘blauw’ is… herhaald toepassen van Laplace en vermenigvuldigen. De telproblemen komen dan ook weer aan de orde bij de 6 verschillende permutaties van 3 gekleurde knikkers. Maar deze methode van ‘eerst een bepaalde volgorde berekenen’ en daarna ‘vermenigvuldigen met het aantal verschillende volgordes die je kan maken’ is een handig concept en is breed inzetbaar. Met of zonder terugleggen, ’t komt op ’t zelfde neer…

Toch is dit voor leerlingen lastig. Bij uitwerking 3 wordt gebruik gemaakt van de hypergeometrische verdeling. Het is feitelijk weer Laplace, maar je kijkt dan niet naar gunstige permutaties, maar naar gunstige combinaties.

Voorbeeld

- In een vaas zitten 12 witte en 8 rode knikkers. Je pakt hieruit 4 knikkers zonder terugleggen. Wat is de kans op 3 witte knikkers?

Uitwerking

Als je niet op de volgorde let dan zijn er $\binom{12}{3}$ manieren om 3 van 12 witte knikkers te pakken. Er zijn $\binom{8}{1}$ manieren om 1 van 8 rode knikkers te pakken. In totaal zijn er $\binom{12}{3}\cdot\binom{8}{1}$ manieren om 3 witte en 1 rode knikker uit de vaas te pakken. Dat is dan het aantal **gunstige mogelijkheden**.

Er zijn in totaal $\binom{20}{4}$ manieren om 4 van 20 knikkers uit de vaas te pakken.

- $\text{P(3 wit en 1 rood)} = \dfrac{\binom{12}{3}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{352}{969} \approx 0{,}363$

Om er zeker van te zijn dat dit goed gaat zouden alle ‘gunstige mogelijkheden’ dezelfde kans moeten hebben. Hetzelfde geldt voor alle ‘mogelijke uitkomsten’.

Conclusie

De hypergeometrische verdeling heeft in de praktijk vele voordelen. Je kunt er meestal snel mee uit de voeten zelfs als je niet ‘echt’ begrijpt wat je aan het doen bent. Dat laatste moet je natuurlijk niet goed vinden. Een ander voordeel van de hypergeometrische verdeling is dat het breed inzetbaar is, ook bij ‘meerdere kleuren’.

Hoofdstuk 3 - wanneer gebruik je welke verdeling?

Bij een discrete kansverdeling stel je jezelf de volgende vragen:

- Is de **volgorde** belangrijk?
- Is het met of zonder **terugleggen**?

Voorbeeld 1

Ik heb een vaas met 5 groene en 4 rode knikkers. Ik haal hieruit **met terugleggen** 3 knikkers.

a. Bereken P(g,g,r)
b. Bereken P(2 groene knikkers)

Antwoord

a. Hier is de **volgorde** belangrijk, dus uitschrijven: $P(g,g,r) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9}$

b. Hier is de volgorde niet belangrijk. Het is **met terugleggen**, we lossen dit op met de binomiale verdeling:

$X: \text{aantal groene knikkers}$

$X \sim \text{binimaal verdeeld met } p = \frac{5}{9} \text{ en } n = 3$

$$P(2\text{ groen}) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)$$

Voorbeeld 2

Ik heb een vaas met 5 groene en 4 rode knikkers. Ik haal hieruit **zonder terugleggen** 3 knikkers.

a. Bereken P(g,g,r)
b. Bereken P(2 groene knikkers)

Antwoord

a. Hier is de **volgorde** belangrijk, dus uitschrijven: $P(g,g,r) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7}$

b. Hier is de volgorde niet belangrijk. Het is **zonder terugleggen**, we lossen dit op met de hypergeometrische verdeling:

$$P(2\text{ groen}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}$$

Hoofdstuk 4 - extra opgaven

Opgave 1

In een vaas zitten 10 rode en 15 blauwe knikkers. We trekken **zonder** terugleggen 3 knikkers uit de vaas.

a. Bereken de kans op 2 rode en 1 blauwe knikker.
b. Bereken de kans op meer rode dan blauwe knikkers.
c. Bereken de kans op 3 knikkers van dezelfde kleur.

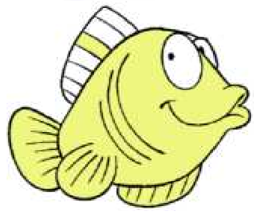
Opgave 2

In een vaas zitten 10 rode en 15 blauwe knikkers. We trekken **met** terugleggen 3 knikkers uit de vaas.

a. Bereken de kans op 2 rode en 1 blauwe knikker.
b. Bereken de kans op meer rode dan blauwe knikkers.
c. Bereken de kans op 3 knikkers van dezelfde kleur.

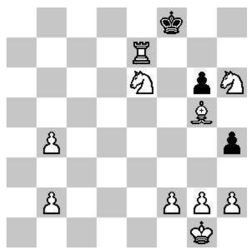
Opgave 3

In een vijver zwemmen zo'n 250 vissen rond. Ongeveer 40% van deze vissen is nog van vorig jaar. Je vangt (willekeurig) 20 vissen uit de vijver. Bereken op 3 decimalen de kans dat precies de helft van deze 20 vissen van vorig jaar is?



Opgave 4

Arie en Bert spelen regelmatig een partij schaak. Ze besluiten tot het spelen van een '2match'. Dat betekent dat de eerste speler die 2 partijen na elkaar wint de winnaar is van de '2match'. Arie en Bert zijn ongeveer even sterke spelers. De kans om een partij te winnen is voor beide gelijk aan 25%. De kans op remise is dus 50%.



a. Bereken de exacte kans dat Arie na 3 partijen de winnaar van de 'match' is.
b. Bereken de exacte kans dat voor de match meer dan 3 partijen nodig zijn.

Willem van Ravenstein
februari 2010

Uitwerkingen van de extra opgaven

Opgave 1

a. P(2 rood) = $\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{15}{1}}{\binom{25}{3}} \approx 0{,}293$

b. P(2 of 3 rood) = $\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{15}{1}}{\binom{25}{3}} + \frac{\binom{10}{3}}{\binom{25}{3}} \approx 0{,}346$

c. P(3 rood of 3 blauw) = $\frac{\binom{10}{3}}{\binom{25}{3}} + \frac{\binom{15}{3}}{\binom{25}{3}} = 0.25$

Opgave 2

a. P(2 rood) = $\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{36}{125} \approx 0{,}288$

b. P(2 of 3 rood) = $\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{44}{125} \approx 0{,}352$

c. P(3 rood of 3 blauw) = $\left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{7}{25} \approx 0{,}28$

Opgave 3

$$P(X=10) = \frac{\binom{100}{10}\binom{150}{10}}{\binom{250}{20}} \approx 0{,}118$$

Met de binomiale verdeling: $P(X=10)=0{,}117$. Dat mag ook!

Opgave 4

a. Dat kan alleen met BAA en RAA. P(BAA of RAA)= $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{64}$

b. P(Arie wint in 2 of 3 partijen) = $\frac{1}{16} + \frac{3}{64} = \frac{7}{64}$. Idem voor Bert natuurlijk.

Dus P(meer dan 3 partijen)= $1 - \frac{14}{64} = \frac{50}{64} = \frac{25}{32}$